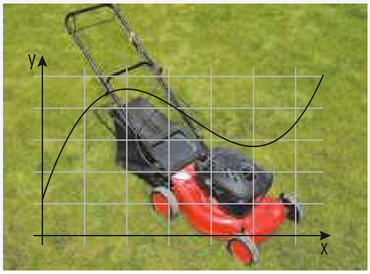
1.2.2 Extrempunkte

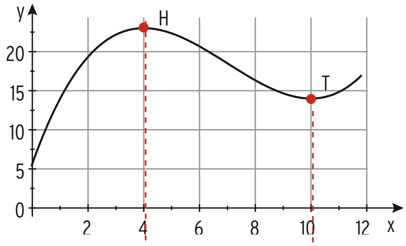
Beispiel

➲ Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 10x + \frac{17}{3}$ beschreibt näherungsweise die wöchentlichen Verkaufszahlen von Rasenmähern. Dabei ist x die Zeit in Wochen nach Wiedereröffnung der Geschäftsräume. Untersuchen Sie die Entwicklung der Verkaufszahlen.



Lösung

Die Verkaufszahlen nehmen zu bis zur Woche 4 mit 23 Stück, danach nehmen sie ab bis zur Woche 10 mit 14 verkauften Rasenmähern, um danach wieder zuzunehmen.



Man liest ab:

f ist monoton	**wachsend**	**fallend**	**wachsend**
für	$x < 4$	$4 < x < 10$	$x > 10$
	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

$f'(4) = 0$ H $\quad$ $f'(10) = 0$ T

Im Übergang
von **wachsend zu fallend** liegt ein **Hochpunkt,**
von **fallend zu wachsend** liegt ein **Tiefpunkt.**

Beachten Sie

Ein Kurvenpunkt $P(x_1 | f(x_1))$ heißt $\left\{\begin{matrix}\textbf{Hochpunkt}\\ \textbf{Tiefpunkt}\end{matrix}\right\}$, wenn $f(x_1)$ der $\left\{\begin{matrix}\textbf{größte}\\ \textbf{kleinste}\end{matrix}\right\}$ **Funktionswert** für alle x aus einer Umgebung von x_1 ist.

Dieser $\left\{\begin{matrix}\textbf{größte}\\ \textbf{kleinste}\end{matrix}\right\}$ Funktionswert $f(x_1)$ heißt **relatives (lokales)** $\left\{\begin{matrix}\textbf{Maximum}\\ \textbf{Minimum}\end{matrix}\right\}$.

Notwendige Bedingung für (lokale) Extremstellen: $f'(x_1) = 0$.
Dabei liegt x_1 im Innern des Definitionsbereichs.

Hochpunkte bzw. Tiefpunkte nennt man **Extrempunkte** des Schaubildes K von f.
Der x-Wert des Extrempunktes heißt Extremstelle.

Nachweis für Extrempunkte (1. Möglichkeit):
Nachweis mit **Vorzeichenwechsel** (VZW von $f'(x)$):

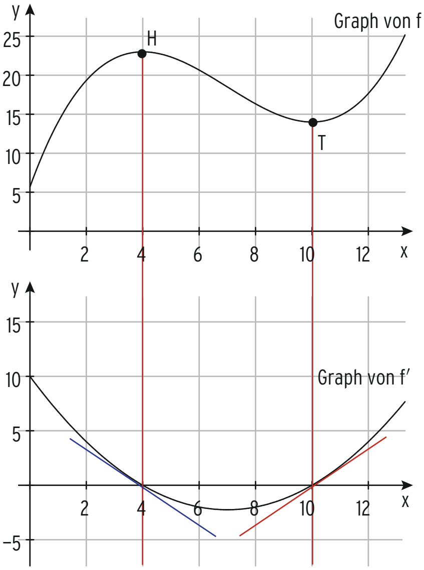
VZW von f′(x) an der Stelle	**x** = 4	**x** = **10**
	von **+** nach **−**	**−** nach **+**
führt auf einen	**Hochpunkt**	**Tiefpunkt**
mit	$f(4) = 23$ und	$f(10) = 14$
	H(4 | 23)	**T(10 | 14)**

Hinweis: $f'(3) = 1{,}75 > 0$; $f'(4) = 0$; $f'(5) = -1{,}25 < 0$

2. Möglichkeit: Nachweis mithilfe der zweiten Ableitung von f

Schaubild von f

Schaubild von f′



$f''(x)$ ist die **Steigung** des Schaubildes von f' an der Stelle x.

	$x = 4$	$x = 10$
Die **Steigung** des Graphen von f' an der Stelle	ist **negativ**	ist **positiv**.
	$f''(4) < 0$	$f''(10) > 0$
Das bedeutet: Das Schaubild von f hat dort einen	**Hochpunkt**	**Tiefpunkt**

Hinweis: $x = 4$ ist **Maximalstelle**, $x = 10$ ist **Minimalstelle.**

Berechnung von $f''(4)$ und $f''(10)$

Zweite Ableitung von f: $f''(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

Einsetzen der x-Werte in $f''(x)$: $f''(4) = -\frac{3}{2} < 0$ $f''(10) = \frac{3}{2} > 0$

Bestimmung von Extrempunkten

- **Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$** liefert die Stellen $x_1, x_2, \ldots$ mit waagrechter Tangente

- **Nachweis für Hochpunkt bzw. Tiefpunkt**

  1. Möglichkeit durch **Vorzeichen-Untersuchung** von $f'(x)$

  Hat $f'(x)$ an der Stelle x_1 einen Vorzeichenwechsel

  $$\left.\begin{array}{l}\text{von + nach −}\\ \text{von − nach +}\end{array}\right\}\ \text{so hat der Graph von f einen}\ \left\{\begin{array}{l}\textbf{Hochpunkt}\ H\left(x_1 \mid f(x_1)\right)\\ \textbf{Tiefpunkt}\ T\left(x_1 \mid f(x_1)\right)\end{array}\right.$$

  2. Möglichkeit durch **Einsetzen von x_1** in $f''(x)$

  $$\text{Ist}\ \left.\begin{array}{l}f''(x_1) < 0\\ f''(x_1) > 0\end{array}\right\}\ \text{so hat der Graph von f einen}\ \left\{\begin{array}{l}\textbf{Hochpunkt}\ H\left(x_1 \mid f(x_1)\right)\\ \textbf{Tiefpunkt}\ T\left(x_1 \mid f(x_1)\right)\end{array}\right.$$

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x;\ x \in \mathbb{R}$ mit Graph K.
Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte.

Lösung

Ableitungen: $f'(x) = -x^2 + 4x - 3;\ f''(x) = -2x + 4$

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f'(x) = 0$ $-x^2 + 4x - 3 = 0$

Stellen mit waagrechter Tangente: $x_1 = 1;\ x_2 = 3$

Nachweis durch Einsetzen der x-Werte in **$f''(x)$**

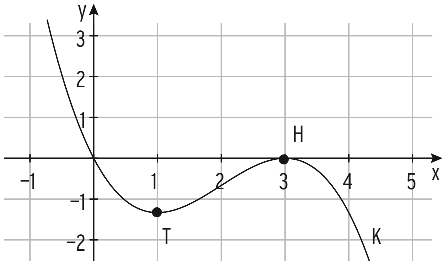
$f''(1) = 2 > 0$: f hat in x = 1 ein (relatives) Minimum,
K hat einen Tiefpunkt an der Stelle $x_1 = 1$.

$f''(3) = -2 < 0$: f hat in x = 3 ein (relatives) Maximum,
K hat einen Hochpunkt an der Stelle $x_2 = 3$.

Mit $f(1) = -\frac{4}{3}$ und $f(3) = 0$ erhält man:

Tiefpunkt $T\left(1 \middle| -\frac{4}{3}\right)$; Hochpunkt $H(3|0)$

Schaubild K:



Beispiel

Berechnen Sie die Extremstellen von f mit $f(x) = 0{,}5x + \cos(x)$ für $x \in [0;\pi]$.
Welche ist die Minimalstelle?

Lösung

Ableitungen: $f'(x) = 0{,}5 - \sin(x);\ f''(x) = -\cos(x)$

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f'(x) = 0$ $0{,}5 - \sin(x) = 0$

$\sin(x) = 0{,}5$

Lösung z. B. mithilfe der Tabelle: $x_1 = \frac{\pi}{6};\ x_2 = \frac{5}{6}\pi$

Nachweis durch Einsetzen der x-Werte in **$f''(x)$**

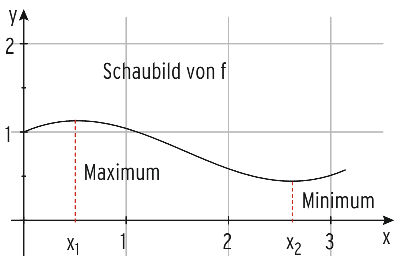
$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0{,}866 < 0$

f hat in $x_1 = \frac{\pi}{6}$ ein (relatives) Maximum.

$f''\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 0{,}866 > 0$

f hat in $x_2 = \frac{5}{6}\pi$ ein (relatives) Minimum.

$x_2 = \frac{5}{6}\pi$ ist die Minimalstelle.



Hinweis: $f(x_2)$ ist der absolut kleinste y-Wert,
$f(x_2)$ ist das **absolute Minimum auf $[0;\pi]$.**
Das relative Maximum ist auch das **absolute Maximum auf $[0;\pi]$.**

Beispiel

➲ K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 2x\,e^x$; $x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie Art und Lage des zugehörigen Extrempunktes.

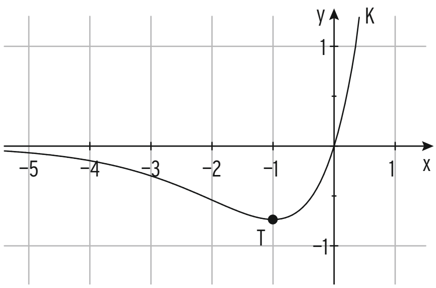
Lösung

Ableitung mithilfe der Produktregel:

$u(x) = 2x$	$u'(x) = 2$	$f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$
$v(x) = e^x$	$v'(x) = e^x$	$f'(x) = 2 \cdot e^x + 2x\,e^x = 2\,e^x(x+1)$

Notwendige Bedingung
für Extremstellen: $f'(x) = 0$ $\quad 2\,e^x(x+1) = 0$
Stelle mit waagrechter Tangente: $\quad x_1 = -1$

Nachweis durch Vorzeichen-Untersuchung von $f'(x)$
$f'(-2) = -0{,}27 < 0$; $f'(0) = 2 > 0$
$f'(x)$ wechselt an der Stelle $x_1 = -1$
das Vorzeichen von − nach +.
K hat einen **Tiefpunkt** an der Stelle $x_1 = -1$.
y-Wert des Tiefpunktes T:
$f(-1) = -2\,e^{-1}$
Tiefpunkt $T(-1 \mid -2\,e^{-1})$



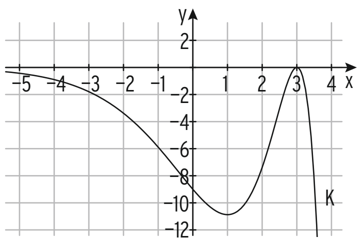
Hinweis: Der Nachweis wurde ohne die zweite Ableitung durchgeführt.

Beispiel

➲ Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -(x-3)^2 e^x$; $x \in \mathbb{R}$. K ist das Schaubild von f.
Zeigen Sie ohne Verwendung der 2. Ableitung, dass K in $x = 3$ einen Hochpunkt hat.

Lösung

Ohne Rechnung erkennt man:
$x_{1|2} = 3$ ist **doppelte Nullstelle** von f.
Doppelte Nullstelle von f bedeutet:
$f(x)$ **wechselt das Vorzeichen nicht.**
Wegen $f(x) = -(x-3)^2 e^x \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
muss in der doppelten Nullstelle ein **Hochpunkt** liegen.



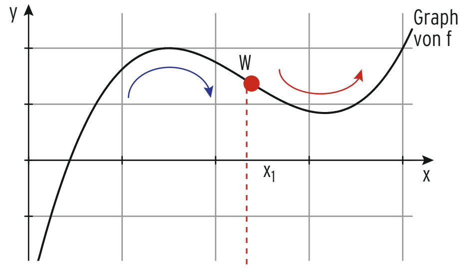
Beachten Sie

x_1 ist **doppelte Nullstelle** von f $\Rightarrow$ x_1 ist **Extremstelle** von f.

1.2.3 Wendepunkte

Der Amazonas fließt zunächst in einer **Rechtskurve** und danach in einer **Linkskurve** (vgl. Abbildung).

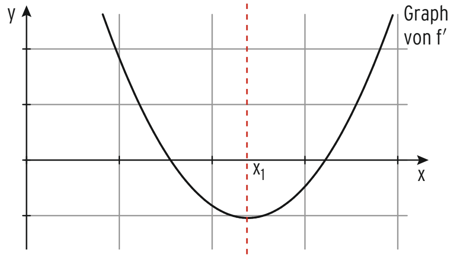
Im Übergang von **Rechtskurve** zu **Linkskurve oder** von **Linkskurve** zu **Rechtskurve** liegt ein **Wendepunkt.** Die Kurve wechselt ihre **Krümmung.**



Rechtskrümmung
Steigung nimmt ab

Linkskrümmung
Steigung nimmt zu

Ist x_1 **Wendestelle** von f, so ist x_1 die Stelle mit **kleinster Steigung,** also Extremstelle von f'.



f' fallend

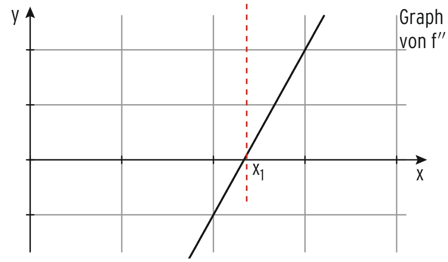
f' wachsend

Daraus folgt:
Notwendige Bedingung für die Wendstelle x_1:
Steigung des Graphen von f' in x_1 ist null, also:
$(f')'(x_1) = 0$

$\downarrow$

$f''(x_1) = 0$

Nachweis für die Wendestelle x_1:
$f''(x)$ hat einen Vorzeichenwechsel von − nach +
oder
$f'''(x_1) > 0$



$f''(x) < 0$ $f''(x_1) = 0$ $f''(x) > 0$
f'' wachsend
$f'''(x_1) > 0$

Hinweis: $f'''(x_1)$ ist die Steigung des Schaubildes von f'' an der Stelle x_1.

Bestimmung von Wendepunkten

- **Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$ liefert die Stellen $x_1, x_2, \ldots$**
- **Nachweis:**

1. Möglichkeit durch Vorzeichenuntersuchung von $f''(x)$
Ist x_1 einfache Nullstelle von f'', so wechselt $f''(x)$ das Vorzeichen an der Stelle x_1. K von f hat den Wendepunkt $W(x_1 | f(x_1))$.

2. Möglichkeit durch Einsetzen von x_1 in $f'''(x)$
Ist $f'''(x_1) \neq 0$, so hat K von f den Wendepunkt $W(x_1 | f(x_1))$.

Beachten Sie

In der Wendestelle x_1 ändert sich die **Krümmung** der Kurve K von f.
$f''(x_1) > 0$ bedeutet: K ist in x_1 linksgekrümmt.
$f''(x_1) < 0$ bedeutet: K ist in x_1 rechtsgekrümmt.

Beispiel

Gegeben ist Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{48}x^4 - \frac{3}{2}x^2$; $x \in \mathbb{R}$.
Untersuchen Sie das Schaubild K von f auf Wendepunkte.

Lösung

Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$; $f''(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$; $f'''(x) = \frac{3}{2}x$

Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$f''(x) = 0$: $\frac{3}{4}x^2 - 3 = 0$

Lösungen der Gleichung: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$

Nachweis:

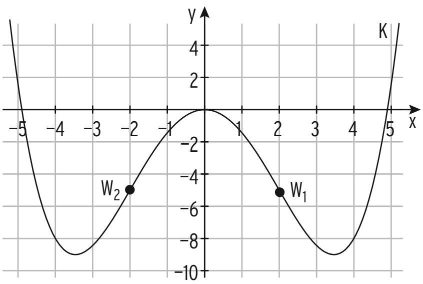
Einsetzen von $x_1 = 2$ in $f'''(x)$: $f'''(2) = 3 \neq 0$

$x_1 = 2$ ist Wendestelle.

y-Wert des Wendpunkts: $f(2) = -5$;

Wendepunkt: $W_1(2 | -5)$

Wegen der Symmetrie von K zur y-Achse:
$W_2(-2 | -5)$



Beispiel

➡ Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2$; $x \in \mathbb{R}$. K ist das Schaubild von f.

a) Bestimmen Sie den Wendepunkt von K.

b) Geben Sie die Gleichungen von Tangente und Normale an K im Wendepunkt an.

Lösung

a) Ableitungen: $f'(x) = -3x^2 + 6x$; $f''(x) = -6x + 6$; $f'''(x) = -6$

Notwendige Bedingung für Wendestellen:

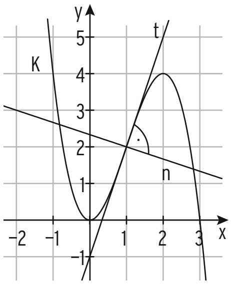
$f''(x) = 0$	$-6x + 6 = 0$
Lösung der Gleichung:	$x = 1$
Nachweis:	$f'''(1) = -6 \neq 0$
Damit ist $x = 1$ Wendestelle.	
Wendepunkt:	$W(1\,|\,2)$

b) **Tangente**

Steigung in W:	$f'(1) = 3$
Hauptform:	$y = mx + b$
Einsetzen von $m = f'(1)$:	$y = 3x + b$
Punktprobe mit $W(1\,|\,2)$:	$2 = 3\cdot 1 + b \Leftrightarrow b = -1$
Gleichung der Wendetangente t:	$y = 3x - 1$

Normale

Normale $\perp$ Tangente:	$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{3}$
Hauptform:	$y = -\frac{1}{3}x + b$
Punktprobe mit $W(1\,|\,2)$:	$2 = -\frac{1}{3}\cdot 1 + b$
	$b = \frac{7}{3}$
Gleichung der Wendenormale n:	$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$



Bemerkungen:

1. Die Tangente an das Schaubild K von f **im Wendepunkt heißt Wendetangente.**

2. Die **Wendetangente** ist die einzige Tangente, die das Schaubild K von f im Wendepunkt berührt und „durchschneidet".
   Gleichsetzen der Funktionsterme $f(x) = 3x - 1 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = 3x - 1$
   ergibt mit $-(x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow x_{1|2|3} = 1 = x_W$ eine **dreifache Lösung.**
   x_W ist **dreifache Schnittstelle** von K und Wendetangente.

3. $f'(x_0)$: **Steigung** des Graphen von f in x_0
   $f''(x_0)$: **Krümmung** des Graphen von f in x_0
   $f''(x_0) < 0$ bedeutet **Rechtskrümmung;**
   $f''(x_0) > 0$ bedeutet **Linkskrümmung.**

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Untersuchen Sie das Schaubild der Funktion f auf Hoch- und Tiefpunkte.

a) $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 3$
b) $f(x) = (x - 3)e^x$
c) $f(x) = \sin(\pi x - 2);\ x \in]-0{,}5; 2{,}5[$
d) $f(x) = e^{2x} - e^x$

2 Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.

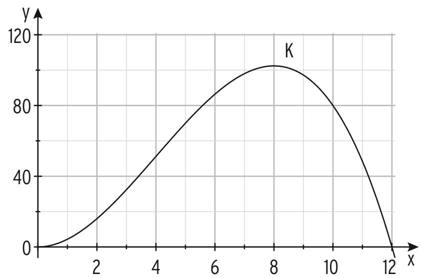
a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$
b) $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + 3$

3 Machen Sie eine Aussage über das Krümmungsverhalten des Graphen K von f. Skizzieren Sie K.

a) $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^3$
b) $f(x) = \cos(\pi(x - 2));\ x \in]-1{,}5; 1{,}5[$

4 Die Abbildung zeigt das Schaubild K einer Funktion f.
Begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(1) K hat zwei Wendepunkte.
(2) f' ist wachsend auf [4; 8].
(3) $f''(2) < f''(8)$
(4) Die maximale momentane Änderungsrate von f liegt bei 8.



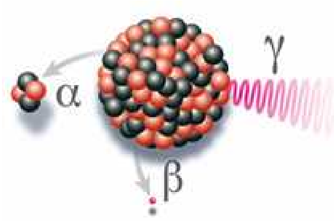
5 Das Schaubild einer Polynomfunktion 3. Grades ist symmetrisch zum Ursprung und hat den Extrempunkt $E(2\,|\,8)$.
Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm.

6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x;\ x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie: f ist monoton fallend für $-2 \le x \le 1$.

1.3 Modellierung realer Probleme

in der Natur: Wachstumsprozesse

Zerfallsprozesse

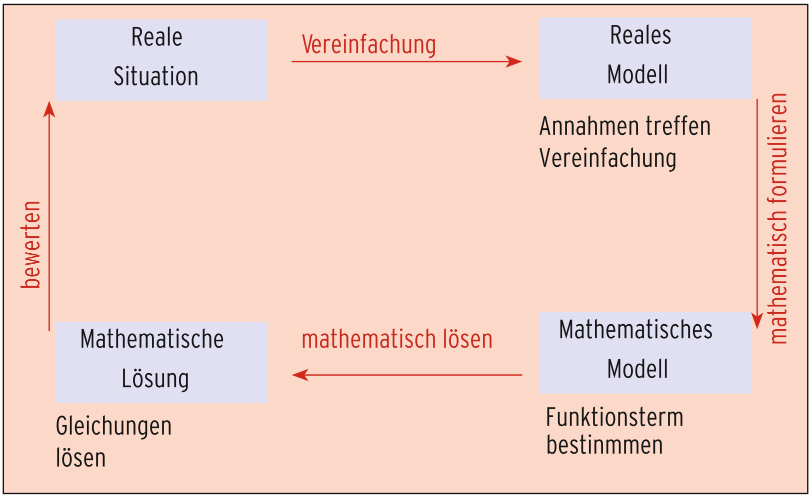


in der Technik

in der Wirtschaft

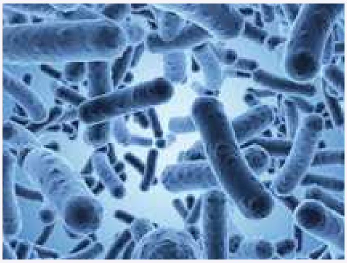
Funktionen im Anwendungszusammenhang sind von großer Bedeutung.
Lässt sich eine reale Situation mathematisch (z. B. durch eine Funktion) beschreiben, so können mathematische Überlegungen zur Klärung der Fragen und Probleme, die sich aus der Praxis ergeben, beitragen.
Diese Vorgehensweise nennt man **„mathematisches Modellieren".**

Modellierungskreislauf



1.3.2 Modellierung von Wachstums- und Zerfallsprozessen

Beispiel



Die Anzahl der Individuen einer Population wurde im Laufe von 5 Wochen gemessen:

t (in Wochen)	0	1	2	3	4	5
Bestand f (t)	825	968	1135	1333	1564	1836

a) Begründen Sie die Annahme, dass der Bestand ungefähr exponentiell zunimmt.
Bestimmen Sie das Wachstumsgesetz.

b) Nach welcher Zeit ist die Zunahme des Bestands pro Woche größer als 900?

Lösung

a) **Exponentielles Wachstum** liegt vor, wenn die Anzahl der Individuen in einer Woche stets mit dem **gleichen Faktor** wächst.

$\frac{f(1)}{f(0)} \approx 1{,}173$; $\frac{f(2)}{f(1)} \approx 1{,}172$ $\Rightarrow$ $f(t+1) = 1{,}17 \cdot f(t)$

Der **Wachstumsfaktor** beträgt also 1,17. Die Anzahl der Individuen nimmt in einer Woche um 17 % des letzten Bestandes zu (Bestand zu Wochenbeginn).

Wachstumsgesetz: $f(t) = 825 \cdot 1{,}17^t$

Mit $1{,}17 = e^{\ln(1{,}17)} = e^{0{,}16}$ erhält man f (t) **in e-Basis:** $f(t) = 825 \cdot e^{0{,}16\,t}$

Alternative: **Ansatz für exponentielles Wachstum** $\mathbf{f(t) = a\,e^{kt}}$

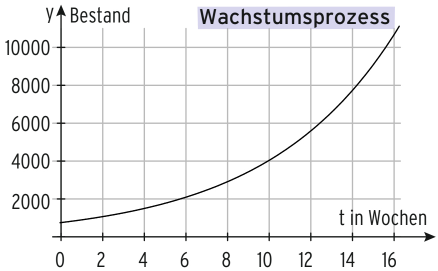
Mit $f(0) = 825$: $a = 825$

$f(1) = 968$: $825\,e^{k \cdot 1} = 968$

$e^k = 1{,}17$

$k = \ln(1{,}17) = 0{,}16$

Wachstumsgesetz: $f(t) = 825 \cdot e^{0{,}16\,t}$



b) Die Ableitung von f gibt die Zunahme der Individuen pro Woche an.
Ableitung:
$f'(t) = 825 \cdot 0{,}16 \cdot e^{0{,}16\,t} = 132 \cdot e^{0{,}16\,t}$

Ansatz: $f'(t) = 900$

$132 \cdot e^{0{,}16\,t} = 900$

$e^{0{,}16\,t} = 6{,}82$

$0{,}16\,t = \ln(6{,}82)$

$t = \frac{\ln(6{,}82)}{0{,}16} = 11{,}99\ldots$

Nach 12 Wochen ist die Zunahme der Individuen pro Woche größer als 900.

Beispiel

Eine Funktion f mit $f(t) = (2t + 5)e^{-0,5t}$; $t \geq 0$ beschreibt die Masse einer Substanz in Abhängigkeit von der Zeit t (t = 0: Beginn der Messung; t in Minuten, f(t) in Gramm).

a) Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate von f in $t = 2$.
Interpretieren Sie.

b) Wie groß ist die durchschnittliche Massenabnahme auf dem Intervall [2; 6]?

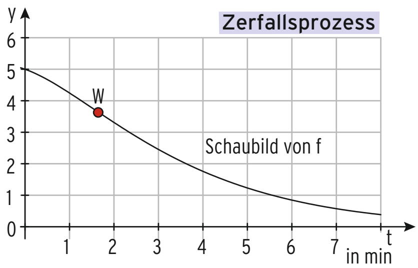
c) In welchem Zeitpunkt nimmt die Masse am stärksten ab?
Wie groß ist diese Abnahme?

Lösung

a) Die Massenänderung wird beschrieben durch die 1. Ableitung: $f'(t) = -(t + 0,5)e^{-0,5t}$

$f'(2) = -0,92$

Die momentane Änderungsrate von f in $t = 2$ ist $-0,92$.
In $t = 2$ beträgt die Massenabnahme 0,92 g pro Minute.



b) $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(6) - f(2)}{4} = \frac{0,85 - 3,31}{4} = \frac{-2,46}{4} = -0,615$

Von der 2. bis zu 6. Minute nimmt die Masse um 0,615 g pro Minute ab.

c) Es handelt sich um eine **Abnahme,** da $f'(t) < 0$ für $t > 0$.
Die Massenabnahme ist am stärksten, wenn $f'(t)$ ein **Minimum** hat.

2. Ableitung: $f''(t) = 0,5(t - 1,5)e^{-0,5t}$

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$ $0,5(t - 1,5)e^{-0,5t} = 0$
$t = 1,5$

Nachweis: $f''(t)$ wechselt in $t = 1,5$ das Vorzeichen von − nach +.
f' hat in $t = 1,5$ ein relatives Minimum.

Relatives Minimum: $f'(1,5) = -0,945$

Randwertuntersuchung: $f'(t) \to -0,5$ für $t \to 0$ bzw. $f'(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

In $t = 1,5$ nimmt f' ihren **kleinsten** Wert an.

Hinweis: In $t = 1,5$ liegt der **Wendepunkt** des Schaubildes von f.
Die größte Abnahme beträgt $0,945 \frac{g}{min}$.

Beispiel

Eine Funktion f mit $f(t) = 500 - 300\,e^{-0{,}036t}$; $t \geq 0$ beschreibt die Population von Mäusen in Abhängigkeit von der Zeit t (t = 0: Beginn der Messung; t in Jahren).

a) Wie viele Mäuse hat die Population zu Beginn der Messung?
Wie groß kann die Mäusepopulation werden?
Nach wie viel Jahren sind 90 % des Maximalbestandes erreicht?

b) Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate von f in $t = 2$. Interpretieren Sie.
Wie groß ist die durchschnittliche Änderungsrate auf dem Intervall [2; 10]?

c) Bestimmen Sie die maximale Änderungsrate von f.

Lösung

a) Anfangsbestand: $f(0) = 200$

Maximalbestand (Grenze G)

Für $t \to \infty$ gilt: $f(t) \to 500$. Die waagrechte Asymptote hat die Gleichung $y = 500$.
Die maximal mögliche Population beträgt G = 500.
90 % des Maximalbestandes entsprechen 450.

Bedingung: $f(t) = 450$ — $500 - 300\,e^{-0{,}036t} = 450$

Umformung: $e^{-0{,}036t} = \frac{1}{6}$

Logarithmieren: $-0{,}036t = \ln\left(\frac{1}{6}\right)$

$t \approx 49{,}77$

Nach ca. 50 Jahren sind 90 % des Maximalbestandes erreicht.

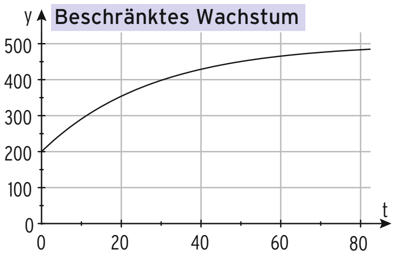
b) Die Änderung der Anzahl der Mäuse pro Jahr wird beschrieben durch die 1. Ableitung: $f'(t) = 10{,}8\,e^{-0{,}036t}$

$f'(2) = 10{,}05$

Die **momentane Änderungsrate** von f in $t = 2$ ist 10,0.
In $t = 2$ beträgt die Zunahme 10 Mäuse pro Jahr.

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(10) - f(2)}{8} = \frac{290{,}7 - 220{,}8}{8} = 8{,}7$$

Vom 2. bis zum 10. Jahr nimmt die Population um etwa 9 Mäuse pro Jahr zu.



c) Zu Beginn der Messung ist die Änderungsrate von f (Steigung des Schaubildes von f) am größten: $f'(0) = 10{,}8$

Die maximale Änderungsrate von f beträgt ca. 11 Mäuse pro Jahr.

Aufgaben

1 Das Newton'sche Abkühlungsgesetz $T(t) = T_U + (T_0 - T_U)\,e^{kt}$ beschreibt den Temperaturverlauf eines auf die Temperatur T_0 erwärmten Körpers, der z.B. durch eine Umgebung mit konstanter Temperatur T_U abgekühlt wird. $T(t)$ ist die momentane Temperatur (in °C) zur Zeit t (in min) mit $t \geq 0$.
Bei einer Umgebungstemperatur von 20 °C hat sich der Körper von anfangs 80 °C in den ersten 30 Minuten auf 24,7 °C abgekühlt. Bestimmen Sie k auf drei Dezimalen gerundet.
Zeigen Sie, dass es sich um einen Abkühlungsvorgang handelt.
Welche Bedeutung haben die Werte $T'(0)$ und $\lim\limits_{t \to \infty} T(t)$? Interpretieren Sie.
Nach welcher Zeit ist die Temperatur um 30 °C abgesunken?
Ab welchem Zeitpunkt nimmt die Temperatur des Körpers für dieses k in einer Minute um weniger als ein Grad ab?

2 Die Weltbevölkerung betrug 1975 etwa $4{,}1 \cdot 10^9$; 1993 lebten $5{,}5 \cdot 10^9$ Menschen auf der Erde. Das Wachstum für diesen Zeitraum kann näherungsweise beschrieben werden durch die Funktion f mit $f(t) = a\,e^{kt}$, t in Jahren, $t = 0 \mathrel{\hat{=}} 1975$, f(t) sei die Weltbevölkerung in Milliarden. Bestimmen Sie den Funktionsterm.
Um wie viel Prozent weicht eine Vorhersage für das Jahr 2014 vom tatsächlichen Wert $7{,}2 \cdot 10^9$ ab? Wie entwickelt sich die Weltbevölkerung nach diesem Modell?
Das Modell hat Schwächen. Erläutern Sie diese. Berechnen Sie die momentane Änderungsrate von f für das Jahr 2015. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

3 Ein Behälter hat ein Fassungsvermögen von 1200 Liter. Die enthaltene Flüssigkeitsmenge zum Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion f mit $f(t) = 1000 - 800\,e^{-0{,}01t}$ (t in Minuten, f(t) in Liter). Zu welchem Zeitpunkt ist der Behälter zur Hälfte gefüllt?
Zeigen Sie, dass die Flüssigkeitsmenge im Behälter stets zunimmt.
Ein Techniker behauptet, dass die Flüssigkeitmenge höchstens um 9 Liter pro Minute zunimmt. Prüfen Sie die Behauptung.

4 Zur Beurteilung der Wirksamkeit von Medikamenten misst man die Konzentration des Wirkstoffes im Blutplasma. Daraus ergeben sich Konsequenzen für die Dosierung und die Dosierungsintervalle. Einem Patient wird eine Wirkstoffdosis eines Medikamentes verabreicht. Die Tabelle zeigt die zeitliche Veränderung der Konzentration des Wirkstoffes im Blut.

t in Stunden	0	2	4	6	8
durchschnittliche Konzentration in µg/ml	0	33,8	24,9	13,7	6,7

Die Funktion f mit $f(t) = a\,t\,e^{bt}$; $t \geq 0$ beschreibt den Zusammenhang.
Überprüfen Sie, ob nach 2 Stunden die höchste Konzentration vorliegt.
Kontrollergebnis: $f(t) = 45{,}88\,t\,e^{-0{,}5t}$