Ott
Lengersdorf

Abitur 2023 | *Grundkurs GTR/CAS*

Aufgabensammlung zur zentralen Abiturprüfung
Mathematik am Berufskolleg – Berufliches Gymnasium –
Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung

Nordrhein-Westfalen

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Norbert Lengersdorf
Oberstudienrat am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

Umschlag: Kreis links: www. adpic.de
Kreis rechts: Robert Kneschke – Fotolia.com

* * * * *

14. Auflage 2022

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0478-14-DS

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält auf die neue Prüfungsordnung für das Berufskolleg mit gymnasialer Oberstufe in Nordrhein-Westfalen abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur 2023 an beruflichen Gymnasien im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung. **Alle Aufgaben sind entspechend den Abiturvorgaben 2023 ausgewählt worden.**
Die zentrale Abiturprüfung 2023 besteht aus zwei Teilen, einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil A und einem Prüfungsteil B mit Hilfsmittel (GTR/CAS).
Die Aufgaben für den Grundkurs sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten:
Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra.
Dem pandemiebedingten Distanzlernen wird Rechnung getragen durch eine Fokussierung auf inhaltliche Schwerpunkte für die schriftliche Abiturprüfung für das Abitur 2023.

Im Analysis-Teil werden als thematischer Schwerpunkt die ganzrationalen Funktionen und die Exponentialfunktionen und die Modellierung von berufsbezogenen Anwendungen mit Hilfe dieser Funktionstypen verlangt. Dabei handelt es sich um das Modell des Angebotsmonopols sowie die Absatz-/Umsatzentwicklung.
Die Stochastik behandelt fokussiert die bedingte Wahrscheinlichkeit, die Binomialverteilung mit Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung und den einseitigen Hypothesentest.
Die Lineare Algebra hat den Schwerpunkt Lineare Gleichungssysteme sowie mehrstufige Produktionsprozesse als ökonomische Anwendung.

Die Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.
Die Aufgaben sind als Übungsaufgaben zu verstehen, sowohl im Umfang als auch in den Fragestellungen. Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.

Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.
An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.
Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung 2023

Grundkurs

Aufgaben-teil	Aufgabentyp	Aufgaben-zahl	Dauer	Punkte
Teil A	Eine Aufgabe mit drei Teilaufgaben zur Analysis, Linearen Algebra und Stochastik; Mindestens 2 der Teilaufgaben mit Anwendungsbezug.	1	max. 45 Minuten	21
Teil B	Eine Aufgabe zur Analysis, eine Aufgabe zur Linearen Algebra und eine Aufgabe zur Stochastik mit Hilfsmitteln für GTR oder CAS.	3	min. 180 Minuten	84
	Darstellungsleistung Teil A und B			5
Summe			225 Minuten	110

Die Aufgaben sowohl im Teil A als auch im Teil B bestehen jeweils aus Teilaufgaben.

Organisation

Zu Beginn der Bearbeitungszeit erhält der Prüfling die beiden zu bearbeitenden Aufgabenteile A und B. Die zugelassenen Hilfsmittel (GTR, CAS, Formelsammlung) werden noch nicht ausgegeben.
Der Prüfling gibt individuell nach Bearbeitung, jedoch nach spätestens 45 Minuten der Bearbeitungszeit, den Aufgabenteil A und seine Ausarbeitungen zum Aufgabenteil A ab und erhält im Gegenzug Zugang zu den zugelassenen Hilfsmitteln.
SchülerIn bearbeitet alle Aufgaben.
Die Gesamtbearbeitungszeit für beide Prüfungsteile beträgt im Grundkurs 225 Minuten.
Für Prüflinge, die die Aufgaben und die Lösungen des Prüfungsteils A vorzeitig abgeben, verlängert sich entsprechend die Bearbeitungszeit für den Prüfungsteil B.
Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist in beiden Prüfungsteilen der Klausur zugelassen.

I Hilfsmittelfreier Teil A der Zentralen Abiturprüfung

Dieser Teil der Abiturprüfung enthält 3 Aufgaben entsprechend den Abiturvorgaben, davon mindestens zwei mit Anwendungsbezug.

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

Lösungen Seite 19

Aufgabe 1

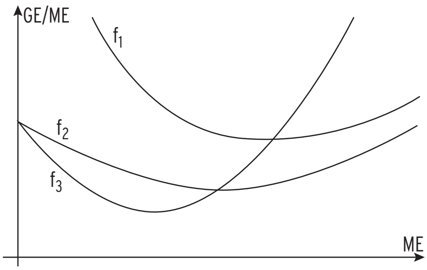
Punkte

Zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a, c, d > 0$, $b < 0$,

x in ME, K(x) in GE,

sind in der nebenstehenden Abbildung die Graphen der Grenzkostenfunktion, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion dargestellt.

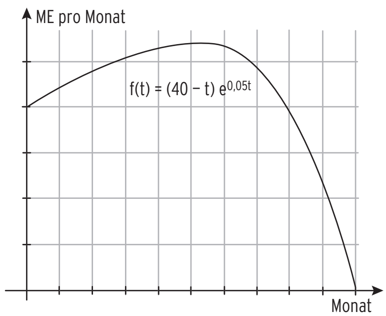


1.1 Ordnen Sie dem jeweiligen Graphen die entsprechende ökonomische Funktion begründet zu. 3

1.2 Beweisen Sie, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge bei $x = -\frac{b}{2a}$ liegt. 3

Aufgabe 2

Die monatlichen Absatzzahlen eines Produkts werden mit $f(t) = (40 - t)e^{0{,}05t}$, (t in Monaten, f(t) in ME/Monat) modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem das Produkt auf dem Markt abgesetzt werden kann. 2

2.2 Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei t = 20 liegt. 4

($f''(t) = -\frac{1}{400}\, t\, e^{0{,}05t}$ kann verwendet werden.)

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis **Lösungen Seite 20**

Lösungen Seite 20

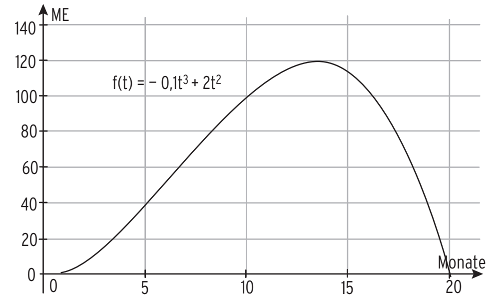
Aufgabe 3 **Punkte**

Die monatlichen Absatzzahlen eines neuartigen Produkts werden mit

$f(t) = -\frac{1}{10}t^3 + 2t^2$

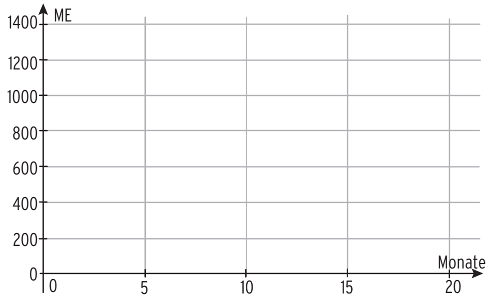
(t in Monaten, f(t) in ME/Monat)

modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



3.1 Bestimmen Sie die in den ersten 20 Monaten insgesamt abgesetzte Menge. 3

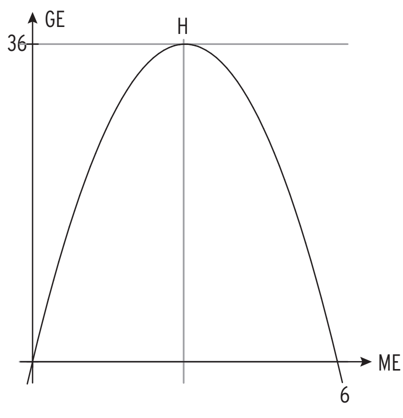
3.2 Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem den Graphen der Funktion, die den Gesamtabsatz in Abhängigkeit von der Zeit angibt. 3



Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm für die Erlösfunktion unter der Voraussetzung, dass es sich um eine ganzrationale Funktion 2. Grades handelt.

b) Ergänzen Sie den Graphen der 1. Ableitung in das Koordinatensystem. Beschreiben Sie den Verlauf des Ableitungsgraphen mathematisch und ökonomisch.



Hilfsmittelfreier Teil - Analysis **Lösungen Seite 21**

Lösungen Seite 21

Aufgabe 5

Punkte

Die folgende Tabelle gibt die Stückkosten k, die variablen Stückkosten k_v und die Grenzkosten K′ zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K an (x in ME; K(x) in GE):

x	1	2	3	4	5	6	7	8
k(x)	201,0	124,0	97,0	84,0	77,8	76,0	77,6	82,0
$k_v(x)$	57,0	52,0	49,0	48,0	49,0	52,0	57,0	64,0
K′(x)	51,0	44,0	43,0	48,0	59,0	76,0	99,0	128,0

Beurteilen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen allein unter Zuhilfenahme der Tabellenwerte:

1.1 Das Betriebsminimum liegt bei 4 ME. 2

1.2 Die Kosten steigen zwischen 0 und 4 ME degressiv. 2

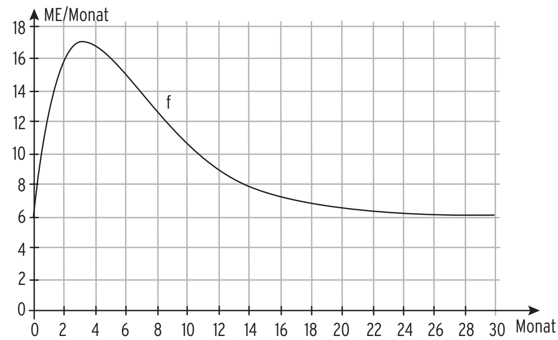
1.3 Die Fixkosten belaufen sich auf 144 GE. 2

Aufgabe 6

Die Absatzentwicklung eines Produktes wird durch die folgende Funktion beschrieben:

$f(t) = 9t \cdot e^{-0{,}3t} + 6$

dabei steht $t > 0$ für die Monate und f(t) für den Absatz in ME pro Monat.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die monatlichen Absatzzahlen maximal werden (notwendiges Kriterium genügt). 4

2.2 Nehmen Sie mit Hilfe des Graphen Stellung zu der folgenden Aussage: In der zweiten Hälfte des ersten Jahres liegt der Zeitpunkt des maximalen Absatzrückganges. 2

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis **Lösungen Seite 22**

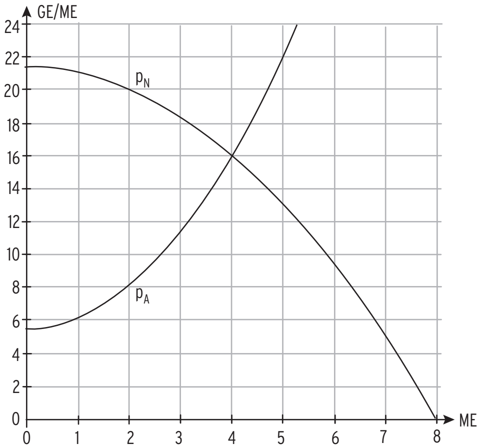
Aufgabe 7 **Punkte**

Gegeben sind folgende Angebotsfunktion p_A und Nachfragefunktion p_N:

$p_A(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3}$

$p_N(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3}$

x in ME, p(x) in GE/ME

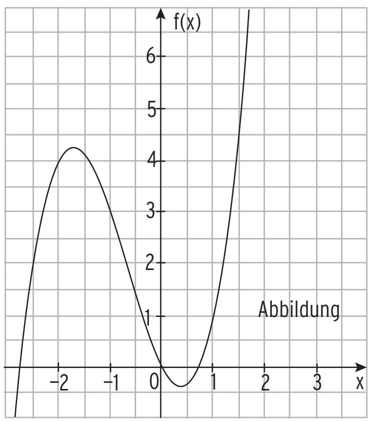


7.1 Berechnen Sie das Marktgleichgewicht. 4

7.2 Begründen Sie anhand der Graphen, dass die Konsumentenrente geringer ist als die Produzentenrente. 2

Aufgabe 8

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x$. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f.



8.1 Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion f.

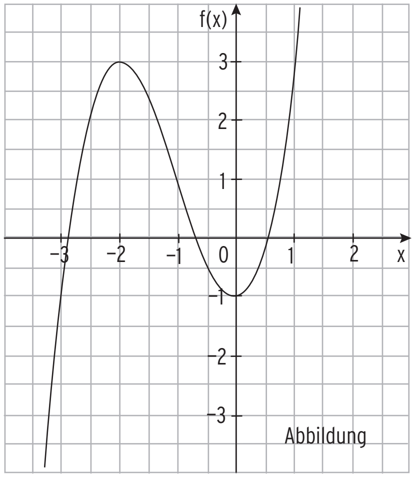
8.2 Entscheiden Sie begründet mit Hilfe einer Zeichnung in der Abbildung, ob die Gerade g mit $y = \frac{1}{2}x + 5$ eine Tangente am Graphen von f im Punkt P (− 2 | 4) ist. 6

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis **Lösungen Seite 23**

Aufgabe 9 **Punkte**

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$. Die Koordinaten des lokalen Hochpunktes und des lokalen Tiefpunktes sind ganzzahlig.

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f.

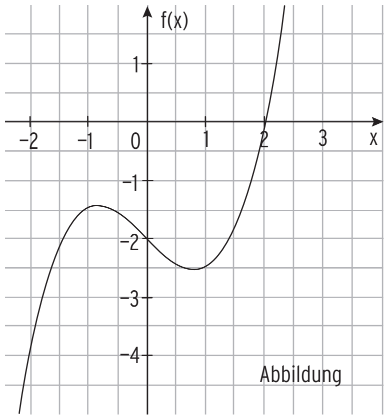


(1) Entscheiden Sie begründet, ob der Graph der Ableitungsfunktion f' eine nach oben oder nach unten geöffnete Parabel ist.

(2) Geben Sie alle Werte für den Parameter c an, so dass die Funktion g_c mit der Gleichung $g_c(x) = f(x) + c$ genau zwei Nullstellen besitzt. Begründen Sie Ihre Angabe. 6

Aufgabe 10

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x - 2$. Der Graph ist in der Abbildung dargestellt.



(1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die in der Zeichnung erkennbare Nullstelle tatsächlich eine Nullstelle ist.

(2) Gegeben ist die Funktion g_a mit der Gleichung $g_a(x) = f(x + a)$; $a \geq 0$. Geben Sie an, wie sich der Graph von g_a verändert, wenn man für a immer größere Zahlen einsetzt.

Geben Sie außerdem einen Wert für a an, so dass die Funktion g_a die Nullstelle $x = -1$ besitzt. 6

Hilfsmittelfreier Teil - Lineare Algebra Lösungen

Aufgabe 14 **Aufgaben Seite 36**

a) Es gilt der Zusammenhang (RE) = (RZ) · (ZE)

Man berechnet den Teil der Rohstoff-Endprodukt-Matrix, der R_3 betrifft:

$$(6 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (40 \quad 28 \quad 52) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 120$$

Man benötigt 120 ME von R_3, um jeweils eine ME von E_1, E_2 und E_3 herzustellen.

b) Ist x die Anzahl der ME von Z_1, so werden $6 \cdot x + 2 \cdot 1{,}5 \cdot x$ ME von R_3 benötigt:

$6 \cdot x + 2 \cdot 1{,}5 \cdot x = 54$ für $x = 6$

Anzahl der ME von Z_2: $1{,}5 \cdot 6 = 9$

Aufgabe 15

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a + 4c & 7b + 4d \\ 2a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Vergleich ergibt a = 0; b = 0,5

Einsetzen ergibt: $c = \frac{1}{4}$ und aus $7 \cdot 0{,}5 + 4d = 0$: $d = -\frac{7}{8}$

Möglichkeit 2: B ist die Inverse von A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -8 & -2 & 7 \end{array}\right) \qquad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

b) Die Anzahl der Spalten von C ist 2, die Anzahl der Zeilen 1 oder mindestens 3.

Aufgabe 16 **Aufgaben Seite 37**

a) $M_{BE} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 45 \\ 30 \end{pmatrix}$ Für den Auftrag werden 40 Stück von B1, 45 Stück von B2 und 30 Stück von B3 benötigt.

b) Mit x: Stückzahl der benötigten E1 ergibt sich $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 20 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 80 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix}$

Multiplikation ergibt: $x + 40 \leq 80 \qquad 3x + 20 \leq 80 \qquad 40 \leq 40$

Alle Ungleichungen sind erfüllt für $x \leq 20$.

Es können maximal 20 Endprodukte E1 hergestellt werden.

Aufgabe 17

a) Materialkosten pro Rasentrimmer T1, T2, T3: $(8 \;\; 11 \;\; 15) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (75 \;\; 49 \;\; 94)$

Die Materialkosten für einen Rasentrimmer T1 betragen 75 GE, für einen T2 sind es 49 GE und für einen T3 betragen sie 94 GE.

b) Es muss gelten: $(1 \;\; 1 \;\; 3) \cdot \begin{pmatrix} 3x \\ 5x \\ 4x \end{pmatrix} = 20x \leq 8000 \quad \Leftrightarrow x \leq 400$

Es können also maximal 1200 Rasentrimmer T1, 2000 Rasentrimmer T2 und 1600 Rasentrimmer T3 hergestellt werden.

Hilfsmittelfreier Teil - Stochastik

Lösungen Seite 51

Aufgabe 1

Punkte

Bei der Produktion eines Elektrobauteils kommt es bei durchschnittlich 20 % der Bauteile zu statischen Aufladungen, die Probleme beim weiteren Verarbeitungsprozess bewirken können.

X ist die binomialverteilte Zufallsgröße, die die Anzahl problematischer Elektrobauteile bei einer Tagesproduktion von 50 Bauteilen angibt.

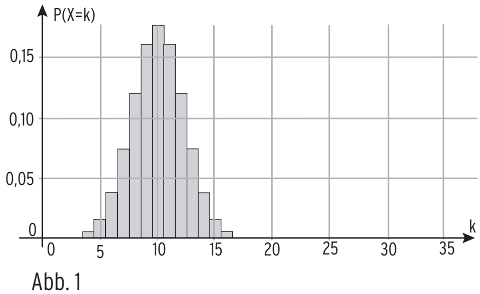


Abb. 1

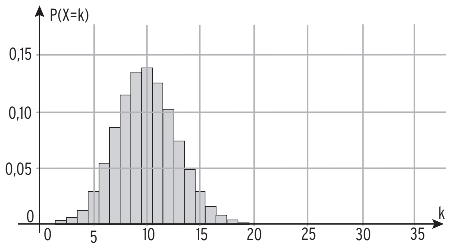


Abb. 2

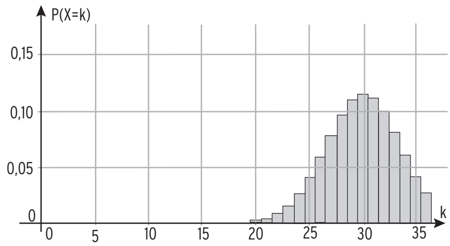


Abb. 3

1.1 Prüfen Sie, welche der obigen Abbildungen die zu X gehörige Verteilung ist. 2

1.2 Bestimmen Sie mit der von Ihnen ausgewählten Graphik näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl statisch aufgeladener Elektroteile um weniger als zwei vom Erwartungswert E(X) abweicht. 4

Aufgabe 2

Eine Firma fertigt Liegestühle in zwei verschiedenen Städten. In der Stadt A werden $\frac{1}{5}$ ihrer Waren hergestellt und der Rest in der Stadt B.
Leider passieren auch Produktionsfehler. So sind $\frac{1}{10}$ der Liegestühle aus A und $\frac{1}{100}$ der Stühle aus B defekt.

2.1 Ein Prüfer wählt aus der Gesamtproduktion zufällig einen Stuhl aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Stuhl defekt ist. 3

2.2 Die Firmenchefin wählt aus der Gesamtproduktion einen offensichtlich defekten Stuhl aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Stuhl in der Stadt A hergestellt worden ist. 3

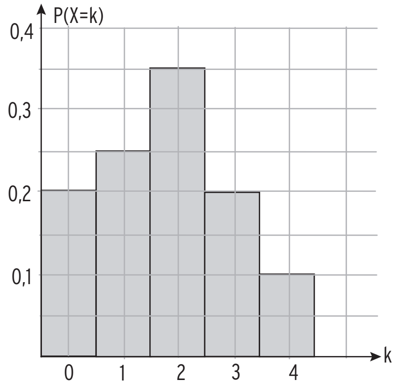
Hilfsmittelfreier Teil - Stochastik

Lösungen Seite 51

Aufgabe 3

Punkte

Ein Unternehmen macht mit seinem Produkt einen Gewinn zwischen 0 und 4 Geldeinheiten. Es liegen unterschiedliche Angaben zu den Gewinnwahrscheinlichkeiten vor.



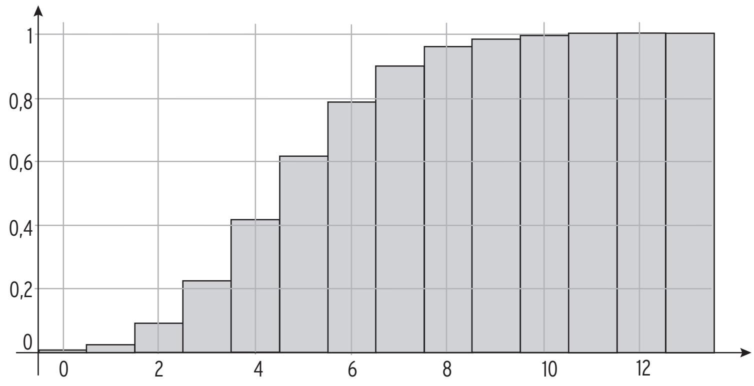
3.1 Erklären Sie, warum der obige Graph nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer ganzzahligen Zufallsgröße beschreiben kann. 2

3.2 Die ZufallsgrößeX gibt den Gewinn, den das Unternehmen mit seinem Produkt macht, an. Die obige Graphik stellt für einen Gewinn von 0 GE, 3 GE und 4 GE die Wahrscheinlichkeiten richtig dar. Es ist bekannt, dass der erwartete Gewinn bei 1,7 GE liegt. Ermitteln Sie die korrekten Wahrscheinlichkeiten für $X = 1$ und $X = 2$. 4

Aufgabe 4

Lösungen Seite 52

25 % der Mitarbeiter/-innen eines Großunternehmens klagen über eine zu hohe Arbeitsbelastung. Das Balkendiagramm gibt die kumulierte Binomialverteilung für eine Stichprobe von $n = 20$ an.



4.1 Geben Sie allein unter Zuhilfenahme des Diagramms die ungefähren Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse an:

A: Genau 6 Mitarbeiter/-innen sind unzufrieden.

B: Weniger als 8 Mitarbeiter/-innen fühlen sich überlastet.

C: Mindestens 15 Mitarbeiter/-innen sind zufrieden. 3

Hilfsmittelfreier Teil - Stochastik

Aufgabe 4 Fortsetzung **Punkte**

4.2 Nach Einführung eines neuen Arbeitszeitmodells beklagen nur noch zwei von 20 Personen die Arbeitsbelastung. Beurteilen Sie mit Hilfe des Diagramms, ob mit 90 % Sicherheitswahrscheinlichkeit von einer geringeren Unzufriedenheit als 25 % ausgegangen werden kann. 3

Aufgabe 5 **Lösungen Seite 52**

Eine Textilfabrik stellt unter anderem weiße T-Shirts her. Von diesen werden 50 % gefärbt und 50 % bestickt. Beim Färben sind 10 % der T-Shirts nicht farbecht, 20 % der anderen Hälfte sind fehlerhaft bestickt.

5.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar. 3

5.2 Die Herstellungskosten für alle T-Shirts betragen im Mittel 0,2 GE pro Stück. Die korrekt gefärbten T-Shirts werden zu einem Preis von 2 GE pro Stück, die fehlerhaft gefärbten T-Shirts werden als 2. Wahl zu einem Preis von 1 GE pro Stück verkauft. Die korrekt bestickten T-Shirts erzielen einen Erlös von 2,5 GE pro Stück, wohingegen die fehlerhaft bestickten T-Shirts zusätzliche Kosten in Höhe von 1 GE pro Stück verursachen. Berechnen Sie den durch schnittlich zu erwartenden Stückdeckungsbeitrag. 3

Aufgabe 6

Eine verbeulte Münze wird mehrfach geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf „Wappen“ fällt, beträgt p.

6.1 Geben Sie jeweils einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse A und B an: 3

A: Bei fünf Würfen fällt genau dreimal „Wappen“.

B: Bei 5 Würfen fällt genau dreimal „Wappen“, darunter bei den ersten beiden Würfen zweimal.

6.2 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 3 Würfen dreimal „Wappen“ fällt, ist 0,216. Untersuchen Sie, ob das Ergebnis „Wappen“ wahrscheinlicher ist als das Ergebnis „Zahl“. 2

Hilfsmittelfreier Teil - Stochastik

Lösungen Seite 52

Aufgabe 7 **Punkte**

Bei der Herstellung eines Produktes sind durchschnittlich 20 % der Teile fehlerhaft.

Zu Testzwecken werden der laufenden Produktion einige Teile entnommen.

7.1 Es sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der entnommenen Teile angibt, die fehlerhaft sind. Begründen Sie, warum man die Zufallsvariable X als binomialverteilt annehmen kann. 3

7.2 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die ersten beiden entnommenen Teile nicht fehlerhaft sind. 1

7.3 Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis A und ein Ereignis B an, so dass gilt:

$P(A) = 0{,}2^{10}$ $\quad$ $P(B) = \binom{50}{40} \cdot 0{,}2^{10} \cdot 0{,}8^{40}$ 2

Aufgabe 8

Lösungen Seite 53

Von den 100 Schülerinnen und Schülern einer Jahrgangsstufe wählt die eine Hälfte als Naturwissenschaft Physik, die andere Hälfte Biologie.

Die Jahrgangsstufe umfasst insgesamt 60 Mädchen. 30 % sind Jungen und haben Physik gewählt.

8.1 Stellen Sie den gegebenen Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar. 3

8.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten,

- dass eine zufällig ausgewählte Schülerin Physik gewählt hat,
- dass ein zufällig ausgewählter Teilnehmer des Biologie-Kurses männlich ist. 3

Aufgabe 9

Die Zürla-Kohlin GmbH bezieht von einem Zulieferer seit Jahren selbstsichernde Muttern in großen Mengen, bei denen zwei Fehlerarten auftreten: Falsche Form und fehlerhaftes Gewinde.

Insgesamt sind nur 90 % aller Muttern fehlerfrei, d. h. sie haben weder eine falsche Form noch ein fehlerhaftes Gewinde. 5 % der Muttern haben eine falsche Form. 40 % der Muttern mit falscher Form haben auch ein fehlerhaftes Gewinde.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Mutter mit fehlerhaftem Gewinde auch ein falsche Form? 5

Hilfsmittelfreier Teil - Stochastik **Lösungen Seite 54**

Aufgabe 10 **Punkte**

Ein Supermarkt verwendet für die Bearbeitung zurückgegebener Pfandflaschen eine Maschine. Diese soll einwandfreie Flaschen von deformierten Flaschen unterscheiden. Zurückgegebene Flaschen werden entweder von der Maschine abgewiesen oder angenommen. Dabei unterlaufen dem Gerät auch Fehler: Es werden manchmal auch einwandfreie Flasche abgewiesen oder deformierte Flasche angenommen. Eine Übersicht über Wahrscheinlichkeiten in diesem Zusammenhang liefert die noch unvollständige Vierfeldertafel (Tabelle).

	Flasche angenommen	Flasche abgewiesen	
Flasche einwandfrei	0,9405	0,0095	0,95
Flasche deformiert	0,0015	0,0485	0,05

10.1 In den beiden doppelt umrandeten Kästchen der letzten Zeile fehlen zwei Wahrscheinlichkeiten in dem vorliegenden Sachzusammenhang.
Berechnen Sie beide Wahrscheinlichkeiten und geben Sie diese in den Kästchen an.

10.2 Geben Sie die Bedeutung der beiden Wahrscheinlichkeiten aus 8.1 in dem vorliegenden Sachzusammenhang an.

10.3 Eine Flasche wird abgewiesen. Ermitteln Sie einen Term, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass die Flasche in Ordnung ist.

6

Hinweis: Die konkrete Berechnung wird nicht verlangt.

Aufgabe 11

Erfahrungsgemäß sind 4 % der produzierten Smartphones eines Herstellers defekt. Ein Lieferant erhält ein Paket mit 50 Smartphones des Herstellers.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für höchstens ein defektes Smartphone?
Geben Sie einen Term an. 3

Hilfsmittelfreier Teil - Stochastik

Lösungen Seite 54

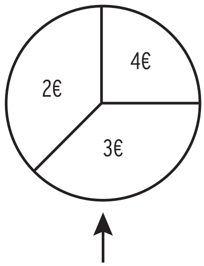
Aufgabe 12

a) Ein Fußballspieler verwandelt erfahrungsgemäß 80 % aller Strafstöße.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er von vier Strafstößen
- nur den letzten?
- mindestens einen?

b) Für ein Ereignis C gilt: $P(C) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}8^b \cdot a^2$
Geben Sie geeignete Werte für a, b und k an.
Beschreiben Sie das Ereignis C in Worten.

Aufgabe 13

Bei einem Glücksspiel wird das abgebildete Glücksrad benutzt. Als Einsatz bezahlt man 3 €. Das Glücksrad wird einmal gedreht. Man erhält den Betrag ausbezahlt, dessen Sektor über dem Pfeil zu stehen kommt.
Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Gewinn.



Aufgabe 14

Lösungen Seite 55

Eine Urne enthält 5 rote, 3 weiße und 2 gelbe Kugeln.

a) Es werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man keine gelbe Kugel?

b) Nun werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden Kugeln die gleiche Farbe?

Aufgabe 15

Bei einer Lotterie führen 5 % der Lose zu einem Gewinn. Nils kauft 14 Lose.
Geben Sie jeweils eine Aufgabenstellung an, deren Lösung auf die folgende Weise berechnet wird.

a) $P(A) = \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

b) $P(B) = \binom{14}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{12} + \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

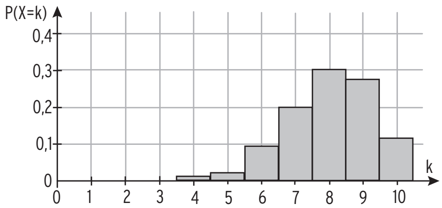
c) $P(C) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{14}$

d) $14 \cdot 0{,}05$

Hilfsmittelfreier Teil - Stochastik **Lösungen Seite 55**

Aufgabe 16 **Punkte**

Ein Basketballspieler wirft 10 Freiwürfe. Die Anzahl seiner Treffer wird mit k bezeichnet und durch die Zufallsgröße X beschrieben. Die Zufallsgröße X wird als binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,8 angenommen. In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

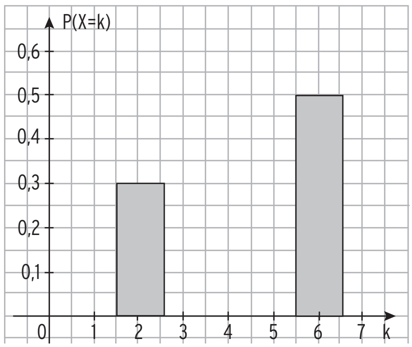


a) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Basketballspieler mindestens 8-maltrifft. 2

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, keinen Treffer zu erzielen, kleiner als $\frac{1}{1\,000\,000}$ ist. 3

Aufgabe 17

Für ein Zufallsexperiment wird eine Zufallsgröße X festgelegt, welche die drei Werte 2, 4 und 6 annehmen kann. In der Abb. ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X unvollständig dargestellt.



a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit P(X = 4) an. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

b) Das Zufallsexperiment wird zweimal unter gleichen Bedingungen durchgeführt. Dabei wird jeweils der Wert der Zufallsgröße notiert.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Produkt dieser beiden Werte den Wert 12 ergibt. 6

Hilfsmittelfreier Teil - Stochastik

Lösungen Seite 56

Aufgabe 18

Punkte

In einer Urne befinden sich zu Beginn eines Zufallsexperiments drei schwarze Kugeln (S) und zwei weiße Kugeln (W), siehe Abbildung 1. Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Zu dem Zufallsexperiment wurde das Baumdiagramm aus Abbildung 2 erstellt.

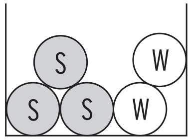


Abbildung 1

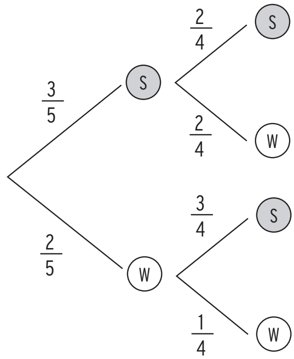


Abbildung 2

(1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dem Zufallsexperiment mindestens eine schwarze Kugel gezogen wird. 3

(2) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X. 3

Aufgabe 19

In den Urnen U1 und U2 befinden sich Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden:

U1 : 6 rote und 4 blaue Kugeln

U2 : 1 rote und 4 blaue Kugeln

1.1 Aus der Urne U1 werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben. 2

1.2 Es wird eine der beiden Urnen zufällig ausgewählt. Aus dieser wird eine Kugel zufällig gezogen. Die gezogene Kugel ist rot. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kugel aus der Urne U1 stammt. 3

Aufgabe 20

Von acht Karten sind zwei mit „1“, zwei mit „2“, zwei mit „3“ und zwei mit „4“ beschriftet.

Die Karten werden gemischt und nacheinander verdeckt abgelegt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden zuerst abgelegten Karten mit „1“ beschriftet sind. 2

b) Die Karten werden nacheinander aufgedeckt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass spätestens die dritte aufgedeckte Karte mit einer geraden Zahl beschriftet ist. 3

Hilfsmittelfreier Teil - Stochastik Lösungen

Aufgabe 1 **Aufgaben Seite 43**

1.1 Da $E(X) = n \cdot p = 10$ ($50 \cdot 0{,}2 = 10$) ganzzahlig ist, muss der maximale Wert $P(X = 10)$ sein.

Abbildung 3 erfüllt dies nicht. Nur für $p = 0{,}5$ ist die Binomialverteilung symmetrisch, so dass für $p = 0{,}2$ nur Abbildung 2 möglich ist.

1.2 Da $E(X) = n \cdot p = 10$, sind die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von 9, 10 oder 11 statisch aufgeladenen Elektrobauteilen aufzusummieren.

Aus der Abb. 2 liest man

$0{,}14 + 0{,}14 + 0{,}13 = 0{,}41$ ab, also ca. 40 % Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 2

2.1 Wahrscheinlichkeit, dass der Stuhl defekt ist.

$$P(\text{defekt}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{50} + \frac{4}{500} = \frac{7}{250}$$

Die Wahrscheinlichkeit einen defekten Stuhl ausgewählt zu haben beträgt $\frac{7}{250}$.

2.2 Wahrscheinlichkeit, dass der Stuhl in der Stadt A hergestellt worden ist.

$$P_d(A) = \frac{P(A \cap d)}{P(d)} = \frac{\frac{1}{50}}{\frac{7}{250}} = \frac{5}{7}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der defekte Stuhl aus A kommt, beträgt $\frac{5}{7}$.

Aufgabe 3 **Aufgaben Seite 44**

3.1 Die Summe der Wahrscheinlichkeiten beträgt

$0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}35 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1{,}1 > 1$.

3.2 Mit $a = P(X = 1)$ und $b = P(X = 2)$ ergibt sich

Summe Einzelwahrscheinlichkeiten: I. $0{,}2 + a + b + 0{,}2 + 0{,}1 = 1$

Erwartungswert: II. $a + 2b + 0{,}6 + 0{,}4 = 1{,}7$

Vereinfachung: I. $a + b = 0{,}5$

II. $a + 2b = 0{,}7$

II. − I. ergibt $b = 0{,}2$

einsetzen ergibt $a = 0{,}3$

Hilfsmittelfreier Teil - Stochastik Lösungen

Aufgabe 4 **Aufgaben Seite 44**

4.1 X gibt die Anzahl unzufriedener Mitarbeiter/-innen an.

A: $P(X = 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 5) = 0{,}78 - 0{,}62 = 0{,}16$

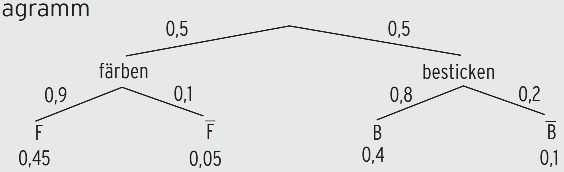
B: $P(X < 8) \approx 0{,}9$

C: $P(X \leq 5) \approx 0{,}62$

4.2 Da die Wahrscheinlichkeit maximal 2 unzufriedene Mitarbeiter/-innen bei $p = 0{,}25$ zu haben mit $P(X \leq 2) \approx 0{,}1$ ungefähr 10 % beträgt, kann mit 90 % Sicherheitswahrscheinlichkeit davon ausgegangen werden, dass die Zufriedenheit gesteigert wurde.

Aufgabe 5 **Aufgaben Seite 45**

5.1 Baumdiagramm



F = Färbung ok, $\overline{F}$ = Färbung fehlerhaft, B = Korrekt bestickt, $\overline{B}$ = fehlerhaft bestickt

5.2 Durchschnittlich zu erwartender Stückdeckungsbeitrag

Sei X die Zufallsgröße, die den Stückdeckungsbeitrag beschreibt.

$E(X) = 2 \cdot 0{,}45 + 1 \cdot 0{,}05 + 2{,}5 \cdot 0{,}4 - 1 \cdot 0{,}1 - 0{,}2 = 1{,}65$

Der zu erwartende Stückdeckungsbeitrag beträgt 1,65 GE.

Aufgabe 6

6.1 Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: $\binom{5}{3} p^3 \cdot (1-p)^2$

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B: $p^2 \cdot \binom{3}{1} p \cdot (1-p)^2$

6.2 Das Ergebnis "Wappen" ist wahrscheinlicher, da gilt: $0{,}216 > 0{,}5^3 = 0{,}125$ oder $\sqrt[3]{0{,}216} = 0{,}6$.

Aufgabe 7 **Aufgaben Seite 46**

7.1 Die Zufallsvariable ist binomialverteilt:

Für jedes Teil gibt es nur zwei Möglichkeiten, nämlich entweder defekt oder nicht defekt. Es wird zwar ohne Zurücklegen gezogen, aber da die Grundgesamtheit sehr groß und die Stichprobe verhältnismäßig klein ist, bleibt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Zug gleich.

Hilfsmittelfreier Teil - Stochastik Lösungen

Aufgabe 7 Fortsetzung **Aufgaben Seite 46**

7.2 $P(E) = 0{,}8^2 = 0{,}64$

7.3 A: die ersten zehn Teile sind fehlerhaft.

B: es werden 50 Teile gezogen, davon sind genau 10 fehlerhaft. $\left(\binom{50}{40} = \binom{50}{10}\right)$

Aufgabe 8

8.1 Es ergibt sich die Vierfeldertafel:

	weiblich	männlich	
Physik	0,2	0,3	0,5
Biologie	0,4	0,1	0,5
	0,6	0,4	1

8.2 Mit dem Satz von Bayes ergibt sich:

$P_w(Ph) = \frac{P(Ph \cap w)}{P(w)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}$

$P_{Bio}(m) = \frac{P(Bio \cap m)}{P(Bio)} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = \frac{1}{5}$

Alternativ können die gesuchten Wahrscheinlichkeiten aus einem Baumdiagramm entnommen werden.

Aufgabe 9

FF: falsche Form; RF: richtige Form

FG: fehlerhaftes Gewinde; RG: fehlerfreies Gewinde

Gegeben: $P(FF) = 0{,}05$; $P_{FF}(FG) = 0{,}4$; $P(RF \cap RG) = 0{,}90$

Gesucht: $P_{FG}(FF)$

$P_{FF}(FG) = 0{,}4$ $\quad P_{FF}(FG) = \frac{P(FF \cap FG)}{P(FF)} = 0{,}4$

$P(FF \cap FG) = 0{,}05 \cdot 0{,}4 = 0{,}02$

Aufstellen einer Vierfeldertafel:

Nach Aufgabe: 0,90; 0,05

40 % von 0,05 $\hat{=}$ 0,02

	FF	RF	gesamt
FG	0,02	0,05	0,07
RG	0,03	0,90	0,93
gesamt	0,05	0,95	1

$P_{FG}(FF) = \frac{P(FF \cap FG)}{P(FG)} = \frac{0{,}02}{0{,}07} = \frac{2}{7}$

Hilfsmittelfreier Teil - Stochastik Lösungen

Aufgabe 10 **Aufgaben Seite 47**

10.1 $0{,}9405 + 0{,}0015 = 0{,}942$ und $0{,}0095 + 0{,}0485 = 0{,}058$.

	Flasche angenommen	Flasche abgewiesen	
Flasche einwandfrei	0,9405	0,0095	0,95
Flasche deformiert	0,0015	0,0485	0,05
	0,9420	0,058	1

10.2 Mit einer Wahrscheinlichkeit von 94,2 % wird eine Flasche von der Maschine angenommen und mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,8 % wird eine Flasche von der Maschine abgewiesen.

10.3 Man teilt den Anteil der abgewiesenen einwandfreien Flaschen durch den Anteil aller abgewiesenen Flaschen. Das ergibt: $\frac{0{,}0095}{0{,}0095 + 0{,}0485}$.

Aufgabe 11

X: Anzahl der defekten Smartphones unter 50 Smartphones;

X ist $B_{50;0,04}$- verteilt

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$= \binom{50}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}04^1 \cdot 0{,}96^{49}$$

Aufgabe 12 **Aufgaben Seite 48**

a) P(nur den letzten) $= 0{,}2^3 \cdot 0{,}8 = \frac{4}{625} = 0{,}0064$

P(mindestens einen) $= 1 - P(\text{keinen}) = 1 - 0{,}2^4 = 0{,}9984$

b) $P(C) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}8^b \cdot a^2$ für $k = 8$; $a = 0{,}2$; $b = 8$

Ereignis C: Der Spieler hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 80 % und verwandelt 8 von 10 Strafstößen.

Aufgabe 13

x_i	2 €	3 €	4 €
Gewinn	- 1 €	0 €	1 €
$P(X = x_i)$	0,375	0,375	0,25

Erwartungswert für den Gewinn: $E(X) = -1 \cdot 0{,}375 + 1 \cdot 0{,}25 = -0{,}125$

Hilfsmittelfreier Teil - Stochastik Lösungen

Aufgabe 14 **Aufgaben Seite 48**

a) 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

$P(\text{keine gelbe Kugel}) = 0{,}8^3 = \frac{64}{125} = 0{,}512$

b) 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen

$P(\text{gleiche Farbe}) = P(rr) + P(ww) + P(gg) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{14}{45} \approx 0{,}31$

Aufgabe 15

a) $P(A) = \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$ A: Nils zieht genau 3 Gewinnlose.

b) $P(B) = \binom{14}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{12} + \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

B: Nils zieht 2 oder 3 Gewinnlose.

c) $P(C) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{14}$ C: Nils zieht mindestens ein Gewinnlos.

d) $14 \cdot 0{,}05$ Durchschnittlich zu erwartende Anzahl von Gewinnlosen unter 14 Losen

Aufgabe 16 **Aufgaben Seite 49**

X ist binomialverteilt mit n = 10; p = 0,8

a) $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

Ablesen ergibt den Näherungswert: $0{,}30 + 0{,}27 + 0{,}11 = 0{,}68$

b) $P(X = 0) = 0{,}2^{10}$

Abschätzung: $0{,}2^{10} = \left(\frac{2}{10}\right)^{10} = \frac{2^{10}}{10^{10}} = \frac{1024}{10\,000\,000\,000} = \frac{1{,}024}{10\,000\,000}$

$0{,}2^{10} = \frac{0{,}1024}{1\,000\,000} < \frac{1}{1\,000\,000}$

Aufgabe 17

a) $P(X = 4) = 1 - 0{,}3 - 0{,}5 = 0{,}2$

Erwartungswert von X: $E(X) = 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}5 = 4{,}4$

b) Das Produkt 12 kann hier auf zwei Möglichkeiten erreicht werden: 2;6 und 6;2.

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit:

$P(12) = 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}30$

Hilfsmittelfreier Teil - Stochastik Lösungen

Aufgabe 18 Aufgaben Seite 50

(1) P(„mindestens eine schwarze Kugel“) = 1 − P(„keine schwarze Kugel“)

P(„mindestens eine schwarze Kugel“) $= 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der mindestens eine schwarze Kugel gezogen wird, beträgt 90%.

(2) Anhand der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X kann der Erwartungswert $\mu = E(X)$ berechnet werden:

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}1$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = 0{,}6$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0{,}3$

$\mu = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 1{,}2$

Der Erwartungswert μ der Zufallsgröße X beträgt 1,2.

Aufgabe 19

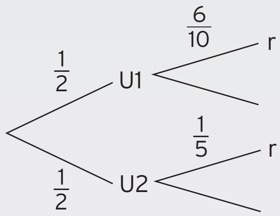
1.1 P („beide Kugeln haben die gleiche Farbe“) = P(rr) + P(bb)

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{15}$$

1.2 Mithilfe eines Baumdiagramms erhält man:

$$P(E_2) = \frac{P(U1 \wedge r)}{P(r)}$$

$$P(E_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{3}{4}$$



Aufgabe 20

a) Ziehen ohne Zurücklegen; $P = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7}$

b) Berechnung über das Gegenereignis: keine der drei aufgedeckten Karten ist mit einer geraden Zahl beschriftet; Ziehen ohne Zurücklegen

$P = 1 - \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}$

II Teil B der Abiturprüfung mit Hilfsmittel - GTR/CAS

Stichwortverzeichnis

Sie finden folgende Themen u. a. in der angegebenen Aufgabe zur Abiturvorbereitung im Aufgabenteil II bis Aufgabenteil IV ab Seite 57

1 Analysis

Mathematische Formeln Wirtschaft und Verwaltung

Gesamtkostenfunktion K mit	$K(x) = K_v(x) + K_f$
Ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit	$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ a > 0;\ x \geq 0$
K wächst degressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) < 0$
K wächst progressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) > 0$
Funktion der variablen Gesamtkosten	$K_v(x)$
Funktion der gesamten Stückkosten k	$k(x) = \frac{K(x)}{x}$
Funktion der variablen Stückkosten k_v (k_{var})	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
Grenzkostenfunktion	$K'(x)$ Kostenzuwachs
Grenzstückkostenfunktion	$k'(x)$
Betriebsoptimum (Minimalstelle von k)	x_{BO}
Langfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BO})$
Betriebsminimum (Minimalstelle von k_v)	x_{BM}
kurzfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BM})$
Nachfragefunktion (Preis-Absatz-Funktion)	$p_N(x)$
Angebotsfunktion	$p_A(x)$
Gleichgewichtsmenge (Schnittstelle von p_N und p_A)	x_G
Gleichgewichtspreis	$p_G = p_N(x_G) = p_A(x_G)$
Marktgleichgewicht MG	$MG(x_G \mid p_G)$
Konsumentenrente	$KR = \int_0^{x_G} p_N(x)dx - x_G \cdot p_G$
Produzentenrente	$PR = x_G \cdot p_G - \int_0^{x_G} p_A(x)\,dx$
Erlösfunktion	$E(x) = p \cdot x$; p Preis pro ME $E(x) = p_N(x) \cdot x$ $p_N(x)$; Preis abhängig von x
Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$
Grenzgewinnfunktion	$G'(x)$
Gewinnschwelle	x_{GS} 1. positive Nullstelle von G
Gewinngrenze	x_{GG} 2. positive Nullstelle von G
gewinnmaximale Ausbringungsmenge Maximalstelle von G(x)	x_{max}
Cournot'scher Punkt	$C(x_{max} \mid p_N(x_{max}))$
Stückdeckungsbeitrag d = dB	$dB(x) = p - k_v(x)$
Deckungsbeitrag D = DB	$DB(x) = G(x) + K_f = E(x) - K_v(x)$

Bezeichnungen: $\mathbb{R}^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $\mathbb{R}_+^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^{>0}$

$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\} = \mathbb{R}^{\geq 0}$

Produktregel der Ableitung: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Aufgaben zur Abiturvorbereitung- Analysis

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösung Seite 76**

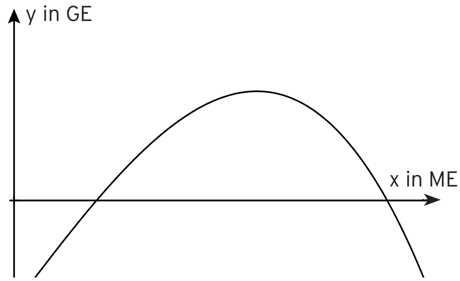
Das Unternehmen Bio-Kosmetic führt eine Pflegeserie für Frauen ein und tritt damit in Konkurrenz zu weiteren Anbietern.

1 Das Unternehmen geht von einem ertragsgesetzlichen Kostenverlauf aus.
die Grenzkostenfunktion K′ lautet: $K'(x) = 3{,}75x^2 - 40x + 120$.
Die Fixkosten betragen 250 GE.
Leiten Sie die Kostenfunktion her.

2 Die Marketingabteilung hat in einer Marktforschung festgestellt, dass bei Produktion und Verkauf von 4 ME Erlöse und Kosten übereinstimmen.
Bestimmen Sie den Preis pro ME und die Erlösfunktion.

3 Das Unternehmen geht von folgender Erlösfunktion aus: $E(x) = 122{,}5x$
Zeigen Sie, dass die Gewinnfunktion G der neuen Pflegeserie lautet:
$G(x) = -1{,}25x^3 + 20x^2 + 2{,}5x - 250$
Berechnen Sie, in welchem Produktionsintervall das Unternehmen mit Gewinn produzieren kann.
Ermitteln Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den maximalen Gewinn.

4 Begründen Sie anhand der dargestellten Gewinnfunktion, welche Auswirkungen eine Veränderung der Fixkosten auf die Gewinnzone, die gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den maximalen Gewinn hat.



5 Für die Absatzentwicklung (in ME pro Tag) stehen zwei Prognosefunktionen zur Diskussion: $A_1(t) = 40 - 0{,}15t - 40e^{-0{,}05t}$
$A_2(t) = 1{,}5t\, e^{-0{,}02t}$,
wobei t die Zeit in Verkaufstagen darstellt.

5.1 Welche Funktionen prognostiziert einen höheren maximalen Absatz?
Wie groß ist der Unterschied?

5.2 Bestimmen Sie den von A_1 prognostizierten Absatz in ME/Tag zum Zeitpunkt t = 16 und t = 130. Vergleichen Sie.

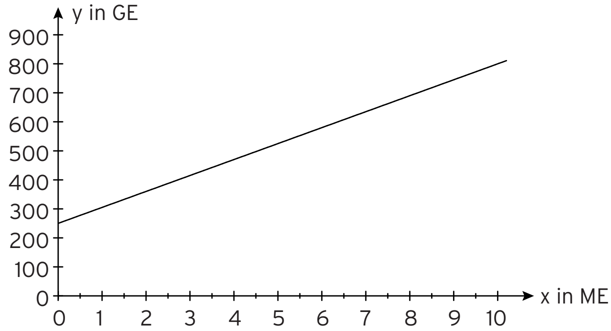
5.3 Der maximale Absatzrückgang sollte frühestens nach 150 Tagen eintreten.
Wird diese Vorgabe jeweils eingehalten?
Wie hoch ist der maximale Absatzrückgang jeweils?

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Analysis

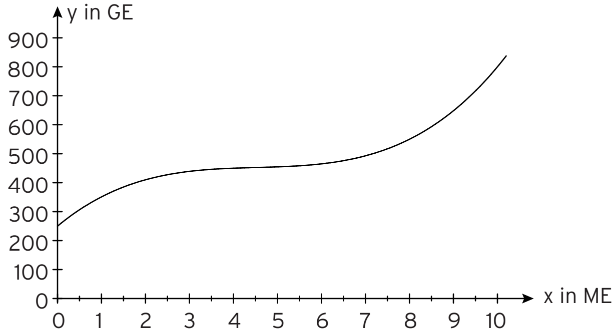
Aufgabe 1 **Seite 2/2**

6 In den folgenden Diagrammen sehen Sie die Graphen von drei Funktionen. Begründen Sie, welcher Graph dem einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion entspricht und welcher nicht.

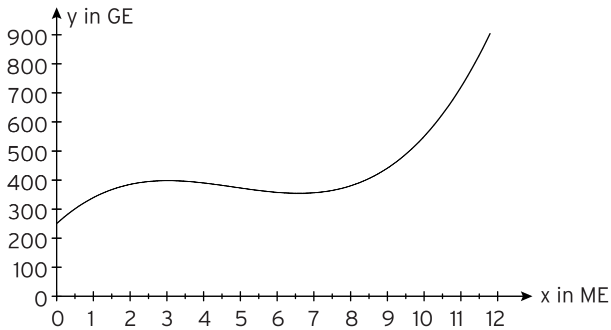
Graph 1



Graph 2



Graph 3



(Teile aus Berufskolleg NRW 2010.)

Lösung Aufgabe 15 **Aufgabe Seite 75**

a) Marktgleichgewicht: $p_N(x) = p_A(x) \quad \Rightarrow x = x_G \approx 2{,}97$

Gleichgewichtspreis: $p_G = p_A(x_G) \approx 8{,}84$

Konsumentenrente:

$$K_R = \int_0^{x_G} p_N(x)dx - x_G \cdot p_G \approx 75{,}90 - 2{,}97 \cdot 8{,}84 = 49{,}65$$

Interpretation: Die Konsumentenrente beträgt etwa 49,65 GE. Die Konsumenten geben tatsächlich 49,65 GE weniger aus, als sie theoretisch dafür vorgesehen haben.

Stammfunktion zu $p_N(x) = 16(x + 1)e^{1 - x}$

P_N ist eine Stammfunktion von p_N, wenn $P'_N(x) = p_N(x)$

$P'_N(x) = -16e^{1-x} + 16(x + 2)e^{1-x} = (16x + 16)e^{1-x} = 16(x + 1)e^{1-x} = p_N(x)$

P_N ist eine Stammfunktion zu p_N.

b) Untersuchung der Marktsituation:

Der neue Preis liegt oberhalb des Marktgleichgewichts. Daher kommt es nicht zu einer vollständigen Markträumung.

Vergleich zwischen Angebots- und Nachfragemenge

Angebotsmenge: $p_A(x) = 12$ $\qquad x^2 = 12 \Rightarrow x_A \approx 3{,}46 \ (x > 0)$

Nachfragemenge: $p_{N,\,4}(x) = 12$ $\qquad 16(x + 1)e^{1-x} = 12 \Rightarrow x_N \approx 2{,}56 \ (x > 0)$

Vergleich: $x_N < x_A$; $d = x_A - x_N = 0{,}9$

Bei einem Preis von 12 GE/ME existiert ein Angebotsüberschuss (Vorratsmenge) von 0,9 ME, d. h. der Anbieter kann nur 2,56 ME verkaufen.

Marktgleichgewicht für Düsseldorf: MG (2,97 | 8,84)

Ermittlung des Spendenbeitrages:

$(p_{fest} - p_G)\, x_{N;4} = (12 - 8{,}84) \cdot 2{,}56 = 8{,}09$

Der Anbieter von Sommerbrise spenden bei der Benefizveranstaltung einen Betrag in Höhe von 8,09 GE.

Aufgabe 16 **Aufgabe Seite 75**

1.1 Kurzfristige Preisuntergrenze

$k_v(x) = 10\,x^2 - 240x + 1920$; $k_v'(x) = 20x - 240$; $k_v''(x) = 20 > 0$

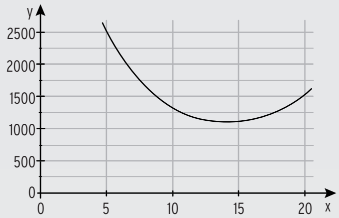
Notwendige und hinreichende Bedingung: $k_v'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 12$

(Bei einer Parabel mit a = 10 liegt dann immer eine Minimalstelle vor)

Mit $k_v(12) = 480$ gilt: Die Kurzfristige Preisuntergrenze liegt bei 480 GE/ME.

Langfristige Preisuntergrenze

$k(x) = 10\,x^2 - 240x + 1920 + \frac{7840}{x}$



Grafische Lösung ergibt:

Tiefpunkt der Stückkostenkurve: T(14 | 1080)

Langfristige Preisuntergrenze: 1080 GE/ME

Der Preis von 700 GE/ME kann kurzfristig, aber nicht langfristig unterschritten werden.

1.2 Aufgrund der anteiligen Fixkosten sind im Betriebsoptimum die variablen Stückkosten geringer als die Stückkosten (Langfristige Preisuntergrenze).
Die kurzfristige Preisuntergrenze als Minimum der variablen Stückkosten liegt somit stets unter der langfristigen Preisuntergrenze.
(Die kurzfristige Preisuntergrenze als Minimum der variablen Stückkosten ist kleiner als die variablen Stückkosten im Betriebsoptimum.)

$k_v(x_{BM}) < k_v(x_{BO}) < k(x_{BO})$

2.1 Die Gewinnschwelle liegt bei 7 ME, also gilt mit $E(x) = p \cdot x$: $K(7) = E(7)$

$$12950 = 7p \Leftrightarrow p = 1850$$

Der Preis beträgt 1850 GE/ME.

2.2 **Die Gewinnzone hat eine Breite von ca. 15 ME.**

$G(x) = E(x) - K(x) = -10x^3 + 240x^2 - 70x - 7840$

Bedingung: $G(x) = 0$ $x_1 = 7$; $x_2 \approx 22{,}07$ (positive Lösungen)

Gewinnzone: 7 ME bis ca. 22,07 ME

Somit umfasst die Gewinnzone tatsächlich ca. 15 ME.

Der größtmögliche Gewinn liegt unter 10000 GE.

$G(x) = 10000$ $x_1 \approx 13{,}15$; $x_2 \approx 18{,}28$

Für Ausbringungsmengen zwischen 13,15 ME und 18,28 ME wird ein höherer Gewinn als 10000 € erzielt. Die Aussage ist also falsch.

Alternativ: $G'(x) = 0$ $x_1 \approx 15{,}85$ Maximalstelle

Maximaler gewinn: $G(15{,}85) \approx 11525{,}14 > 10000$

Der maximale Stückgewinn beträgt 770 GE/ME.

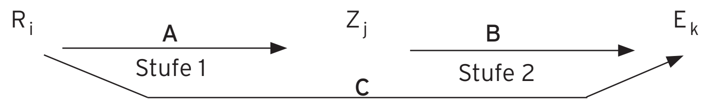
Stückgewinnfunktion g mit $g(x) = \frac{G(x)}{x}$; $x \in \,]0; 25]$

Der Graph von g hat den Hochpunkt H(14 | 770). Die Aussage ist also richtig.

2 Lineare Algebra

Formelsammlung

Lineare Verflechtung



R_i: Rohstoffe; Z_j: Zwischenprodukte; E_k: Endprodukte

Verflechtungsmatrizen

Rohstoff-Zwischenprodukt ; Zwischenprodukt-Endprodukt; Rohstoff-Endprodukt-Matrix

A B C

Es gilt der Zusammenhang: $\boxed{C = A \cdot B}$

Verbrauchs-, Produktionsvektoren

$\vec{r}$: Rohstoffvektor $\vec{z}$: Zwischenproduktvektor $\vec{x}$: Endproduktvektor

Es gilt: $\boxed{A \cdot \vec{z} = \vec{r} \qquad B \cdot \vec{x} = \vec{z} \qquad C \cdot \vec{x} = \vec{r}}$

Kostenvektoren (variable Kosten pro Einheit)

Rohstoffkosten: $\vec{k}_R$ Fertigungskosten in Stufe 1: $\vec{k}_Z$ Fertigungskosten in Stufe 2: $\vec{k}_E$

Kostenvektoren sind Zeilenvektoren.

Die **Gesamtkosten für die Produktion $\vec{x}$** setzen sich zusammen aus
Rohstoffkosten + Fertigungskosten in Stufe 1 + Fertigungskosten in Stufe 2 + fixe Kosten

K_R K_Z K_E K_f

Es gilt: $\boxed{K_R = \vec{k}_R \cdot \vec{r} \qquad K_Z = \vec{k}_Z \cdot \vec{z} \qquad K_E = \vec{k}_E \cdot \vec{x}}$

Variable Herstellungskosten $\vec{k}_v$
pro Einheit eines Endproduktes: $\boxed{\vec{k}_v = \vec{k}_R \cdot C + \vec{k}_Z \cdot B + \vec{k}_E}$

Gesamtkosten K für die Produktion $\vec{x}$
gilt bei Fixkosten K_f:

$$\boxed{\begin{aligned} K &= K_v + K_f = \vec{k}_v \cdot \vec{x} + K_f \\ K &= \vec{k}_R \cdot C \cdot \vec{x} + \vec{k}_Z \cdot B \cdot \vec{x} + \vec{k}_E \cdot \vec{x} + K_f \\ K &= \vec{k}_R \cdot \vec{r} + \vec{k}_Z \cdot \vec{z} + \vec{k}_E \cdot \vec{x} + K_f \end{aligned}}$$

Inverse Matrix

Existenz: Die **quadratische** Matrix A ist **invertierbar** (die Inverse A^{-1} existiert), wenn

$Rg(A) = n$ **oder** das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist **eindeutig lösbar.**

Berechnung: Umformung von $(A \mid E)$ in $(E \mid A^{-1})$

Eigenschaften: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ $\quad (A^{-1})^{-1} = A$

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\quad (r \cdot A)^{-1} = \frac{1}{r} \cdot A^{-1}$

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösung Seite 111**

Das Ein-Liter-Auto ist kaum noch ein Thema. Niemand dürfte bereit sein, mehrere 10 000 Euro für ein eigenes Gefährt zu zahlen. Eine mögliche Zwischenlösung wird künftig wohl in einem Zwei- oder Drei-Liter-Auto gesehen.
Insgesamt gilt: ME gleich Mengeneinheiten und GE gleich Geldeinheiten.
Der Autozulieferbetrieb Dynamik baut unter anderem für ein Zwei-Liter-Auto in einem zweistufigen Produktionsprozess aus verschiedenen elektronischen Bauteilen (B1, B2 und B3) Fahrdynamikregelung, Motorsteuergerät und Bordcomputer (E1, E2, E3).
Die folgenden Listen geben Auskunft über die Zusammenhänge zwischen den Bauteilen und den Zwischen- bzw. Endprodukten in ME.

	Z1	Z2	Z3
B1	1	0	3
B2	5	2	12
B3	50	15	95

	E1	E2	E3
Z1	2	3	2
Z2	0	4	3
Z3	1	5	1

Kosten der Bauteile in GE/ME			Fertigungskosten der Zwischenprodukte in GE/ME			Fertigungskosten der Endprodukte in GE/ME		
B1	B2	B3	Z1	Z2	Z3	E1	E2	E3
0,03	0,02	0,01	1,5	2,5	2,5	10	15	20

1.1 Aus den obigen Angaben ergibt sich die folgende Bauteile-Endproduktmatrix:

$$M_{BE} = \begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & b \\ 195 & a & 240 \end{pmatrix}$$

1.1.1 Berechnen Sie die Werte für a und b. 5

1.1.2 Erläutern Sie die Bedeutung der Elemente a und b im Sachzusammenhang. 5

Im Folgenden sei a = 685 und b = 28.

1.2 Die Fixkosten der Wochenproduktion betragen 7 525 GE. 8
Berechnen Sie die Gesamtkosten für eine Wochenproduktion von 750 ME von E1, 900 ME von E2 und 500 ME von E3.

1.3 Kurz vor den Betriebsferien meldet das Lager einen Bestand an Zwischenprodukten von Z1 mit 4 300 ME, Z2 mit 4 250 ME und Z3 mit 4 950 ME.

1.3.1 Untersuchen Sie, wie viele Endprodukte mit diesem Lagerbestand noch vor den Betriebsferien produziert werden können. 8

1.3.2 Begründen Sie, dass es trotz höheren Rechenaufwands sinnvoll sein kann, zunächst die Inverse der Verflechtungsmatrix M_{ZE} zu bestimmen. 5

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 1 **Seite 2/2** **Punkte**

1.4 Das Unternehmen Dynamik staffelt seine Preise der Endprodukte nach Auftrag und Kunde. Den Kunden werden bestimmte Rabattkategorien r mit $r \in \mathbb{N}$ zugeordnet – guten Kunden wird eine höhere Kategorie zugeordnet.
Es gilt folgender Preisvektor:

$e_r^T = (26{,}54 - 0{,}5r \quad 69{,}55 - 1{,}5r \quad 49{,}61 - r)$

1.4.1 Berechnen Sie, für welche $r > 0$ die einzelnen Preise ökonomisch sinnvoll sind. 7

1.4.2 Die Gesamtkosten in Höhe von 85 055 GE bei der Wochenproduktion von 750 ME von E1, 900 ME von E2 und 500 ME von E3 sollen trotz Rabatt mindestens gedeckt werden. 7
Leiten Sie den Bereich für r her, der dieser Anforderung genügt.
(Berufskolleg NRW 2011.) $\overline{45}$

Aufgabe 2 **Seite 1/2** **Lösung Seite 112**

Punkte

BioKosmetiKuss stellt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus pflanzlichen Rohstoffen (R1, R2 und R3) Zwischenprodukte (Z1, Z2 und Z3) und aus diesen wiederum verschiedene Parfums (E1, E2 und E3) her.
Die folgenden Matrizen geben die benötigten pflanzlichen Rohstoffe je Zwischenprodukt bzw. Zwischenprodukte je Endprodukt (Parfum) in ME an.

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 4 & 1 & b \end{pmatrix} \qquad B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & c \end{pmatrix} \text{ ; } a, b, c \geq 0$$

Für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix gilt in der aktuellen Produktionsperiode:

$$C_{RE} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 \\ 15 & 23 & 13 \\ 10 & 17 & 7 \end{pmatrix}$$

3.1 Bei der Produktion der Zwischenprodukte und der Parfums treten produktionsbedingte Parameter a, b und c auf, die in den einzelnen Produktionsperioden variieren können.

3.1.1 Berechnen Sie die Werte für a, b und c für die aktuelle Produktionsperiode. 5

3.1.2 Deuten Sie Ihre Ergebnisse aus 3.1.1 im Sachzusammenhang. 3

3.1.3 Stellen Sie die betriebliche Materialverflechtung in Form eines Gozintographen (Verflechtungsdiagramm) dar. 5

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 2 **Seite 2/2** **Punkte**

Im Folgenden seien a = 4, b = 2 und c = 0.

3.2 Folgende Kosten fallen an:

Kosten der pflanzlichen Rohstoffe in GE/ME			Fertigungskosten der Zwischenprodukte in GE/ME			Fertigungskosten der Endprodukte in GE/ME		
R1	R2	R3	Z1	Z2	Z3	E1	E2	E3
4,5	2,8	3,2	8,5	5	6,5	3	2,5	4

Die fixen Kosten einer Wochenproduktion betragen 5000 GE.

3.2.1 Bestimmen Sie die variablen Kosten je ME der Parfums E1, E2 und E3. 8

3.2.2 Aus produktionstechnischen Gründen werden die Parfums E1, E2 und E3 im Verhältnis 1 : 2 : 4 hergestellt. Ermitteln Sie, wie viele ME der Parfums E1, E2 und E3 produziert werden, wenn die Gesamtkosten 47 232 GE pro Woche betragen. (Berufskolleg NRW 2013.) 5

Aufgabe 3 **Seite 1/2** **Lösung Seite 114**

Das Unternehmen Argoline produziert Spielzeug. Ganz neu zum Sortiment gehört das Stecksystem Argoline3D, das den leichten Zusammenbau auch komplexer Modelle ermöglicht.

Das Spielsystem Argoline3D besteht im wesentlichen aus den Grundelementen V1 (Verbindungswürfel), S1 (Stecker), P1 (Platte) und R1 (Rohr).

1 In einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus den Grundelementen V1, S1, P1 und R1 die Wandteile W1 und W2 gefertigt und die Beutel B mit 100 Steckern S1 gepackt, da man viele Stecker S1 benötigt, um Wände zusammenzusetzen.
In der zweiten Produktionsstufe werden daraus die häufig nachgefragten Modelle Haus und Turm hergestellt.

Grundelement - Zwischenprodukt

	W1	W2	B
V1	12	9	0
S1	34	24	100
R1	17	12	0
P1	6	4	0

Zwischenprodukt - Endprodukt

	Haus	Turm
W1	12	12
W2	16	34
B	3	4

1.1 Berechnen Sie die Matrix, die die Anzahl der Grundelemente je Endprodukt Haus und Turm angibt.

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 3 **Seite 2/2**

1.2 Zum Osterfest bestellt ein Warenhaus 800 Stück des Modells Haus und 500 Stück des Modells Turm.
Berechnen Sie die Anzahl der für diesen Auftrag zu produzierenden Zwischenprodukte und den Bedarf an Grundelementen.

1.3 Berechnen Sie mit Hilfe der unten angegebenen Kosten- und Preisangaben den Gewinn des Osterauftrags.

Produktionskosten je Grundelement in EUR			
V1	S1	R1	P1
0,04	0,01	0,03	0,02

Produktionskosten je Zwischenprodukt in EUR		
W1	W2	B
0,30	0,20	0,05

Verpackungskosten pro Modell in EUR		Fixkosten in EUR	Verkaufspreis in EUR	
Modell Haus	Modell Turm	1500,00	Modell Haus	Modell Turm
0,50	0,60		50,00	75,00

2 Nach dem Osterverkauf soll das Lager wegen Renovierungsarbeiten kurzfristig geräumt werden. Es befinden sich noch 600 Stück W1, 1340 Stück W2 und 180 Beutel B im Lager.

2.1 Erläutern Sie allgemein, wie man anhand der Rangkriterien auf die Anzahl der Lösungen bei einem inhomogenen linearen Gleichungssystem schließen kann.

2.2 Beurteilen Sie, ob der Lagerbestand durch die Produktion der Modelle Haus und Turm aufgebraucht werden kann.

3 Ein Einzelhändler möchte kurzfristig eine größere Menge der Modelle Haus und Turm bestellen. Dabei sollen doppelt so viele Exemplare des Modells Turm wie des Modells Haus geliefert werden. Zum Zeitpunkt der Bestellung besteht mit 40500 Stück ein Lagerengpass an Rohren (R1). Von den anderen Grundelementen, Verbindungswürfel (V1), Platten (P1) und Stecker (S1), sind noch ausreichende Mengen vorhanden.
Zeigen Sie, dass unter den gegebenen Bedingungen maximal ein Erlös von 5000,00 € erzielt werden kann, wenn weiterhin für das Modell Haus ein Verkaufspreis von 50,00 € und für das Modell Turm von 75,00 € gilt.
(Nach Berufskolleg NRW 2010.)

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 4 **Seite 1/2** **Lösung Seite 116**

Punkte

Die Bio-Kosmetic ist ein Unternehmen der Kosmetikbranche, das aus ökologisch produzierten Grundstoffen hochwertige Pflegeprodukte herstellt. Sie beliefert Bioläden und eine große Drogeriekette. Insgesamt gilt: ME gleich Mengeneinheiten, GE gleich Geldeinheiten. Das Unternehmen Bio-Kosmetic stellt aus den Rohstoffen Milch, Lanolin, Rosenöl und Jojobaöl drei Grundkomponenten (G1 bis G3) her. Aus diesen werden zwei Markencremes hergestellt: Handcreme (H) und Faltencreme (F).

1 Bio-Kosmetic erhält von einer großen Drogeriekette den Auftrag, 100 ME von der Handcreme und 150 ME von der Faltencreme zu liefern. 5

Es gelten folgende Mengenbeziehungen:

	G1	G2	G3
Milch	20	15	10
Lanolin	1	2	0,5
Rosenöl	3	0	2
Jojobaöl	0	1	2

	H	F
G1	1	3
G2	5	0
G3	2	5

Der Betrieb hat einen Lagerbestand von 30000 ME Milch, 2000 ME Lanolin, 3000 ME Rosenöl und 4000 ME Jojobaöl. Prüfen Sie, ob mit diesem Lagerbestand der Auftrag erfüllt werden kann und bestimmen Sie gegebenenfalls, wie viele Mengeneinheiten der einzelnen Rohstoffe nachbestellt werden müssen.

2 Die Drogeriekette zahlt für jede ME der Handcreme 300 GE und für jede ME der Faltencreme 500 GE. 7

Dem Unternehmen Bio-Kosmetic entstehen folgende Kosten je ME bei der Herstellung:

Rohstoffkosten je ME				Fertigungskosten je ME der Grundkomponenten			Fertigungskosten je ME der Handcreme bzw. Faltencreme	
Milch	Lanolin	Rosenöl	Jojobaöl	G1	G2	G3	Handcreme	Faltencreme
0,2 GE	1 GE	15 GE	8 GE	0,5 GE	1 GE	3 GE	2,5 GE	2 GE

Zusätzlich fallen noch fixe Kosten in Höhe von 15750 GE an. Berechnen Sie den Gewinn für den Auftrag der Drogeriekette über 100 ME der Handcreme und 150 ME der Faltencreme.

3 Der leitende Chemiker will eine neue Rezeptur für die Grundkomponenten ausprobieren und den Anteil der Milch in den Grundkomponenten verändern, während der Gesamtmilchgehalt gleich bleiben soll, also:

	G1	G2	G3
Milch	a	b	c
Lanolin	1	2	0,5
Rosenöl	3	0	2
Jojobaöl	0	1	2

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 4 **Seite 2/2** **Punkte**

3 Die anderen Mengenbeziehungen bleiben unverändert, also:

	H	F
G1	1	3
G2	5	0
G3	2	5

	H	F
Milch	115	110
Lanolin	12	5,5
Rosenöl	7	19
Jojobaöl	9	10

3.1 Zeigen Sie, dass die benötigten Milchmengen pro Grundkomponente durch das folgende lineare Gleichungssystem bestimmen werden können: 4

$$\begin{aligned} & a + 5b + 2c = 115 \\ \wedge\ & 3a + \ 5c = 110 \end{aligned}$$

3.2 Beurteilen Sie die Lösbarkeit des Gleichungssystem mithilfe des Rangkriteriums. 5

3.3 Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems. 5

3.4 Eine mögliche Schreibweise des Lösungsvektors des Gleichungssystems lautet: 5

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{110}{3} \\ \frac{47}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{15}t \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Leiten Sie den produktionstechnisch sinnvollen Bereich für t her.

(Berufskolleg NRW 2010.)

Aufgabe 5 **Seite 1/3** **Lösung Seite 117**

Die PlantGrow AG stellt in einem zweistufigen Produktionsprozess Blumensamenmischungen für den Direktvertrieb an Endverbraucher her.

1.1 In einer ersten Produktionsstufe werden aus vier Samenarten S1, S2, S3 und S4 drei verschiedene Tütenmischungen T1, T2 und T3 hergestellt, die in der zweiten Produktionsstufe zu zwei verschiedenen Verkaufsverpackungen V1 und V2 zusammengestellt werden. Die Mengeneinheiten (ME) der Samenarten und Tütenmischungen, die jeweils für eine ME der Tütenmischungen bzw. Verkaufsverpackungen benötigt werden, sind in den unten stehenden Matrizen A_{ST}, B_{TV} und C_{SV} angegeben.

$$A_{ST} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ b & 0 & 6 \end{pmatrix},\ B_{TV} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ c & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } C_{SV} = \begin{pmatrix} 10 & 28 \\ 5 & 13 \\ 10 & 16 \\ 13 & 34 \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 5 **Seite 2/3** **Punkte**

1.1.1 Berechnen Sie die Zahlenwerte für a, b und c. 6

1.1.2 Ergänzen Sie die graphische Darstellung des zweistufigen Produktionsprozesses (Gozintograph) in Anlage 1 mit den entsprechenden Zahlenwerten. 5

1.3 Zur Sommersaison sollen doppelt so viele Verkaufsverpackungen von V1 wie von V2 je Woche hergestellt werden. Gleichzeitig stehen durch einen Engpass bei den Samenarten von S1 nur 1 500 ME und von S2 nur 550 ME je Woche zur Verfügung. Von S3 und S4 sind genügend Mengeneinheiten im Lager vorrätig. Ermitteln Sie, wie viele Mengeneinheiten der Verkaufsverpackungen von V1 und V2 unter diesen Bedingungen maximal je Woche hergestellt werden können. 8

1.2 Aus Kostengründen ist das Mischungsverhältnis der Tütenmischungen geändert worden, so dass jetzt nur noch die drei Samenarten S1, S2 und S3 zu drei Tütenmischungen T1, T2 und T3 verarbeitet werden, aus denen die beiden Verkaufsverpackungen V1 und V2 produziert werden.

Für die neuen Mengenangaben gelten folgenden Matrizen: $\overline{A}_{ST} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\overline{C}_{SV} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 6 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$

Für die Inverse von $\overline{A}_{ST}$ gilt: $\overline{A}_{ST}^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 16 & -4 \\ -1 & -6 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

Die Kosten je ME in GE lassen sich der folgenden Tabelle entnehmen:

Kosten für Samenarten			Fertigungskosten 1. Stufe zu Tüten			Fertigungskosten 2. Stufe zu Verkaufsverpackungen	
S1	S2	S3	T1	T2	T3	V1	V2
2	1	0,5	3	2	3,5	4	3

Für die Verkaufspreise in GE je ME gilt:

Verkaufspreise	
V1	V2
70	65

1.2.1 Leiten Sie aus den obigen Matrizen die Matrix $\overline{B}_{TV} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ her,

die den Verbrauch an Tütenmischungen je ME der Verkaufsverpackungen angibt. 8

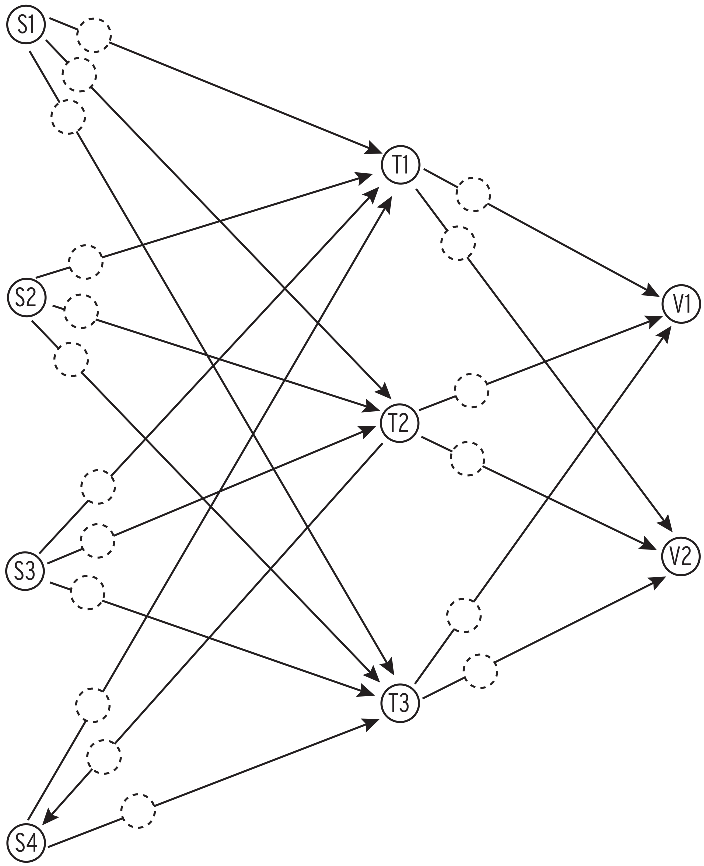
1.2.2 Berechnen Sie den Stückdeckungsbeitrag in GE/ME der Verkaufsverpackungen V1 und V2. 10

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 5 **Seite 3/3** **Punkte**

1.2.3 Zur Sommersaison sollen doppelt so viele Verkaufsverpackungen von V1 wie von V2 je Woche hergestellt werden. Gleichzeitig stehen durch einen Engpass bei den Samenarten von S1 nur 1 500 ME und von S2 nur 550 ME je Woche zur Verfügung. Von S3 sind genügend Mengeneinheiten im Lager vorrätig.
Ermitteln Sie, wie viele Mengeneinheiten der Verkaufsverpackungen von V1 und V2 unter diesen Bedingungen maximal je Woche hergestellt werden können. 8

Anlage 1



Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 6 **Lösung Seite 119**

Punkte

Das Unternehmen BIOSAFT produziert Smoothies in einem zweistufigen Produktionsprozess zunächst aus den Rohstoffen Obst (R1), Gemüse (R2) und Wasser (R3) die Zwischenprodukte Obstbasis (Z1), Gemüsebasis (Z2) und eine fruchtige Wasserbasis (Z3), die in einem zweiten Produktionsschritt zu den Endprodukten Obst-Smoothie (E1), Grüner-Smoothie (E2) und Obst-Gemüse-Smoothie (E3) verarbeitet werden.
Folgende Produktionsmengen in Mengeneinheiten (ME) seien bekannt:

$$B_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad C_{RE} = \begin{pmatrix} 34 & 18 & 26 \\ 11 & 28 & 21 \\ 8 & 18 & 36 \end{pmatrix}.$$

1.1 Interpretieren Sie das Element b_{31} der Matrix B_{ZE} anwendungsbezogen.
Bestimmen Sie die fehlende Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A_{RZ}.
Stellen Sie den gesamten Produktionsprozess in einem Verflechtungsdiagramm dar. 8

1.2 Der Discounter OLDI überlegt die Smoothies von BIOSAFT in sein Sortiment aufzunehmen und bietet dem Produzenten je Mengeneinheit Obst-Smoothie einen Preis von 30 Geldeinheiten (GE) und je Mengeneinheit Grüner-Smoothie einen Preis von 27 GE an. Der Auftrag umfasst 500 ME Obst-Smoothie und 200 ME Grüner-Smoothie. BIOSAFT möchte den Auftrag kalkulieren. Folgende Informationen bezüglich der Produktionskosten sind bekannt:

Rohstoffkosten in GE/ME		Herstellungskosten in GE/ME		Verarbeitungskosten in GE/ME	
R1	0,6	Z1	0,5	E1	0,9
R2	0,4	Z2	0,5	E2	0,8
R3	0,1	Z3	0,2	E3	1,1

Bestimmen Sie die variablen Stückkosten je Endprodukt.
Berechnen Sie die variablen Kosten für diesen Auftrag.
Begründen Sie nachvollziehbar, ob BIOSAFT den Auftrag annehmen sollte, wenn die Fixkosten für diesen Auftrag 550 GE betragen. 8

(Berufskolleg NRW 2016.)

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra Lösungen

Lösung Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 102**

1.1.1 Bauteile-Zwischenprodukt-Matrix M_{BZ}

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix M_{ZE}; Bauteile-Endprodukt-Matrix M_{BE}

Es gilt: $M_{BZ} \cdot M_{ZE} = M_{BE}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 12 \\ 50 & 15 & 95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & b \\ 195 & a & 240 \end{pmatrix}$

Für a und b gilt dann: $a = 50 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 95 \cdot 5 = 685$

$b = 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 12 \cdot 1 = 28$

Die exemplarische Überprüfung stimmt mit der Vorgabe überein.

1.1.2 a gibt die Anzahl der Bauteile B3 im Endprodukt E2 (Motorsteuergerät) an.

b gibt die Anzahl der Bauteile B2 im Endprodukt E3 (Bordcomputer) an.

1.2 Wochenproduktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix}$

Bauteilekosten je Endprodukt: $(0{,}03 \quad 0{,}02 \quad 0{,}01)\begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & 28 \\ 195 & 685 & 240 \end{pmatrix} = (2{,}54 \quad 9{,}05 \quad 3{,}11)$

Fertigungskosten je Endprodukt: $(1{,}5 \quad 2{,}5 \quad 2{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (5{,}5 \quad 27 \quad 13)$

Fertigungskosten der Endprodukte: $(10 \quad 15 \quad 20)$

Für die variablen Kosten je Endprodukt gilt:

$(2{,}54 \quad 9{,}05 \quad 3{,}11) + (5{,}5 \quad 27 \quad 13) + (10 \quad 15 \quad 20) = (18{,}04 \quad 51{,}05 \quad 36{,}11)$

Für die Gesamtkosten einer Wochenproduktion gilt:

$(18{,}04 \quad 51{,}05 \quad 36{,}11)\begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix} + 7525 = 85055$

Die Gesamtkosten einer Wochenproduktion betragen 85 055 GE.

1.3 Ansatz: $M_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4300 \\ 4250 \\ 4950 \end{pmatrix}$

Lösung des Gleichungssystems mit dem Gaußverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4300 \\ 0 & 4 & 3 & 4250 \\ 1 & 5 & 1 & 4950 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4300 \\ 0 & 4 & 3 & 4250 \\ 0 & 7 & 0 & 5600 \end{array}\right) * \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 350 \end{array}\right) **$$

Durch Rückwärtseinsetzen aus * oder Gaußverfahren bis ** ergibt sich: Es können noch 600 ME von E1, 800 ME von E2 und 350 ME von E3 produziert werden.

1.3.2 Die Berechnung der Inversen hat genau dann einen Vorteil, wenn die Produktionsmengen nicht nur für einen Lagerbestand, sondern für unterschiedliche Lagerbestände bestimmt werden sollen. So reduziert sich der weitere Rechenaufwand lediglich auf eine einfache Multiplikation der Inversen von M_{ZE} mit den Vektoren der jeweiligen Lagerbestände. Das Lösen von Gleichungssystemen ist dann nur einmal notwendig.

Lösung Aufgabe 1 **Seite 2/2**

1.4.1 Die Preise müssen mit Rabattgewährung größer als Null sein:

$26{,}54 - 0{,}5r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r < 53{,}08$

$69{,}55 - 1{,}5r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r < 46{,}37$

$49{,}61 - r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r < 49{,}61$

Die Rabattgewährung r soll nur ganzzahlig ($\in \mathbb{N}$) sein; es gilt somit $0 \leq r \leq 46$.

1.4.2 Sinnvoller Bereich für r:

Es gilt: $G \geq 0$ mit $G = E - K$

$$G = e_r^T \cdot \vec{x} - K = (26{,}54 - 0{,}5r \quad 69{,}55 - 1{,}5r \quad 49{,}61 - r)\begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix} - 85055 \geq 0$$

$$19905 - 375r + 62595 - 1350r + 24805 - 500r - 85055 \geq 0$$

$$22250 - 2225r \geq 0$$

$$r \leq 10$$

Für die Wahl der Rabattkategorie r gilt: $0 \leq r \leq 10$

Lösung Aufgabe 2 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 103**

3.1 $A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 4 & 1 & b \end{pmatrix}$; $B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & c \end{pmatrix}$; a, b, c $\geq$ 0; $C_{RE} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 \\ 15 & 23 & 13 \\ 10 & 17 & 7 \end{pmatrix}$

3.1.1 Es gilt: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$

Daraus folgt: $(1 \quad a \quad 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 15 \qquad 1 + 2a + 6 = 15 \quad \Leftrightarrow a = 4$

$(4 \quad 1 \quad b)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 10 \qquad 4 + 2 + 2b = 10 \quad \Leftrightarrow b = 2$

$(1 \quad 2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ c \end{pmatrix} = 7 \qquad 1 + 6 + c = 7 \quad \Leftrightarrow c = 0$

3.1.2 Deutung im Sachzusammenhang:

a= 4: Für eine ME des Zwischenproduktes Z2 werden 4 ME des pflanzlichen Rohstoffs R2 benötigt.

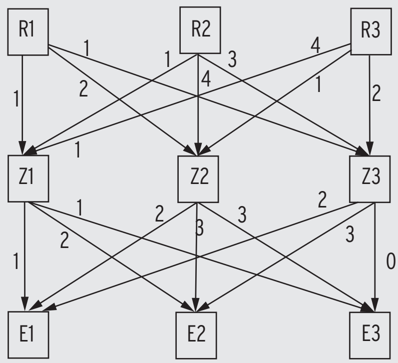
b = 2: Für eine ME des Zwischenproduktes Z3 werden 2 ME des pflanzlichen Rohstoffs R3 benötigt.

c = 0: Für eine ME des Endproduktes E3 werden keine ME des Zwischenproduktes Z3 verbraucht.

Lösung Aufgabe 2 **Seite 2/2**

3.1.3 Materialverflechtung

Gozintograph



3.2.1 **Variable Kosten je ME der Endprodukte E1, E2 und E3**

Materialkosten:

$$(4{,}5 \quad 2{,}8 \quad 3{,}2) \cdot C_{RE} = (4{,}5 \quad 2{,}8 \quad 3{,}2) \cdot \begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 \\ 15 & 23 & 13 \\ 10 & 17 & 7 \end{pmatrix} = (105{,}5 \quad 168{,}3 \quad 90{,}3)$$

Fertigungskosten Zwischenprodukte:

$$(8{,}5 \quad 5 \quad 6{,}5) \cdot B_{ZE} = (8{,}5 \quad 5 \quad 6{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = (31{,}5 \quad 51{,}5 \quad 23{,}5)$$

Variable Kosten je ME der Endprodukte:

$$(105{,}5 \quad 168{,}3 \quad 90{,}3) + (31{,}5 \quad 51{,}5 \quad 23{,}5) + (3 \quad 2{,}5 \quad 4)$$

$$= (140 \quad 222{,}3 \quad 117{,}8)$$

Die variablen Kosten für eine ME von E1 betragen 140 GE, für eine ME E2 222,3 GE und 117,8 GE für eine ME E3.

3.2.2 **Produktionszahlen der Endprodukte**

Zu lösen ist: $(140 \quad 222{,}3 \quad 117{,}8) \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 4x \end{pmatrix} + 5000 = 47232$

$140x + 444{,}6x + 471{,}2x + 5000 = 47232 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 40$

Vom Endprodukt E1 können 40 E, von E2 80 ME und von E3 160 ME hergestellt werden.

Lösung Aufgabe 3 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 104**

1.1 Das Element $a_{2;3}$ der Grundelement-Zwischenprodukt-Tabelle ist 100.

Ein Beutel B enthält 100 Stecker S1.

A: Grundelement-Zwischenprodukt-Matrix: $A = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 0 \\ 34 & 24 & 100 \\ 17 & 12 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

B: Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix: $B = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 16 & 34 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

C: Grundelement-Endprodukt-Matrix; $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 288 & 450 \\ 1092 & 1624 \\ 396 & 612 \\ 136 & 208 \end{pmatrix}$

1.2 Bedarf an Zwischenprodukten für den Auftrag $\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \end{pmatrix}$

$B \cdot \vec{x} = \vec{z} = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 16 & 34 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15600 \\ 29800 \\ 4400 \end{pmatrix}$

Bedarf an Grundelementen (Rohstoffen) für den Auftrag, also für $\vec{z} = \begin{pmatrix} 15600 \\ 29800 \\ 4400 \end{pmatrix}$

$A \cdot \vec{z} = \vec{r} = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 0 \\ 34 & 24 & 100 \\ 17 & 12 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15600 \\ 29800 \\ 4400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 455400 \\ 1685600 \\ 622800 \\ 212800 \end{pmatrix}$

Alternative: Die Grundelemente lassen sich auch mit $C \cdot \vec{x} = \vec{r}$ berechnen.

Für den Auftrag braucht man 455400 V1, 1685600 S1, 622800 R1, 212800 P1 und muss 15600 W1, 29800 W2 und 4400 B herstellen.

1.3 Produktionskosten Grundelemente: $(0{,}04 \quad 0{,}01 \quad 0{,}03 \quad 0{,}02) \begin{pmatrix} 455400 \\ 1685600 \\ 622800 \\ 212800 \end{pmatrix} = 58012$

Produktionskosten Zwischenprodukte: $(0{,}30 \quad 0{,}20 \quad 0{,}05) \begin{pmatrix} 15600 \\ 29800 \\ 4400 \end{pmatrix} = 10860$

Verpackungskosten: $(0{,}50 \quad 0{,}60) \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \end{pmatrix} = 700$

Mit Fixkosten von 1500 EUR erhält man die

Gesamtkosten: 58012 + 10860 + 700 + 1500 = 71072

Erlös: $(50 \quad 75) \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \end{pmatrix} = 77500$

Gewinn = Erlös – Kosten = 77500 – 71072 = 6428

Der Gewinn für diesen Auftrag beträgt 6428 EUR.

Lösung Aufgabe 3 **Seite 2/2**

2.1 Ein inhomogenes LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann lösbar, wenn $Rg(A) = Rg(A \mid \vec{b})$ gilt.

Für den Fall, dass $Rg(A) = Rg(A; \vec{b}) = n$ ist (n ist die Anzahl der Unbekannten), existiert genau eine Lösung.

Für den Fall, dass $Rg(A) = Rg(A; \vec{b}) < n$ ist (n ist die Anzahl der Unbekannten), gibt es unendlich viele Lösungen.

2.2 Bedingung für die Produktionsmengen der Endprodukte: $B \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 600 \\ 1340 \\ 180 \end{pmatrix}$

Einsetzen ergibt das LGS für p_1 und p_2: $\left(\begin{array}{cc|c} 12 & 12 & 600 \\ 16 & 34 & 1340 \\ 3 & 4 & 180 \end{array}\right)$

Umformung mit dem Gaußverfahren : $\left(\begin{array}{cc|c} 12 & 12 & 600 \\ 0 & 18 & 540 \\ 0 & 1 & 30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 12 & 12 & 600 \\ 0 & 18 & 540 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$Rg(A) = Rg(A; \vec{b}) = 2$ (Anzahl der Unbekannten = 2), es existiert genau eine Lösung.

$p_1 = 20$; $p_2 = 30$

Der Lagerbestand kann durch die Produktion von 20 Modellen Haus und 30 Modellen Turm vollständig aufgebraucht werden.

3 Bestellvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} z \\ 2z \end{pmatrix}$

Für diese Bestellung nötige Grundelemente R1:

Multiplikation der 3. Zeile der Grundelemente-Endprodukt-Matrix mit $\vec{b}$:

$(396 \quad 612)\begin{pmatrix} z \\ 2z \end{pmatrix} = 1620z$

Bedingung für z: $1620z \leq 40500 \quad \Leftrightarrow z \leq 25$

Es können daher höchstens 25 Modelle Haus und 50 Modelle Turm verkauft werden.

Maximaler Erlös: $(50 \quad 75)\begin{pmatrix} 25 \\ 50 \end{pmatrix} = 5000$

Unter diesen Bedingungen kann ein maximaler Erlös von 5000 EUR erzielt werden.

Lösung Aufgabe 4 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 106**

1 Verflechtungsmatrizen

$$A_{RG} = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 1 & 2 & 0{,}5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B_{GM} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; C_{RM} = A_{RG} \cdot B_{GM} = \begin{pmatrix} 115 & 110 \\ 12 & 5{,}5 \\ 7 & 19 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Mit dem Auftragsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}$ berechnet man den

Rohstoffbedarf für diesen Auftrag: $C_{RM} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 115 & 110 \\ 12 & 5{,}5 \\ 7 & 19 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28000 \\ 2025 \\ 3550 \\ 2400 \end{pmatrix}$

Der Lagerbestand reicht nicht aus.

Es ergeben sich folgende Nachbestellungen: $\begin{pmatrix} 30000 \\ 2000 \\ 3000 \\ 4000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28000 \\ 2025 \\ 3550 \\ 2400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ -25 \\ -550 \\ 1600 \end{pmatrix}$

Vom Lanolin müssen 25 ME und vom Rosenöl 550 ME nachbestellt werden.

2 Rohstoffkosten je ME der Endprodukte H und F:

$$K_R = \vec{k}_R \cdot C_{RM} = (0{,}2 \quad 1 \quad 15 \quad 8) \cdot \begin{pmatrix} 115 & 110 \\ 12 & 5{,}5 \\ 7 & 19 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = (212 \quad 392{,}5)$$

Fertigungskosten der Grundkomponenten je ME der Endprodukte H und F:

$$K_G = \vec{k}_G \cdot B_{GM} = (0{,}5 \quad 1 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = (11{,}5 \quad 16{,}5)$$

Variable Herstellkosten je ME der Endprodukte H und F:

$$\vec{k}_v = \vec{k}_R \cdot C_{RM} + \vec{k}_Z \cdot B_{GM} + \vec{k}_E = (212 \quad 392{,}5) + (11{,}5 \quad 16{,}5) + (2{,}5 \quad 2) = (226 \quad 411)$$

Variable Herstellkosten für den gesamten Auftrag:

$$K_v = \vec{k}_v \cdot \vec{x} = (226 \quad 411) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = 84250$$

Erlöse für den gesamten Auftrag: $(300 \quad 500) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = 105000$

Gewinne = Erlöse – (variable Kosten + Fixkosten)

= 105000 – (84250 + 15750) = 5000

Es wird ein Gewinn in Höhe von 5000 GE erzielt.

Lösung Aufgabe 4 **Seite 2/2**

3.1 Es gilt: $A_{RG} \cdot B_{GM} = C_{RM}$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 0{,}5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 & 110 \\ 12 & 5{,}5 \\ 7 & 19 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

Ausmultiplizieren (1. Zeile von A_{RG} · 1. + 2. Spalte von B_{GM}) ergibt das mehrdeutig lösbare Gleichungssystem: $a + 5b + 2c = 115 \wedge \; 3a + 5c = 110$

(2 Gleichungen für 3 Unbekannte)

3.2 LGS in Matrixform: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 115 \\ 3 & 0 & 5 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Eine weitere Umformung mithilfe des Gaußverfahrens ist nicht nötig.

Da Rg(A | b) = Rg(A) = 2 < 3 ist, hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen mit einem Freiheitsgrad, d. h. eine Unbekannte ist frei wählbar

3.3 Mit c = t erhält man aus $3a + 5c = 110$: $3a = 110 - 5t \Leftrightarrow a = \frac{110}{3} - \frac{5}{3}t$

Einsetzen in $a + 5b + 2c = 115$ ergibt: $\frac{110}{3} - \frac{5}{3}t + 5b + 2t = 115$

Auflösen nach b: $5b = \frac{235}{3} - \frac{1}{3}t \quad \Leftrightarrow b = \frac{47}{3} - \frac{1}{15}t$

Damit entsteht der gegebene Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{110}{3} \\ \frac{47}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{15}t \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix}$.

3.4 Produktionstechnisch sinnvoller Bereich für t:

Berechnung von t aus a, b, c ≥ 0:

$a = \frac{110}{3} - \frac{5}{3}t \geq 0 \Leftrightarrow \; t \leq \frac{110}{5} = 22$

$b = \frac{47}{3} - \frac{1}{15}t \geq 0 \Leftrightarrow \; t \leq 47 \cdot 5 = 235$

$c = t \geq 0$

Multipliziert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl, so dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

Alle drei Bedingungen sind erfüllt für $0 \leq \; t \leq \; 22$, also liegt t zwischen 0 und 22.

Lösung Aufgabe 5 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 107**

1.1.1 berechnet die Zahlenwerte für a, b und c.

Wegen $A_{ST} \cdot B_{TV} = C_{SV}$ gilt:

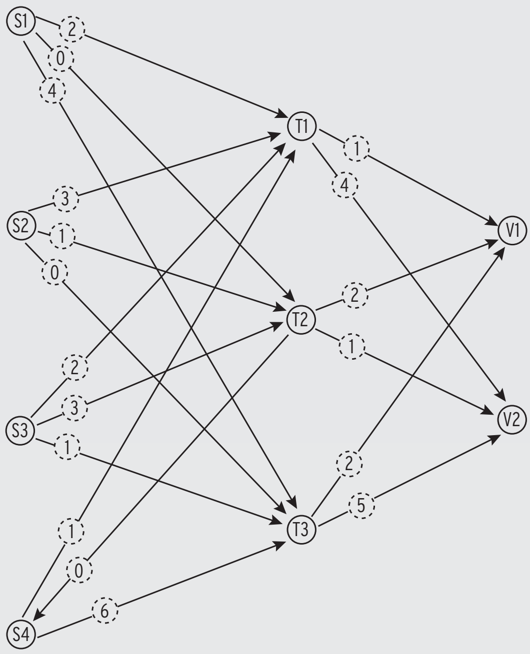
(1) $2 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + a \cdot 5 = 28 \Leftrightarrow \; = 4$

(2) $b \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 6 \cdot 5 = 34 \Leftrightarrow b = 1$

(3) $3 \cdot 1 + 1 \cdot c + 0 \cdot 2 = 5 \Leftrightarrow c = 2$

Lösung Aufgabe 5 Seite 2/2

1.1.2 ergänzt den Gozintographen mit den Zahlenwerten.



1.1.3 ermittelt unter den genannten Bedingungen die max. Anzahl an V1 und V2.

Sei x_2 die Anzahl von V2 und $2x_2$ die Anzahl von V1, dann gilt für den erforderlichen Rohstoffbedarfsvektor $\vec{r}$:

$$\vec{r} = C_{SV} \cdot \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ ergibt}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 28 \\ 5 & 13 \\ 10 & 16 \\ 13 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48x_2 \\ 23x_2 \\ 36x_2 \\ 60x_2 \end{pmatrix}$$

Aufgrund der bestehenden Restriktionen gilt:

$48x_2 \leq 1500$ und $23x_2 \leq 550 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \leq 31{,}25$ und $x_2 \leq 23{,}91$ folgt: $x_2 \leq 23{,}91$ ME

Unter den gegebenen Bedingungen können maximal 23,91 ME von V2 bzw. 47,82 ME von V1 hergestellt werden.

1.2.1 Aus $\overline{A}_{ST} \cdot \overline{B}_{TV} = \overline{C}_{SV}$ folgt: $\overline{B}_{TV} = \overline{A}_{ST}^{-1} \cdot \overline{C}_{SV}$

Einsetzen ergibt: $\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 16 & -4 \\ -1 & -6 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 6 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = B_{TV}$

1.2.2 Stückdeckungsbeitrag in GE/ME der Verkaufsverpackungen V1 und V2.

Gegeben sind
- $\vec{k}_{Roh} = (2 \quad 1 \quad 0{,}5)$ Rohstoffkosten je ME S1 bis S3
- $\vec{k}_{FerT} = (3 \quad 2 \quad 3{,}5)$ Fertigungskosten je ME T1 bis T3
- $\vec{k}_{FerV} = (4 \quad 3)$ Fertigungskosten je V1 und V2
- $\vec{p} = (70 \quad 65)$ Verkaufspreise je V1 und V2

$$\vec{k}_{var} = \vec{k}_{Roh} \cdot C_{SV} + \vec{k}_{FerT} \cdot B_{TV} + \vec{k}_{FerV}$$

Einsetzen: $\vec{k}_{var} = (2 \quad 1 \quad 0{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 6 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + (3 \quad 2 \quad 3{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (4 \quad 3)$

$= (29 \quad 30) + (14 \quad 16) + (4 \quad 3) = (47 \quad 49)$

Somit gilt für den Stückdeckungsbeitrag $db = \vec{p} - \vec{k}_{var} = (70 \quad 65) - (47 \quad 49) = (23 \quad 16)$

Der Stückdeckungsbeitrag je ME von V1 beträgt 23,00 GE und 16,00 GE je ME von V2.

Lösung Aufgabe 6 **Aufgabe Seite 110**

1.1 **Interpretation** des Elements $b_{31} = 0$

Das Zwischenprodukt fruchtige Wasserbasis wird für die Herstellung einer Mengeneinheit des Endprodukts Obst-Smoothie nicht benötigt.

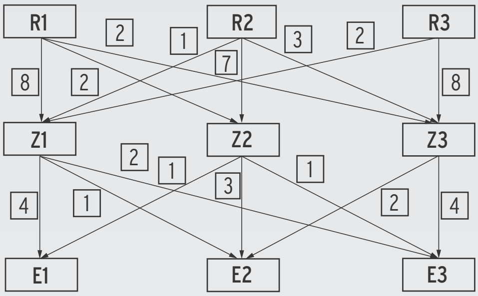
Bestimmung der fehlenden Produktionsmatrix

Es gilt: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE} \quad | \cdot B_{ZE}^{-1}$ von rechts

$$A_{RZ} = C_{RE} \cdot B_{ZE}^{-1}$$

Mit Hilfsmittel: $A_{RZ} = \begin{pmatrix} 34 & 18 & 26 \\ 11 & 28 & 21 \\ 8 & 18 & 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Darstellung des Verflechtungsdiagramms



1.2 Bestimmung der variablen Stückkosten je Endprodukt

Variable Herstellungskosten pro Endprodukt: $\vec{k}_V = \vec{k}_R \cdot C_{RE} + \vec{k}_Z \cdot B_{ZE} + \vec{k}_E$

$$\vec{k}_V = (0{,}6 \quad 0{,}4 \quad 0{,}1) \cdot \begin{pmatrix} 34 & 18 & 26 \\ 11 & 28 & 21 \\ 8 & 18 & 36 \end{pmatrix} + (0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}2) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} + (0{,}9 \quad 0{,}8 \quad 1{,}1)$$

$$= (25{,}6 \quad 23{,}8 \quad 27{,}6) + (2{,}5 \quad 2{,}4 \quad 2{,}3) + + (0{,}9 \quad 0{,}8 \quad 1{,}1)$$

$$= (29 \quad 27 \quad 31)$$

Die variablen Stückkosten je Endprodukt betragen für Obst-Smoothie: 29 GE

Grüner-Smoothie: 27 GE

Obst-Gemüse-Smoothie: 31 GE

Variable Kosten für den Auftrag : $K_V = (29 \quad 27) \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix} = 19900$

Die variablen Kosten betragen 19900 GE für diesen Auftrag.

Entscheidung, ob der Auftrag angenommen werden soll

Erlös: $(30 \quad 27) \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix} = 20400$

Der Erlös des Auftrags übersteigt die variablen Kosten nur um 500 GE. Der Auftrag sollte nicht angenommen werden, da die auftragsbezogenen Fixkosten 550 GE betragen.

3 Stochastik

Formelsammlung zur Stochastik

Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$

Für das Gegenereignis $\overline{A}$: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Additionssatz $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Multiplikationssatz $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Alle Ergebnisse eines Zufallsexperiments sind gleichwahrscheinlich. $P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \frac{g}{m}$

Wahrscheinlichkeit und Baumdiagramm

Pfadmultiplikationsregel: Im Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Pfades gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf den Teilstrecken des Pfades.

Pfadadditionsregel: Im Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der in diesem Ereignis enthaltenen Ergebnisse.

Die Zufallsvariable X ist B(n; p; k)-verteilt; **Binomialverteilung** B(n; p; k)

Formel von Bernoulli $P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

Erwartungswert $\mu = E(X) = n \cdot p$

Varianz: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$ Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Kumulierte Binomialverteilung F(n; p; k):

Linksseitiges Intervall: $P(X \leq 8) = F(n; p; 8)$

Ablesen aus der Tabelle der kumulierten Binomialverteilung

Punktwahrscheinlichkeit: $P(X = 8) = B(n; p; 8)$

Ablesen aus der Tabelle der Binomialverteilung

Rechtsseitiges Intervall: $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$

Intervallwahrscheinlichkeit: $P(3 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 2)$

Kombinatorik

Anzahl der Stichproben bei k Ziehungen aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen	
geordnete Stichproben	n^k	$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$	(Variationen)
ungeordnete Stichproben	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	(Kombinationen)

Permutationen: Mögliche Anordnung aller n Elemente einer Menge

$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Anzahl der Permutationen, wenn die n Elemente untereinander verschieden sind.

III Musteraufgabensätze zur Zentralen Abiturprüfung 2023

Operator	Erläuterung
erläutern	Strukturen und Zusammenhänge erfassen, in Einzelheiten verdeutlichen und durch zusätzliche Informationen verständlich machen
skizzieren, graphisch darstellen	wesentliche Eigenschaften von Sachverhaltenoder Objekten graphisch darstellen – auch Freihandskizzen möglich
untersuchen	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien bearbeiten
vergleichen	Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln
begründen	Sachverhalte auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen – hierbei sind Regeln und mathematische Beziehungen zu nutzen
bestimmen, ermitteln	Zusammenhänge bzw. Lösungswege finden und die Ergebnisse formulieren
beurteilen, Stellung nehmen	zu einem Sachverhalt ein eigenständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren und begründen
herleiten, formulieren	eine Formel oder einen Zusammenhang aus bekannten Sachverhalten nachvollziehbar entwickeln
klassifizieren	eine Menge von Objekten nach vorgegebenen oder sinnvoll selbstständig zu wählenden Kriterien in Klassen einteilen
zeigen	Aussagen oder Sachverhalte unter Nutzung von gültigen Schlussregeln, Berechnungen bestätigen
beschreiben	Strukturen, Sachverhalte, Verfahren unter Verwendung der Fachsprache angemessen wiedergeben
bestätigen	Aussagen oder Sachverhalte mathematisch verifizieren
dokumentieren, darstellen	Gedankengang bzw. Herleitung der Problemlösung darlegen
veranschaulichen, verdeutlichen	einen Sachverhalt mit verbalen oder graphischen Erläuterungen versehen
angeben, nennen	Objekte, Sachverhalte, Begriffe, Daten ohne nähere Erläuterungen, Begründungen und ohne Darstellung von Lösungsansätzen oder Lösungswegen aufzählen
berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen
zeichnen	hinreichend exakte graphische Darstellungen von Objekten oder Daten anfertigen
beweisen, widerlegen, nachweisen	Beweise im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischen Schlüssen und Äquivalenzumformungen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen und Analogien, führen
vereinfachen, umformen	Terme, Aussagen, Formeln mittels geeigneter Strategien an den jeweiligen Sachverhalt anpassen

Aufgabensatz 1 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel **Lösungen Seite 159 - 162**

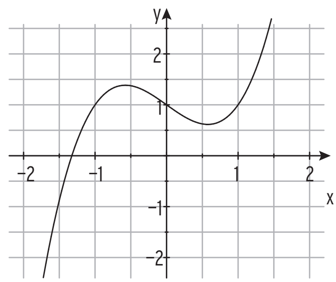
Aufgabe 1 (18 Punkte)

Analysis **Punkte**

1.1 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h durch

$f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$.

1.1.1 Die Abbildung zeigt den Graphen einer der drei Funktionen. Geben Sie an, um welche Funktion es sich handelt. Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt. 3



1.1.2 Die erste Ableitungsfunktion von h ist h′.

Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^1 h'(x)\,dx$. 2

1.2 Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$, gegeben.
Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f. 2

Stochastik

1.3 Bei der Wintersportart Biathlon wird bei jeder Schießeinlage auf fünf Scheiben geschossen. Ein Biathlet tritt bei einem Einzelrennen zu einer Schießeinlage an, bei der er auf jede Scheibe einen Schuss abgibt. Diese Schießeinlage wird modellhaft durch eine Bernoullikette mit der Länge 5 und der Trefferwahrscheinlichkeit p beschrieben. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Treffer.

1.3.1 Nennen Sie in diesem Sachzusammenhang das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit $P(X < 3)$ bestimmt werden kann. 1

1.3.2 Entscheiden Sie, welcher der beiden Terme die Wahrscheinlichkeit für genau vier Treffer beschreibt: (i) $\binom{5}{4} \cdot p \cdot (1-p)^4$ (ii) $\binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)$ 2

1.3.3 Erläutern Sie anhand eines Beispiels, dass die modellhafte Beschreibung der Schießeinlage durch eine Bernoullikette unter Umständen der Realität nicht gerecht wird. 2

Aufgabensatz 1

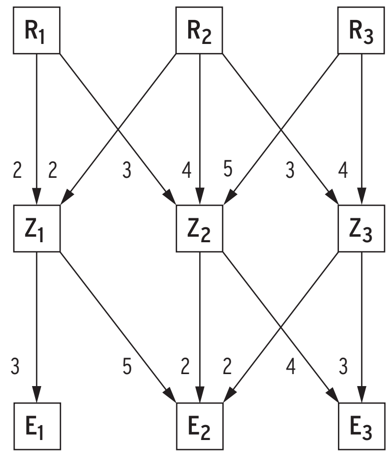
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Lineare Algebra **Punkte**

1.4 Ein Betrieb erzeugt aus drei Rohstoffen (R_1, R_2, R_3) drei Zwischenprodukte (Z_1, Z_2, Z_3), die zu drei Endprodukten (E_1, E_2, E_3) weiterverarbeitet werden. Es gibt Werte für a und b, so dass die Zusammenhänge durch den folgenden Verflechtungsgraphen und die Rohstoff-Endprodukt-Tabelle gegeben sind.

Verflechtungsgraph

Angaben in Mengeneinheiten



Rohstoff-Endprodukt-Tabelle

Anzahl der benötigten ME der Rohstoffe je ME des Endprodukts

Rohstoff \ Endprodrukt	E_1	E_2	E_3
R_1	*a*	16	12
R_2	6	*b*	25
R_3	0	18	32

1.4.1 Der Zusammenhang Rohstoff-Zwischenprodukt wird durch eine Matrix A_{RZ}, der Zusammenhang Zwischenprodukt-Endprodukt durch eine Matrix B_{ZE} und der Zusammenhang Rohstoff-Endprodukt durch eine Matrix C_{RE} beschrieben.

Geben Sie eine Beziehung zwischen diesen drei Matrizen an. 1

1.4.2 Bestimmen Sie die fehlenden Wert für und a b. 3

1.5 Betrachtet werden die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass B die zu A inverse Matrix ist. 2

Aufgabensatz 1

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 2 — Analysis (24 Punkte) **Punkte**

Die DüFa GmbH ist nur einer von vielen Herstellern auf dem Fahrradmarkt und sieht sich von daher einem starken Wettbewerb ausgesetzt.

2.1 Das Unternehmen hat bei dem Produkt Cityräder verschiedene Daten zur Gewinnsituation ermittelt:
Die Gewinnschwelle liegt bei 1 ME, dort beträgt der Grenzgewinn 7,75 GE/ME.
Für 2 ME beläuft sich der Gewinn auf 9,75 GE und steigt dort am stärksten an.
Aufgrund dieser vier Informationen soll für die Gewinnfunktion G die Gleichung $G(x) = ax^3 + b\,x^2 + cx + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ angenommen werden.

2.1.1 Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Gewinnfunktion auf, ohne dieses zu lösen. 6

Gehen Sie im Weiteren von der folgenden Gewinnfunktion aus:

$$G(x) = -x^3 + 6x^2 - 1{,}25x - 3{,}75$$

2.1.2 Berechnen Sie das Gewinnmaximum für das Produkt Cityräder. 6

2.2 Die Abteilung Controlling der DüFa GmbH hat ermittelt, dass die Gesamtkosten für die Produktion der Cityräder durch die Funktion
$K(x) = x^3 - 6x^2 + 19x + 3{,}75$ beschrieben werden.

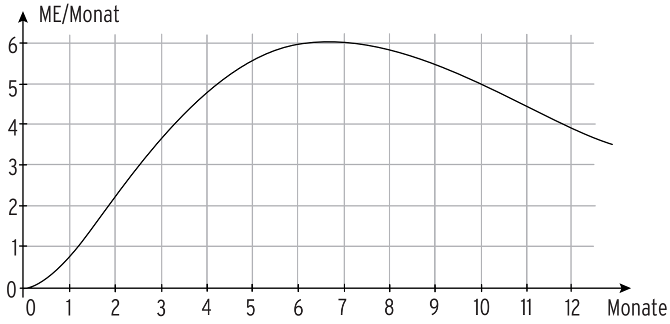
2.2.1 Bestimmen Sie den Deckungsbeitrag an der gewinnmaximalen Ausbringungsmenge von 3,89 ME, wenn Sie von einem Verkaufspreis von 17,75 GE/ME ausgehen. 4

Aufgabensatz 1

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 2 – Analysis (24 Punkte) Fortsetzung Punkte

2.3 Die Absatzzahlen für das Produkt werden durch die Funktion A (t in Monaten und A(t) in ME/Monat) beschrieben und sind im folgenden Graphen dargestellt:



2.3.1 Beurteilen Sie anhand der Graphik folgende Aussagen: 8

(1) Nach einem Jahr fällt der Absatz auf unter 4 ME/Monat.

(2) Der maximale Zuwachs der Absatzzahlen liegt im siebten Monat.

(3) Im ersten Monat steigt der Absatz progressiv.

(4) Im ersten Jahr wird ein Gesamtabsatz von mehr als 75 ME erzielt.

(Nach NRW, Berufskolleg 2016.)

Aufgabensatz 1

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 3 – Lineare Algebra (24 Punkte) Punkte

Die Düsseldorfer DüFa GmbH stellt Fahrräder für den anspruchsvollen heimischen Markt her und hat sich dabei auf Rahmen für Cityräder, Trekkingräder und Mountainbikes spezialisiert.
In einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus den vier Rohstoffen R1, R2, R3, R4 die Zwischenprodukte Z1, Z2, Z3 und aus diesen die Rahmen (Endprodukte) E1, E2, E3 hergestellt. Die folgenden Matrizen geben die benötigten Mengeneinheiten (ME) der Zwischenprodukte für die Endprodukte und der Rohstoffe für die Endprodukte an.

$$M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}; \qquad M_{RE} = \begin{pmatrix} 16 & 15 & 30 \\ 30 & 28 & 56 \\ 17 & 14 & 29 \\ 15 & 14 & 28 \end{pmatrix}$$

3.1 Die variablen Kosten in Geldeinheiten (GE) je Mengeneinheit ergeben sich aus den folgenden Tabellen:

Kosten der Rohstoffe:	R1	R2	R3	R4
	2	1,5	3	2
Fertigungskosten der Zwischenprodukte:		Z1	Z2	Z3
		12	5	8
Fertigungskosten der Endprodukte:		E1	E2	E3
		6	18	23

3.1.1 Berechnen Sie die Rohstoffkosten für eine Produktion von 250 ME von E1, 200 ME von E2 und 400 ME von E3. 5

3.1.2 Berechnen Sie die variablen Kosten je Mengeneinheit der Endprodukte. 8

3.2 Die Planungsabteilung sieht aufgrund von vorliegenden Kundenaufträgen für die kommende Produktionsperiode eine Produktion von 100 ME von E1 und 200 ME von E2 sowie einer noch nicht feststehenden Menge von E3 vor.
Im Lager befinden sich zur Herstellung der Rahmen E1, E2 und E3 nur noch 1 000 ME von Z1.
Ermitteln Sie, wie viele ME sich von E3 höchstens herstellen lassen und wie viele ME von Z2 und Z3 hierzu benötigt werden. 8

3.3 Zeigen Sie, dass die Matrix M_{ZE} eine Inverse besitzt. 3
(Teile aus NRW, Berufskolleg 2016.)

Aufgabensatz 1

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 4 – Stochastik (24 Punkte) **Punkte**

Seit Jahren gehören zum Fahrrad-Produktionsprogramm der DüFa GmbH auch E-Bikes. Im Fahrradgeschäft Weber e.K. werden jährlich mehrere Tausend Fahrräder (inkl. E-Bikes) verkauft. Erfahrungsgemäß sind 30 % der verkauften Fahrräder E-Bikes.

4.1 Betrachtet werden die nächsten 100 verkauften Fahrräder. Die Zufallsgröße X gebe dabei die Anzahl der darunter befindlichen E-Bikes an. Gehen Sie von einer Binomialverteilung mit p = 0,3 aus.

4.1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse: 8

Es werden E_1: genau 25 E-Bikes,
E_2: höchstens 42 E-Bikes,
E_3: mehr als 25 und weniger als 32 E-Bikes gekauft.

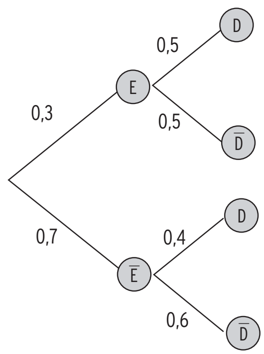
4.1.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Anzahl der E-Bikes um höchstens eine Standardabweichung σ vom Erwartungswert μ abweicht. 5

4.2 Für den Fahrradabsatz der Weber e.K. gilt das folgende Baumdiagramm.

Dabei gelten folgende Abkürzungen:

E $\triangleq$ verkauftes E-Bike

D $\triangleq$ verkauftes Fahrrad der DüFa GmbH



Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:

A: 15 % der verkauften Fahrräder der Weber e.K. sind E-Bikes der DüFa GmbH.

B: 43 % der von der Weber e.K. verkauften Fahrräder sind Räder der DüFa GmbH.

C: Mehr als die Hälfte aller von der Weber e.K. verkauften Fahrräder sind weder E-Bikes noch von der DüFa GmbH.

D: Die Weber e.K. verkauft insgesamt mehr E-Bikes der DüFa GmbH als andere Räder der DüFa GmbH. 11

(Teile aus Berufskolleg, NRW 2016.)

Musteraufgabensätze zur Zentralen Abiturprüfung 2023
Grundkursfach Mathematik - Lösungen

Aufgabensatz 1 Lösungen

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Analysis

1.1.1 Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion g ($g(x) = x^3 - x + 1$).
Die Funktion f ($f(x) = x^2 - x + 1$) ist eine quadratische, die nur eine Extremstelle haben kann.

Der Graph der Funktion h ($h(x) = x^4 + x^2 + 1$) ist achsensymmetrisch, der abgebildete Graph ist nicht achsensymmetrisch.

1.1.2 h ist eine Stammfunktion von h′. $\int_0^1 h'(x)dx = h(1) - h(0) = 3 - 1 = 2$

1.2 Bedingung für die Nullstelle: $f(x) = 0$ $2e^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$
Logarithmieren: $\frac{1}{2}x = \ln(\frac{1}{2})$
Nullstelle von f: $x_1 = 2\ln(\frac{1}{2})$

Stochastik

1.3.1 Der Biathlet trifft höchstens drei Scheiben.

1.3.2 Begründete Entscheidung für Term (ii): p ist die Trefferwahrscheinlichkeit
$p^4 \cdot (1 - p)$ bedeutet dann 4 Treffer und einen Nichttreffer

1.3.3 z. B.: Trifft der Biathlet bei keinem der ersten drei Schüsse, so hat er möglicherweise aufgrund zunehmender Nervosität beim vierten Schuss eine geringere Trefferwahrscheinlichkeit.

Lineare Algebra

1.4.1 Zusammenhang: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$

1.4.2 Mit $A_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B_{ZE} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $C_{RE} = \begin{pmatrix} a & 16 & 12 \\ 6 & b & 25 \\ 0 & 18 & 32 \end{pmatrix}$

ergibt sich aus $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$: $a = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 6$
$b = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 24$

1.5 $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

B ist die zu A inverse Matrix.

Aufgabensatz 1 Lösungen

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 2 – Analysis (24 Punkte)

2.1.1 Gewinnfunktion G: $G(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$;

Grenzgewinn: $G'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; 2. Ableitung von G: $G''(x) = 6ax + 2b$

LGS: Gewinnschwelle 1 ME: $G(1) = 0$ $\quad a + b + c + d = 0$

Grenzgewinn 7,75 GE/ME: $G'(1) = 7{,}75$ $\quad 3a + 2b + c = 7{,}75$

Gewinn 9,75 GE: $G(2) = 9{,}75$ $\quad 8a + 4b + 2c + d = 9{,}75$

steigt dort am stärksten an: $G''(2) = 0$ $\quad 12a + 2b = 0$

2.1.2 Gewinnfunktion G mit $G(x) = -x^3 + 6x^2 - 1{,}25x - 3{,}75$

Maximaler Gewinn

Ableitungen: $G'(x) = -3x^2 + 12x - 1{,}25$; $G''(x) = -6x + 12$

Notwendige Bedingung: $G'(x) = 0$ $\quad -3x^2 + 12x - 1{,}25 = 0$

$x_1 = 3{,}89 \vee x_2 = 0{,}11$

Mit $G''(3{,}89) < 0$ und $G(3{,}89) = 23{,}32$ gilt:

Bei einer Produktion von 3,89 ME wird der maximale Gewinn von 23,32 GE erzielt.

Hinweis: $G''(0{,}11) > 0$ liefert eine Minimalstelle.

2.2 $K(x) = x^3 - 6x^2 + 19x + 3{,}75$

2.2.1 Deckungsbeitrag $DB(x) = G(x) + K_{fix}$ in $x = 3{,}89$:

$DB(3{,}89) = G(3{,}89) + K_{fix} = 23{,}32 + 3{,}75 = 27{,}07$

auch mit $E(x) = 17{,}75x$: $DB(x) = E(x) - K_v(x)$; $\quad DB(3{,}89) = E(3{,}89) - K_v(3{,}89)$

$= 69{,}05 - 41{,}98 = 27{,}07$

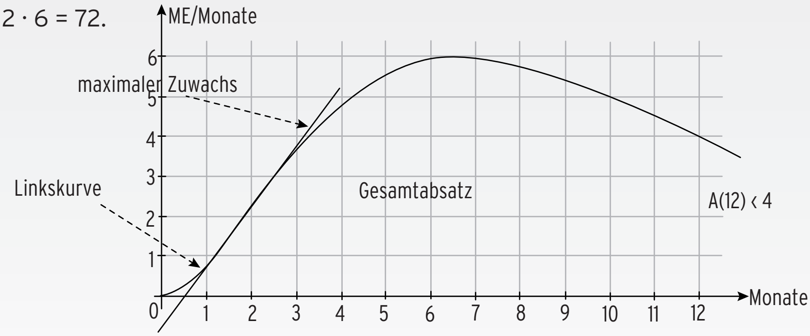
Deckungsbeitrag: 27,07 GE.

2.3.1 (1) wahr; $A(12) < 4$; A ist fallend

(2) falsch; Der maximale Zuwachs der Absatzzahlen liegt im dritten Monat, dann ist die Absatzkurve am steilsten.

(3) wahr, der Wendepunkt der Absatzkurve ist bei etwa bei 2 ME.

(4) falsch, der Inhalt der Fläche unterhalb der x-Achse auf [0; 12] beträgt weniger als $12 \cdot 6 = 72$.



Aufgabensatz 1 Lösungen

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS Lösungen

Aufgabe 3 – Lineare Algebra (24 Punkte)

3.1.1 Rohstoffkosten fürdie Produktion $\vec{x} = \begin{pmatrix} 250 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}$

$$\vec{k}_R = (2 \quad 1{,}5 \quad 3 \quad 2) \begin{pmatrix} 16 & 15 & 30 \\ 30 & 28 & 56 \\ 17 & 14 & 29 \\ 15 & 14 & 28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 250 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = 182\,700$$

Die Rohstoffkosten betragen 182 700 GE.

3.1.2 Variable Kosten je Mengeneinheit der Endprodukte

$$\vec{k}_V = \vec{k}_R \cdot M_{RE} + \vec{k}_Z \cdot M_{ZE} + \vec{k}_E$$

$$= (2 \quad 1{,}5 \quad 3 \quad 2) \begin{pmatrix} 16 & 15 & 30 \\ 30 & 28 & 56 \\ 17 & 14 & 29 \\ 15 & 14 & 28 \end{pmatrix} + (12 \quad 5 \quad 8) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} + (6 \quad 18 \quad 23)$$

$$= (158 \quad 142 \quad 287) + (62 \quad 61 \quad 120) + (6 \quad 18 \quad 23) = (226 \quad 221 \quad 430)$$

3.2 Produktion $\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Zwischenproduktvektor: $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1000 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

Einsetzen in $M_{ZE} \cdot \vec{x} = \vec{z}$ ergibt das LGS $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

(1) $100 + 200 + 2x_3 = 1000 \Rightarrow x_3 = 350$

Einsetzen ergibt (2): $200 + 1000 + 8 \cdot 350 = z_2 \Rightarrow z_2 = 4000$

Einsetzen ergibt (3): $500 + 600 + 7 \cdot 350 = z_3 \Rightarrow z_3 = 3550$

Es lassen sich von E3 höchstens 350 ME herstellen. Es werden 4000 ME von Z2 und 3550 ME Z3 hierzu benötigt.

3.3 Umformung von M_{ZE} in Richtung Dreiecksform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix M_{ZE} hat den vollen Rang ($Rg(M_{ZE}) = 3$), also ist M_{ZE} invertierbar.

Aufgabensatz 1 Lösungen

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 4 – Stochastik (24 Punkte)

X: Anzahl der unter 100 verkauften Fahrrädern befindlichen E-Bikes

X ist binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,3

4.1.1 Wahrscheinlichkeiten

$P(E_1) = P(X = 25) = 0{,}0496$

$P(E_2) = P(X \leq 42) = 0{,}9960$

$P(E_3) = P(25 < X < 32) = P(X \leq 31) - P(X \leq 25) = 0{,}4700$

4.1.2 Erwartungswert $\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}3 = 30$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = 4{,}58$

$P(26 \leq X \leq 34) = 0{,}6740$

4.2 A ist eine wahre Aussage: 0,3 · 0,5 = 0,15 = 15 %

B ist eine wahre Aussage: 0,3 · 0,5 + 0,7 · 0,4 = 0,43 = 43 %

C ist eine falsche Aussage: 0,7 · 0,6 = 0,42

42 % aller von der Weber e.K. verkauften Fahrräder sind weder E-Bikes noch von der DüFa GmbH.

D ist eine falsche Aussage;

15 % der E-Bikes der DüFa GmbH (vgl. Ereignis A)

0,7 · 0,4 = 28 % andere Räder der DüFa GmbH.

Aufgabensatz 2 Grundkursfach **Mathematik**

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel Lösungen Seite 168 – 172

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Analysis **Punkte**

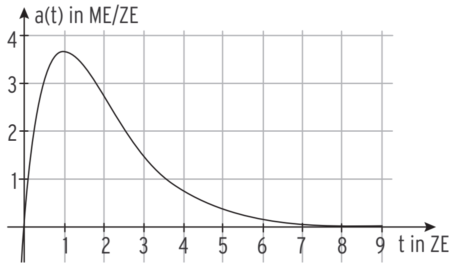
1.1 Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x}$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$.

1.1.1 Gegeben ist die Gleichung $\frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} = \frac{2}{a}$. Bestimmen Sie eine Lösung für x. 2

1.1.2 Bestimmen Sie alle Werte für a so, dass der vertikale Abstand der Graphen von f_a und f_a' an der Stelle $x = 0$ mindestens 3 beträgt. 3

1.2 Die PRINTFIX AG fertigt innovative und hochwertige 3D-Drucker. Der momentane Absatz in Mengeneinheiten pro Zeiteinheit (ME/ZE) kann durch den Graphen a des Produktlebenszyklus $a(t) = 10t \cdot e^{-t}$ mit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschrieben werden.

Bestimmen Sie ausschließlich mit Hilfe der notwendigen Bedingung den Zeitpunkt, an dem die PRINTFIX AG die meisten 3D-Drucker pro ZE absetzt. 3



Stochastik

In einer Urne U_1 befinden sich vier rote und zwei gelbe Kugeln, in einer Urne U_2 zwei rote, eine gelbe und eine blaue Kugel.

1.3 Eine der beiden Urnen wird zufällig ausgewählt. Anschließend wird daraus zweimal hintereinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden kann, dass beide entnommenen Kugeln rot sind. 2

1.4 Eine der beiden Urnen wurde zufällig ausgewählt; aus dieser wurde eine Kugel zufällig entnommen. Die entnommene Kugel ist gelb oder blau. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel aus der Urne U_1 stammt. 3

Lineare Algebra

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.5 Entscheiden Sie für jeden der Terme A + B und A · B, ob er definiert ist. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung. 2

1.6 Bestimmen Sie für die Matrix $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Werte von a, b, c und d so, dass $B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt. 3

Aufgabensatz 2 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Die Firma VELOTRITT GmbH stellt Fahrräder des unteren Preissegments her, die über Discountmärkte und das Internet vertrieben werden. Einige Bauteile dieser Fahrräder werden bei unterschiedlichen Lieferanten zugekauft.

In allen Aufgaben gilt ME ≙ Mengeneinheiten und GE ≙ Geldeinheiten.

Aufgabe 2 – Analysis (28 Punkte) **Punkte**

Die VELOTRITT GmbH plant die Markteinführung der neuen Kinderradserie *Kiddystunt*.

2.1 Zur Vorbereitung der Markteinführung wurden detaillierte Marktuntersuchungen durchgeführt, denen zufolge in den ersten drei Jahren mit einem prognostizierten Verlauf der Absatzentwicklung entsprechend der Funktion

$$a(t) = 400 + (150t - 50) \cdot e^{-0{,}1t};\ t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$$

zu rechnen ist. Dabei entspricht a(t) der Absatzmenge in ME pro Monat und t der seit der Markteinführung vergangenen Zeit in Monaten.

2.1.1 Berechnen Sie die Absatzmenge pro Monat, mit der ein Jahr nach Markteinführung zu rechnen ist. 3

2.1.2 Zeigen Sie, dass die erste und die zweite Ableitungsfunktion von a den folgenden Gleichungen entsprechen. 6

$$a'(t) = e^{-0{,}1t}(155 - 15t) \quad \text{und} \quad a''(t) = e^{-0{,}1t}(1{,}5t - 30{,}5)$$

2.1.3 Berechnen Sie den Monat, in welchem die Funktion a ihren Wendepunkt besitzt. 6
Hinweis: Auf den Nachweis der hinreichenden Bedingung wird verzichtet!

2.1.4 Interpretieren Sie die in 2.1.3 berechnete Wendestelle ökonomisch. 2

2.1.5 Bestimmen Sie die monatliche Absatzmenge, die sich laut Prognose langfristig einstellen wird. 3

2.2 Die Beleuchtungsanlagen für die neue Kinderradserie Kiddystunt werden von der BLENDOLUX KG geliefert. In der Abteilung Controlling ist man sich bei BLENDOLUX unsicher, ob die Kostenfunktion $K(x) = 4x^3 - 90x^2 + 700x + 400$ die tatsächliche Kostenentwicklung modelliert. Dazu wurden betriebliche Zahlen erhoben. 8
Die Kapazitätsgrenze für die Beleuchtungsanlagen liegt bei 18 ME.
Überprüfen Sie, ob die obige Kostenfunktion den erhobenen Bedingungen genügt.

- Es entstehen Fixkosten in Höhe von 400 GE.
- Bei 8 ME betragen die Gesamtkosten 2 288 GE.
- Die Grenzkosten sind bei 7,5 ME minimal.
- Die Gesamtkosten an der Kapazitätsgrenze betragen 7 168 GE.
- Bei einer Produktion von 2 ME betragen die Grenzkosten 388 GE/ME.
- Bei einer Produktionsmenge von 5 ME betragen die durchschnittlichen Kosten 430 GE/ME.

Aufgabensatz 2

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 3 – Lineare Algebra (28 Punkte) **Punkte**

Die VELOTRITT GmbH stellt die Rahmen der Fahrradmodelle City und Tour in Eigenfertigung her. Um sich von der Konkurrenz abzuheben, werden für diese Rahmen jedes Jahr neue modische Lackierungen produziert. Dabei werden in einem zweistufigen Produktionsprozess zunächst aus den drei Ausgangsfarben R1, R2 und R3 die drei Modefarben Z1, Z2 und Z3 gemischt und aus diesen dann die Lackierungen für die Modelle City (E1) und Tour (E2) hergestellt.

Es gelten folgende Mengenbeziehungen (in ME) mit $a, b \in \mathbb{R}^{\geq 0}$:

	Z1	Z2	Z3
R1	2	3	1
R2	0	2	2
R3	3	5	4

	E1	E2
Z1	1	2
Z2	3	7
Z3	a	5

	E1	E2
R1	13	b
R2	10	24
R3	26	61

3.1 Berechnen Sie die Zahlenwerte für a und b in den Tabellen mithilfe der Matrizenrechnung. 3

3.2 Im Folgenden seien a = 2 und b = 30.

3.2.1 Die VELOTRITT GmbH benötigt für einen Auftrag 15 ME der Lackierung E1 und 18 ME der Lackierung E2. Berechnen Sie, wie viele ME der drei Modefarben Z1, Z2 und Z3 für diesen Auftrag erforderlich sind. 4

3.2.2 Für eine Sonderlackierung können im Rahmen eines alternativen Produktionsprozesses die Modefarben Z1, Z2 und Z3 auch entsprechend der folgenden Matrix gemischt werden: 8

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Wegen Sanierungsarbeiten am Boden der Lagerhalle muss das Rohstofflager kurzfristig geräumt werden. Der Lagerbestand von R1 beträgt 999 ME, der von R2 beträgt 826 ME und von R3 befinden sich noch 2 411 ME im Lager. Bestimmen Sie den ökonomisch sinnvollen Lösungsvektor, mit welchem der Lagerbestand im Rahmen des alternativen Produktionsprozesses ohne Rest aufgebraucht wird.

Zentrale Abiturprüfung 2021

Grundkursfach Mathematik

Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel Lösungen Seite 220 - 225

Aufgabenstellung

Die *Snowsporting GmbH* ist ein deutscher Hersteller von Wintersportartikeln und vertreibt diese weltweit. Neben verschiedenen Arten von Ski, Bindungen und Skistöcken werden zusätzlich Snowboards, Skischuhe, Skibekleidung und sonstige Accessoires mit dem Label Snowsporting als Handelsware verkauft

Aufgabe 1 (21 Punkte)

1.1 **Analysis**

Das Unternehmen geht davon aus, dass sich die Absatzzahlen des neu einzuführenden Skimodells Allmountain Cross gemäß der Funktion a entwickeln:

$a(t) = 6 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t} + 0{,}5 \quad \text{mit } t \geq 0$

Hierbei gibt t die Anzahl der Monate nach Produkteinführung (t = 0) und a(t) die abgesetzten Mengeneinheiten pro Monat (ME/Monat) an. Dabei entspricht 1 ME 1000 Paar Ski.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion a.

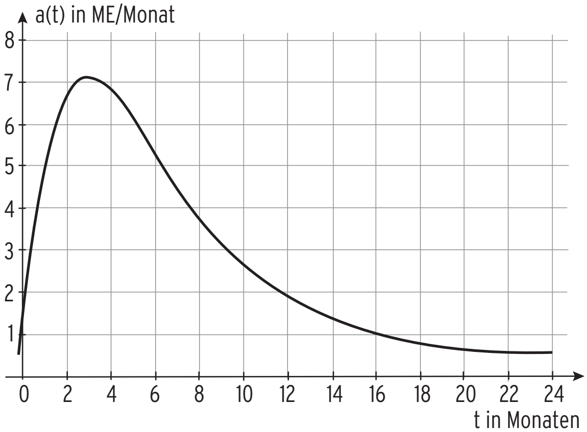


Abbildung 1

1.1.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Funktion a ihr Maximum erreicht.
Nutzen Sie ohne Nachweis: $a''(t) = \left(-4 + \frac{2}{3} \cdot t\right) \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t}$ (6 Punkte)

1.1.2 Nehmen Sie Stellung zur Aussage: „Langfristig wird der Absatz des Modells je Monat etwa 1000 Paar Ski betragen.“ (3 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2021 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

1.2 **Lineare Algebra/Analytische Geometrie**

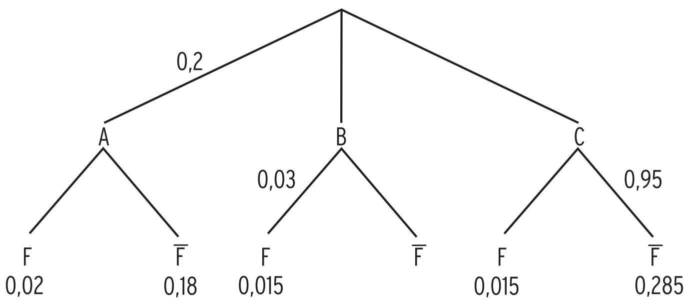
Das Unternehmen produziert aus den Komponenten K_1, K_2 und K_3 die Hauptbestandteile H_1, H_2 und H_3. Im nächsten Schritt werden aus diesen Hauptbestandteilen die drei Skistockmodelle S_1, S_2 und S_3 gefertigt.
Die Matrizen A_{KH}, B_{HS} und C_{KS} geben an, wie viele Mengeneinheiten (ME) von H_1 bis H_3 beziehungsweise wie viele ME von K_1 bis K_3 in je eine ME von S_1 bis S_3 beziehungsweise in je eine ME von H_1 bis H_3 eingehen.

Das Verflechtungsdiagramm in Anlage 1 gibt die jeweilige Teileverwendung in den beiden Produktionsstufen an.

1.2.1 Ergänzen Sie alle fehlenden Werte in den Matrizen und dem Verflechtungsdiagramm in Anlage 1. (6 Punkte)

1.3 **Stochastik**

Die Snowsporting GmbH produziert ein besonders erfolgreiches Skimodell an drei verschiedenen Standorten A, B und C.
Eine interne Qualitätsanalyse hat ergeben, dass immer wieder ein bestimmter Produktionsfehler F entsteht und Ski mit diesem Fehler aus Sicherheitsgründen nicht verkauft werden dürfen.
Das folgende Baumdiagramm stellt den Sachverhalt dar:



1.3.1 Ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten des obigen Baumdiagramms in Anlage 2. (4 Punkte)

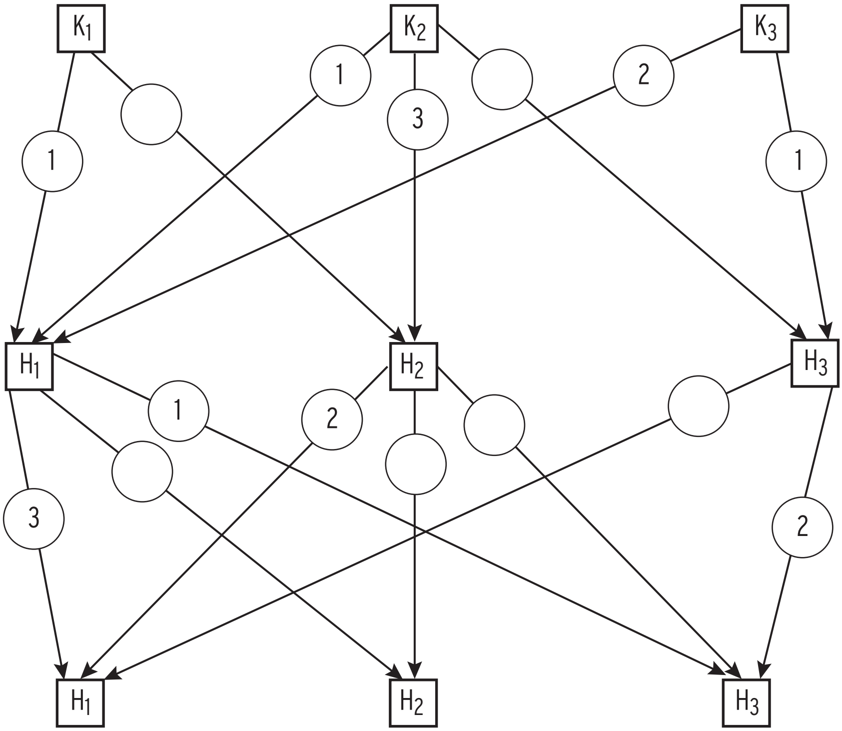
1.3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Skimodell den Produktionsfehler F aufweist. (2 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2021 Grundkursfach Mathematik

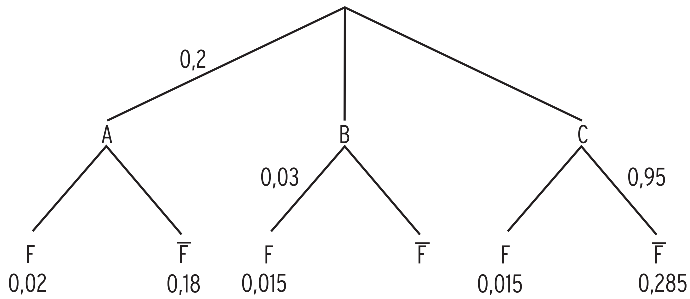
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Anlage 1 zu Aufgabe 1.2.1

$$A_{KH} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \_\_ & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_{HS} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & 1 \\ 2 & \_\_ & 1 \\ 1 & \_\_ & 2 \end{pmatrix} \quad C_{KS} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & \_\_ \\ 10 & 11 & 6 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$



Anlage 2 zu Aufgabe 1.3.1



Zentrale Abiturprüfung 2021 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabenstellung **Lösungen Seite 204 - 208**

Die *Snowsporting GmbH* ist ein deutscher Hersteller von Wintersportartikeln und vertreibt diese weltweit. Neben verschiedenen Arten von Ski, Bindungen und Skistöcken werden zusätzlich Snowboards, Skischuhe, Skibekleidung und sonstige Accessoires mit dem Label Snowsporting als Handelsware verkauft.

In allen Aufgaben gilt: ME ≙ Mengeneinheiten und GE ≙ Geldeinheiten

Aufgabenstellung

Aufgabe 2 – Analysis (28 Punkte)

Das Top-Skimodell Wizzard soll erstmalig in der Saison 2021/22 auf den Markt kommen. Das Modell Swing hat sich bereits auf dem Markt etabliert.

2.1 Die *Snowsporting GmbH* geht davon aus, dass die Kostensituation für das Modell Wizzard durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion 3. Grades entsprechend der Gleichung $K(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 5{,}25 \cdot x + 12{,}5$ beschrieben werden kann. Hierbei gibt $x \geq 0$ die produzierte Menge in ME und K(x) die Kosten in GE an. Die Kapazitätsgrenze wird bei 5 ME erreicht.

2.1.1 Berechnen Sie ...

(1) die Gesamtkosten sowie die Grenzkosten bei einer Produktion von 3 ME.

(2) die Produktionsmenge, bei der die Kostenfunktion von einem degressiven in einen progressiven Kostenanstieg wechselt.

(3) die variablen Stückkosten bei einer Produktion von 1,5 ME. (8 Punkte)

2.1.2 Zeigen Sie, dass der Graph der Kostenfunktion K streng monoton steigt. (3 Punkte)

2.1.3 Ermitteln Sie alle Produktionsmengen, bei denen die Grenzkosten 3 GE/ME betragen. (4 Punkte)

2.1.4 Berechnen Sie die Grenzkosten und beurteilen Sie deren ökonomische Bedeutung bei einer Produktionsmenge von 4 ME und einem konstanten Preis von 30 GE/ME. (4 Punkte)

2.2 Die *Snowsporting GmbH* verwendet für das erste Halbjahr des kommenden Geschäftsjahres zur Prognose der Absatzrate in ME/Monat ihres Modells Swing die Funktion a. Dabei gibt $0 \leq t \leq 6$ die Zeit in Monaten seit Beginn des Geschäftsjahres an: $a(t) = (3000 \cdot t^3 + 6000 \cdot t^2 + 3000 \cdot t) \cdot e^{-0{,}9 \cdot t}$

2.2.1 Ermitteln Sie die Wendestellen des Graphen von a und deuten Sie diese im Sachzusammenhang. (5 Punkte)

2.2.2 Für das Modell Swing hat die Geschäftsleitung folgende Zielvorgabe gesetzt: „Über einen Zeitraum von mindestens drei Monaten soll die Absatzrate über 5 000 ME/Monat liegen.“

Überprüfen Sie, ob die Funktion a dieser Zielvorgabe entspricht. (4 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 3 – Lineare Algebra/Analytische Geometrie (28 Punkte)

Die hergestellten Skier enthalten vier Grundstoffe: Polyethylen (G_1), Polypropylen (G_2), Flüssigkristallpolymer (G_3) und Polyurethan (G_4). Aus diesen Grundstoffen werden zunächst die einzelnen Komponenten hergestellt. Dazu gehören der Druckgurt (K_1), der Skikern (K_2), der Zuggurt (K_3) und die Versteifung (K_4).
Die Komponenten werden dann zu den Modellen Normal (M_1), Short (M_2) und Extra Long (M_3) verarbeitet. Die Zusammensetzung der Produkte wird in den untenstehenden Tabellen veranschaulicht, wobei alle Werte in Mengeneinheiten (ME) angegeben sind.
Für die Grundstoffe gilt: Eine Mengeneinheit wiegt 1 kg.

	K_1	K_2	K_3	K_4
G_1	12	10	8	14
G_2	11	15	14	11
G_3	9	5	10	13
G_4	10	10	12	12

Die folgende Tabelle gibt die Mengeneinheiten der Komponenten für das jeweilige Modell an.

	M_1	M_2	M_3
K_1	0,5	0,25	1,25
K_2	1,25	0,5	0,75
K_3	1,25	0,75	1,75
K_4	0,75	0	1,5

3.1 Der aktuelle Lagerbestand beträgt 8 100 ME von G_1, 8 800 ME von G_2, 6 600 ME von G_3 und 7 700 ME von G_4.
Auf Grund von Umbaumaßnahmen sollen die Grundstoffe vollständig zu Komponenten K_1 bis K_4 verarbeitet werden, so dass das Lager gänzlich geräumt wird.

3.1.1 Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem zur Lösung des beschriebenen Problems auf und überprüfen Sie dieses auf seine Lösbarkeit. (6 Punkte)

3.1.2 Eine mögliche Darstellung des Produktionsvektors $\vec{v}$ zur vollständigen Räumung des Lagers lautet: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 525 - 15 \cdot t \\ 50 + 6 \cdot t \\ 162{,}5 - 2{,}5 \cdot t \\ 10 \cdot t \end{pmatrix}$

Ermitteln Sie die maximale Menge, welche von K_4 produziert werden könnte.

(5 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 3 – Lineare Algebra/Analytische Geometrie (28 Punkte)

3.1.3 Die *Snowsporting GmbH* erhält einen Auftrag über 200 ME von K_2.
Von K_3 wird die doppelte Menge von K_2 bestellt. K_1 und K_4 werden nicht bestellt.
Prüfen Sie, ob der in 3.1 genannte Lagerbestand an Grundstoffen für diesen Auftrag ausreicht. (4 Punkte)

3.1.4 Eine Mitarbeiterin der *Snowsporting GmbH* behauptet zu dem in 3.1 genannten Lagerbestand: „Bei diesem Lagerbestand können von K_2 600 ME hergestellt werden, wenn von den anderen Komponenten nichts produziert wird.“
Bewerten Sie diese Behauptung. (4 Punkte)

3.2 Um die Skier leichter zu machen, wurde die Zusammensetzung der Komponenten verändert und dabei der Grundstoff G_4 durch Carbon (G_4^{neu}) ersetzt. Die neue Zusammensetzung ergibt sich aus der folgenden Tabelle:
Eine Mengeneinheit (ME) der Grundstoffe entspricht jeweils 1 kg.

	K_1	K_2	K_3	K_4
G_1	12	10	8	14
G_2	11	15	14	11
G_3	9	5	10	13
G_4^{Neu}	0	2	4	6

3.2.1 Die neue Zusammensetzung wirkt sich besonders auf das Modell M_3 aus.
Zeigen Sie, dass eine Mengeneinheit des Modells M_3 193 kg wiegt. (4 Punkte)

3.2.2 Für die Carbon-Komponenten ergeben sich die folgenden Material- und Fertigungskosten. Die Kosten für die Grundstoffe und Fertigung der Komponenten betragen zusammen:

Komponenten	K_1	K_2	K_3	K_4
Kosten in GE/ME	7,20	7,79	10,82	12,46

Die Fertigungskosten der Modelle betragen:

Modell	M_1	M_2	M_3
Kosten in GE/ME	120	140	215

Bestimmen Sie die Höhe der anfallenden variablen Kosten je Mengeneinheit der Modelle. (5 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 4 – Stochastik (28 Punkte)

Die *Snowsporting GmbH* erhält in den letzten Monaten vermehrt Kundenbeschwerden wegen Qualitätsmängeln des Snowboards SnowPro.
Die Snowboards werden von der Snowsporting GmbH nicht selbst produziert, sondern über einen Lieferanten bezogen. Dieser garantiert, dass durchschnittlich 98 % seiner ausgelieferten Snowboards des Modells SnowPro fehlerfrei sind und somit den höchsten Qualitätsstandards genügen.

4.1 Die *Snowsporting GmbH* möchte sich nun selbst einen Überblick über die Qualität der Snowboards verschaffen und untersucht die letzte Lieferung von 450 Snowboards des Modells SnowPro.
Die *Snowsporting GmbH* geht davon aus, dass die Zufallsgröße X, welche die Anzahl der fehlerhaften Snowboards angibt, binomialverteilt ist.

4.1.1 Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X als binomialverteilt angenommen werden kann.

(3 Punkte)

4.1.2 Für die Qualitätssicherung sind die folgenden drei Ereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten von Bedeutung.

E_1: Die Lieferung enthält genau die zu erwartende Anzahl an fehlerhaften Snowboards.

E_2: Die Lieferung enthält mindestens 8, aber weniger als 16 fehlerhafte Snowboards.

E_3: Die Lieferung enthält mehr als 440 fehlerfreie Snowboards.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse.

(6 Punkte)

4.1.3 Wenn mindestens 4 % der Snowboards in der Lieferung fehlerhaft sind, reklamiert die *Snowsporting GmbH* die Lieferung des Modells SnowPro.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine solche Reklamation bei der Lieferung eintritt.

(3 Punkte)

4.1.4 Die Liefermenge wird erhöht.
Bestimmen Sie, wie viele Snowboards mindestens geliefert werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens 450 fehlerfreie Snowboards in der Lieferung enthalten sind.

(4 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 4 – Stochastik (Fortsetzung)

4.2 Der Zulieferer der Snowboards hat auch von anderen Händlern eine Rückmeldung zur schlechten Qualität seiner Snowboards bekommen. Er führt daraufhin eine Kontrolle nach neuen Qualitätsstandards ein. Ein Kontrollautomat soll die Qualität der Snowboards testen und fehlerhafte aussortieren. Allerdings kann es vorkommen, dass dabei fehlerhafte Snowboards nicht aussortiert oder fehlerfreie Snowboards aussortiert werden. Stichproben ergaben, dass 90 % der Snowboards den neuen Qualitätsstandards entsprechen und somit fehlerfrei sind. Der Automat sortiert 11,3 % aller Snowboards aus. Aufgrund von Messfehlern kommt es in 1,8 % aller Fälle vor, dass ein Snowboard fehlerfrei ist und trotzdem aussortiert wird.

4.2.1 Stellen Sie den obigen Sachverhalt mit Hilfe eines Baumdiagramms mit allen Pfad- und Pfadendwahrscheinlichkeiten oder einer Vierfeldertafel dar.

(4 Punkte)

4.2.2 Überprüfen Sie, ob das Ereignis "Snowboard ist fehlerfrei" und das Ereignis "Snowboard wird vom Automaten aussortiert" stochastisch abhängig sind.

(4 Punkte)

4.2.3 Die Produktionsleiterin behauptet, dass fast 16 Prozent der vom Kontrollautomaten aussortierten Snowboards in Wirklichkeit fehlerfrei sind. Beurteilen Sie diese Aussage.

(4 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2021 Lösungen

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi) Lösungen

1.1 Analysis

$a(t) = 6 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t} + 0{,}5 \quad \text{mit } t \geq 0$

1.1.1 Zeitpunkt, zu dem die Funktion a ihr Maximum erreicht

Ableitung mit Produkt- und Kettenregel:

$a'(t) = 6 \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t} + 6 \cdot t \cdot (-\frac{1}{3})\, e^{-\frac{1}{3} \cdot t} = (6 - 2 \cdot t) \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t}$

Notwendige Bedingung: $a'(t) = 0$ $\quad 6 - 2 \cdot t = 0$ für $t = 3$ $\quad (e^{-\frac{1}{3} \cdot t} > 0)$

$a''(t) = (-4 + \frac{2}{3} \cdot t) \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t}$

Hinreichende Bedingung: $a'(t) = 0 \wedge a''(t) < 0$

$a''(3) = (-4 + \frac{2}{3} \cdot 3) \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot 3} = -2e^{-1} = -\frac{2}{e} < 0$

Genau drei Monate nach Produkteinführung wird der maximale Absatz pro Monat erreicht.

1.1.2 Langfristiger Absatz

Der erste Summand ($6 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t}$) des Funktionsterms von a geht gegen 0.

(Da der Exponent der Exponentialfunktion gegen $-\infty$ strebt und das Grenzverhalten der Exponentialfunktion hier dominiert.)

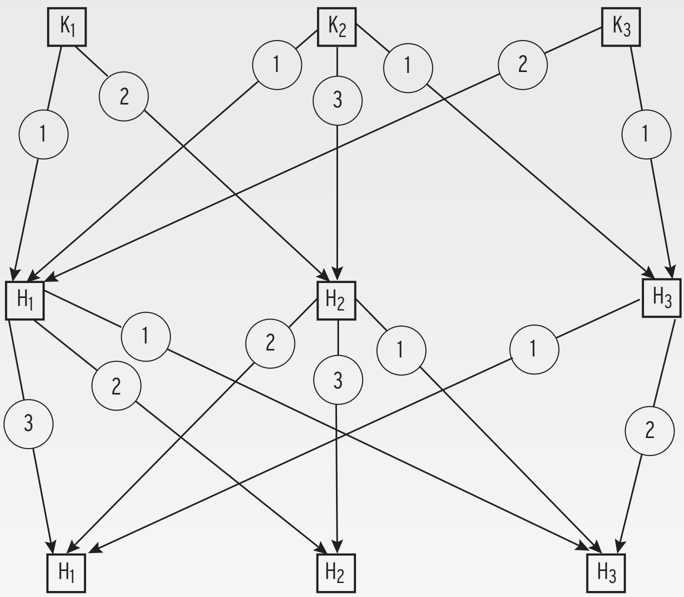
Der zweite Summand ist konstant 0,5, also nähert sich der Funktionsgraph von a für größer werdende x-Werte dem y-Wert 0,5 an. Situationsbezogen würde dies bedeuten, dass langfristig 500 Paar Ski pro Monat verkauft würden. Die Aussage ist also falsch.

1.2 Lineare Algebra

1.2.1 $A_{KH} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \mathbf{1} & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B_{HS} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & 1 \\ 2 & \mathbf{3} & 1 \\ 1 & \mathbf{0} & 2 \end{pmatrix}$

$C_{KS} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & \mathbf{3} \\ 10 & 11 & 6 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

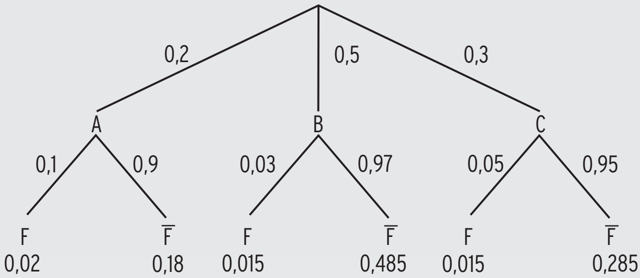


Zentrale Abiturprüfung 2021 Lösungen

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi) Lösungen

1.3 Stochastik

1.3.1 Anlage 2



1.3.2 P(F) = 0,02 + 0,015 + 0,015 = 0,05 = 5 %

Zentrale Abiturprüfung 2021 Lösungen

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 2 - Analysis

2.1 $K(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 5{,}25 \cdot x + 12{,}5$; $x_{kap} = 5$ $(0 \leq x \leq 5)$

2.1.1 (1) Gesamtkosten $K(3) = 28{,}25$

Grenzkosten $K'(x) = 3 \cdot x^2 - 6x + 5{,}25$; $K'(3) = 14{,}25$

Bei einer Produktion von 3 ME betragen die Gesamtkosten 28,25 GE und die Grenzkosten 14,25 GE/ME

(2) Wechsel von degressivem in progressivem Kostenanstieg

Der Ansatz $K''(x) = 0$ liefert $6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Aufgrund der Ertragsgesetzlichkeit von K liegt ein Wechsel von einer Rechts- zu einer Linkskrümmung an der Stelle x = 1 vor.

(3) Variable Stückkosten

$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = x^2 - 3x + 5{,}25$; $k_v(1{,}5) = 3$

Die variablen Stückkosten betragen 3 GE/ME bei einer Produktionsmenge von 1,5 ME.

2.1.2 Graph von K ist streng monoton

$K'(x) = 0$ $\qquad 3x^2 - 6x + 5{,}25 = 0$ keine Lösung wegen $D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 12{,}5 < 0$

$K'(1) = 2{,}25 > 0$

Die Gleichung $K'(x) = 0$ besitzt keine reelle Lösung.

Folglich ist $K'(x) > 0$ für alle $x \in D_{ök}$

Zentrale Abiturprüfung 2021 Lösungen

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 2 - Analysis

2.1.3 Produktionsmengen mit Grenzkosten 3 GE/ME

Ansatz: $K'(x) = 3$ $\quad 3x^2 - 6x + 5{,}25 = 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2{,}25 = 0$

Lösungen: $\quad x = 0{,}5 \vee x = 1{,}5$

Die Grenzkosten betragen 3 GE/ME nur für 0,5 ME und 1,5 ME.

2.1.4 Grenzkosten bei 4 ME und einem konstanten Preis von 30 GE/ME

Berechnung der Grenzkosten: $K'(4) = 29{,}25$

Beurteilung der ökonomischen Bedeutung:

Durch Grenzkosten von 29,25 GE/ME und einen Preis von 30 GE/ME ergibt sich bei 4 ME ein positiver Grenzgewinn von 0,75 GE/ME. Deswegen würde eine Erhöhung der Produktionsmenge zu einem höheren Gewinn führen.

2.2 $a(t) = (3000 \cdot t^3 + 6000 \cdot t^2 + 3000 \cdot t) \cdot e^{-0{,}9 \cdot t}$

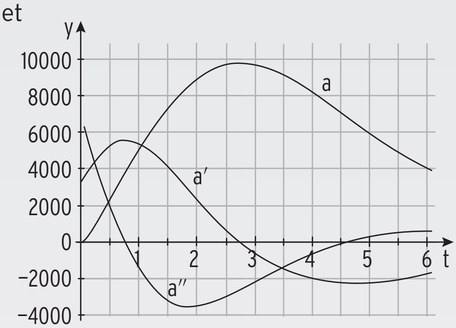
$a'(t) = (-2700 \cdot t^3 + 3600 \cdot t^2 + 9300 \cdot t + 3000) \cdot e^{-0{,}9 \cdot t}$ (nicht verlangt)

2.2.1 Wendestellen des Graphen von a und Deutung (Lösung mit GTR/CAS)

Der Graph der zweiten Ableitung a'' schneidet für $0 \leq t \leq 6$ die t-Achse mit Vorzeichenwechsel in $t \approx 0{,}78$ und $t \approx 4{,}64$.

Wendestellen: $t_{W_1} \approx 0{,}78$ und $t_{W_2} \approx 4{,}64$

Anhand des Graphen von a ist zu erkennen, dass die erste Wendestelle dem Zeitpunkt des größten Anstiegs entspricht und die zweite Wendestelle dem des größten Rückgangs der Absatzrate.



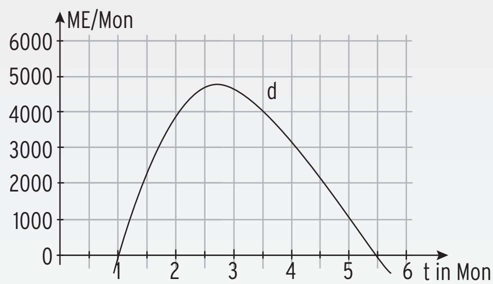
2.2.2 Zielvorgabe: Absatzrate über 5 000 ME/Monat für mindestens drei Monate

Graph der Differenzfunktion d mit $d(t) = a(t) - 5000$

Schnittstellen mit der t-Achse: $t \approx 1{,}02$ und $t \approx 5{,}47$

Der Graph verläuft dazwischen oberhalb der t-Achse.

Somit liegt die Absatzrate mehr als 4 Monate $(5{,}47 - 1{,}02 > 4)$ oberhalb von 5 000 ME/Monat. Die Zielvorgabe ist erfüllt.



Zentrale Abiturprüfung 2021 Lösungen

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 3 – Lineare Algebra (28 Punkte)

3.1.1 Aufstellen des LGS:

$x_1, \dots, x_4$ ist die jeweilige Anzahl der Komponenten von K_1 bis K_4.

$$A_{GK} \cdot \vec{x} = \vec{b} \qquad \begin{pmatrix} 12 & 10 & 8 & 14 \\ 11 & 15 & 14 & 11 \\ 9 & 5 & 10 & 13 \\ 10 & 10 & 12 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8100 \\ 8800 \\ 6600 \\ 7700 \end{pmatrix}$$

Überprüfen auf Lösbarkeit:

Die reduzierte Diagonalform von $\left(\begin{array}{cccc|c} 12 & 10 & 8 & 14 & 8100 \\ 11 & 15 & 14 & 11 & 8800 \\ 9 & 5 & 10 & 13 & 6600 \\ 10 & 10 & 12 & 12 & 7700 \end{array}\right)$

ist $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1,5 & 525 \\ 0 & 1 & 0 & -0,6 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 0,25 & 162,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Somit besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, da der Rang von A_{GK} mit dem Rang der erweiterten Matrix übereinstimmt und kleiner als 4 ist.

3.1.2 Maximale Menge von K_4

Ermittlung von t:

Da eine Produktionsmenge nicht negativ sein kann, folgt:

$525 - 15t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 35$

$50 + 6t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 8,33$

$162,5 - 2,5t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 65$

$10\,t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 0$

Alle Bedingungen sind erfüllt für $t \in [0; 35]$

Von Komponente K_4 könnten also maximal 350 ME ($10 \cdot 35$) produziert werden.

3.1.3 Der Lagerbestand an Grundstoffen für diesen Auftrag reicht aus.

Benötigte Grundstoffe:

$$A_{GK} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 400 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5200 \\ 8600 \\ 500 \\ 6800 \end{pmatrix}$$

Somit reichen die ursprünglichen Lagerbestände (vgl. 3.1) aus.

3.1.3 Bewertung: $\begin{pmatrix} 5200 \\ 8600 \\ 500 \\ 6800 \end{pmatrix} - A_{GK} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2100 \\ -200 \\ 3600 \\ 1700 \end{pmatrix}$

Die Behauptung der Mitarbeiterin ist falsch, da vom Grundstoff G_2 zu wenig vorhanden ist.

Zentrale Abiturprüfung 2021 Lösungen

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 3 – Lineare Algebra (28 Punkte)

3.2.1 Eine Mengeneinheit des Modells M_3 wiegt 193 kg .

Berechnung des Gewichtes nach neuer Zusammensetzung:

$$\begin{pmatrix} 12 & 10 & 8 & 14 \\ 11 & 15 & 14 & 11 \\ 9 & 5 & 10 & 13 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}25 \\ 0{,}75 \\ 1{,}75 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57{,}5 \\ 66 \\ 52 \\ 17{,}5 \end{pmatrix}$$

$57{,}5 + 66 + 52 + 17{,}5 = 193$

Das neue Gesamtgewicht einer ME des Modells M3 beträgt 193 kg.

3.2.2 Höhe der anfallenden variablen Kosten je Mengeneinheit

Materialkosten der Komponenten je Modell:

$$(7{,}2 \quad 7{,}79 \quad 10{,}82 \quad 12{,}46) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 1{,}25 \\ 1{,}25 & 0{,}5 & 0{,}75 \\ 1{,}25 & 0{,}75 & 1{,}75 \\ 0{,}75 & 0 & 1{,}5 \end{pmatrix} = (36{,}21 \quad 13{,}81 \quad 52{,}47)$$

Fertigungskosten der Komponenten je Modell: $(120 \quad 140 \quad 215)$

Variable Kosten je Modell:

$(36{,}21 \quad 13{,}81 \quad 52{,}47) + (120 \quad 140 \quad 215) = (156{,}21 \quad 153{,}81 \quad 267{,}47)$

Die variablen Kosten betragen 156,21 GE/ME für M_1, 153,81 GE/ME für M_2 und 267,47 GE/ME für M_3.

Aufgabe 4 – Stochastik (28 Punkte)

4.1.1 Zufallsgröße X: Anzahl der fehlerhaften Snowboards

Auf jeder Stufe des Experiments werden nur zwei Ergebnisse betrachtet: Ein Snowboard ist entweder fehlerfrei oder nicht fehlerfrei. Die Wahrscheinlichkeit kann aufgrund der hohen Anzahl an produzierten Snowboards als Zufallsexperiment "Ziehen mit Zurücklegen" modelliert werden. Daher kann hier von einer Binomialverteilung ausgegangen werden.

X kann als binomialverteilt angenommen werden.

4.1.2 Wahrscheinlichkeiten

X ist B(450; 0,02)-verteilt

$P(E_1) = P(X = \mu) = P(X = 450 \cdot 0{,}02) = P(X = 9) \approx 0{,}1331$

$P(E_2) = P(8 \leq X < 16) = P(8 \leq X \leq 15) \approx 0{,}6576$

$P(E_3) = P(X < 10) = P(X \leq 9) \approx 0{,}5874$

4.1.3 Wahrscheinlichkeit, mit der eine solche Reklamation bei der Lieferung eintritt.

4 % von 450 Snowboards sind 18.

$P(X \geq 18) = 1 - P(X \leq 17) \approx 0{,}0049$

Die Wahrscheinlichkeit, dass 4 % oder mehr defekte Snowboards geliefert werden, beträgt etwa 0,49 %.

Zentrale Abiturprüfung 2021 Lösungen

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 4 – Stochastik (28 Punkte)

4.1.4 Mindestlieferzahl für mindestens 450 fehlerfreie Snowboards

Y gebe die Anzahl fehlerfreier Snowboards unter n gelieferten an.

Y ist eine B(n; 0,98)-verteilte Zufallsgröße

Gesucht ist n für $P(Y \geq 450) \geq 0{,}99$ mit $p = 0{,}98$.

Experimentieren mit dem GTR/CAS liefert:

$n = 466$: $P(Y \geq 450) \approx 0{,}9859 < 0{,}99$

$n = 467$: $P(Y \geq 450) \approx 0{,}9930 > 0{,}99$

Bei einer Lieferung von mindestens 467 Snowboards ist mit mehr als 99 %iger Wahrscheinlichkeit davon auszugehen, dass mindestens 450 Snowboards fehlerfrei sind.

4.2.1 Baumdiagramm oder Vierfeldertafel

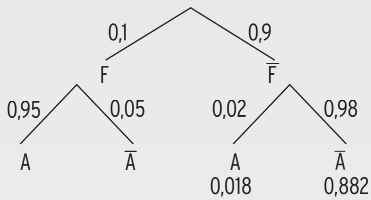
F: Ein Snowboard ist fehlerhaft.

A: Ein Snowboard wird vom Automaten aussortiert.

Vierfeldertafel:

	A	$\overline{A}$	
F	0,095	0,005	0,1
F	0,018	0,882	0,9
	0,113	0,887	1

Baumdiagramm:



Nebenrechnung für das Baumdiagramm:

$P(A) = 0{,}113 = 0{,}1x + 0{,}018$ ergibt $x = 0{,}95$

$P(A \cap \overline{F}) = 0{,}018 \Rightarrow P_{\overline{F}}(A) = 0{,}02$ $\quad \left(P_{\overline{F}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{0{,}018}{0{,}9} = 0{,}02 \right)$

4.2.2 A und $\overline{F}$ sind stochastisch abhängige Ereignisse

F: Ein Snowboard ist fehlerhaft.

A: Ein Snowboard wird vom Automaten aussortiert.

$P(A \cap \overline{F}) = 0{,}018 \neq 0{,}113 \cdot 0{,}9 = 0{,}1017 = P(A) \cdot P(\overline{F})$

Die Ereignisse sind stochastisch abhängig.

4.2.3 Beurteilung der Aussage $P_A(\overline{F}) = 16\,\%$ (bedingte Wahrscheinlichkeit)

$P_A(\overline{F}) = \frac{P(\overline{F} \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}018}{0{,}113} \approx 0{,}1593 \approx 16\,\%$

Die Aussage ist richtig.

Zentrale Abiturprüfung 2022

Grundkursfach Mathematik

Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel Lösungen Seite 235 - 240

Aufgabenstellung

Das Unternehmen *VacciCorp GmbH* stellt Medikamente und Medizinprodukte her. Zum Produktportfolio gehören unter anderem Medikamente, Impfstoffe und medizinische Schnelltests.

Aufgabe 1 (21 Punkte)

1.1 Analysis

Die *VacciCorp GmbH* untersucht die Preisgestaltung eines Vitamin-Kombi-Präparats. Bezüglich dieses Produktes hat die VacciCorp GmbH zahlreiche Mitbewerber.

Die Gesamtkosten für die Produktion des Vitamin-Kombi-Präparats lassen sich durch folgende ertragsgesetzliche Kostenfunktion beschreiben:

$K(x) = 0{,}1x^3 - x^2 + 20x + 100$

Dabei gibt x die Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME) und K(x) die Gesamtkosten in Geldeinheiten (GE) an. Der Marktpreis für das Vitamin-Kombi-Präparat beträgt 37,5 GE/ME.

1.1.1 Berechnen Sie die Höhe der Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 2 ME. (2 Punkte)

1.1.2 Um den Absatz zu steigern, möchte die Geschäftsleitung den Verkaufspreis kurzfristig auf 17,5 GE/ME senken.
Bestätigen Sie, dass dieser Preis für das Unternehmen nur kurzfristig realisierbar ist und eine Produktionsmenge von 5 ME erfordert.
(5 Punkte)

1.1.3 Begründen Sie, weshalb eine Veränderung der Fixkosten keinen Einfluss auf die gewinnmaximale Menge, wohl aber auf den maximalen Gewinn hat.
(2 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2022 Grundkursfach Mathematik
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

1.2 Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Die *VacciCorp GmbH* stellt aus drei Vitamingemischen V1, V2 und V3 zwei unterschiedliche Vitamin-Präparate P1 und P2 her. Die Materialverflechtung ist der folgenden Tabelle zu entnehmen (alle Angaben in ME).

	P1	P2
V1	5	6
V2	2	0
V3	3	4

1.2.1 Berechnen Sie den Bedarf an den Vitamingemischen V1, V2 und V3, wenn 100 ME des Präparats P1 und 200 ME des Präparats P2 hergestellt werden sollen. (2 Punkte)

1.2.2 Im Lager befinden sich noch 1 850 ME des Vitamingemischs V1 und 500 ME des Vitamingemischs V2. Diese Bestände sollen vollständig aufgebraucht werden.
Das Vitamingemisch V3 ist nicht vorrätig, kann aber in unbeschränkter Menge nachbestellt werden.
Berechnen Sie, wie viele Mengeneinheiten des Vitamingemischs V3 nachbestellt werden müssen, damit die vorhandenen Lagervorräte vollständig aufgebraucht werden können. (4 Punkte)

1.3 Stochastik

Die *VacciCorp GmbH* möchte einen neuen Grippe-Schnelltest auf den Markt bringen. Um die Zuverlässigkeit des Schnelltests zu prüfen, wurden 200 Testpersonen eingeladen. Vor Durchführung des Schnelltests wurden alle Testpersonen per Labordiagnostik auf Grippe-Viren untersucht. Dabei stellte sich heraus, dass 20 % der Testpersonen tatsächlich infiziert waren.
Von den Infizierten wurden 10 % von dem Schnelltest nicht erkannt.
48 Testpersonen wurden positiv getestet, obwohl sie nicht infiziert waren.

1.3.1 Die Vierfeldertafel in Anlage 1 zeigt die Ergebnisse des Zuverlässigkeitstests in absoluten Zahlen. Ergänzen Sie die Vierfeldertafel in **Anlage 1**. (3 Punkte)

1.3.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Test ein falsches Ergebnis liefert. (3 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2022 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Anlage 1 zu Aufgabe 1.3.1

G: mit Grippe infiziert T: Schnelltest positiv

	G	$\overline{G}$	$\sum$
T		48	
$\overline{T}$			
$\sum$			200

Zentrale Abiturprüfung 2022 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabenstellung

Die *VacciCorp GmbH* stellt Medikamente und Medizinprodukte her. Zum Produktportfolio gehören unter anderem Impfstoffe und medizinische Schnelltests.

Aufgabe 2 – Analysis (28 Punkte)

Die *VacciCorp GmbH* untersucht die Preisgestaltung des Grippe-Impfstoffs GripVax und hat in dieser Produktsparte zahlreiche Mitbewerber.

2.1 Eine umfangreiche Marktstudie hat ergeben, dass sich das Angebot von Grippeimpfstoffen durch die Funktion p_A mit $p_A(x) = 20\,e^{0{,}01x}$ modellieren lässt.

Über die Nachfragefunktion p_N sind folgende Informationen bekannt:

- Die Funktionsgleichung besitzt die Form $p_N(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- Der Höchstpreis liegt bei 100 GE/ME.
- Bei einem Preis von 91 GE/ME werden 30 ME des Grippe-Impfstoffs nachgefragt.
- Bei einem Preis von 70 GE/ME werden 60 ME des Grippe-Impfstoffs nachgefragt.

Dabei gibt x die Menge in Mengeneinheiten (ME) und $p_A(x)$ sowie $p_N(x)$ geben den Preis in Geldeinheiten/Mengeneinheit (GE/ME) an.

2.1.1 Leiten Sie die Funktionsgleichung der Nachfragefunktion p_N her.

(5 Punkte)

Gehen Sie im Folgenden von dieser Nachfragefunktion aus:

$$p_N(x) = -\frac{1}{150}x^2 - \frac{1}{10}x + 100$$

2.1.2 Bestimmen Sie die Konsumentenrente und erläutern Sie die Bedeutung im Sachzusammenhang. (5 Punkte)

2.1.3 In Abbildung 1 in Anlage 2 sind die Graphen von p_A und p_N dargestellt.
Ergänzen Sie die Grafik in Anlage 2, indem Sie die Graphen beschriften, die Achsen skalieren und beschriften sowie das Marktgleichgewicht markieren.

(5 Punkte)

2.1.4 In der Politik wird derzeit diskutiert, den Preis für Grippe-Impfungen auf 50 GE/ME festzulegen.
Vergleichen Sie die angebotene und die nachgefragte Menge, die sich durch diesen staatlichen Eingriff in die Preisbildung ergeben würden.

(5 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2022

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

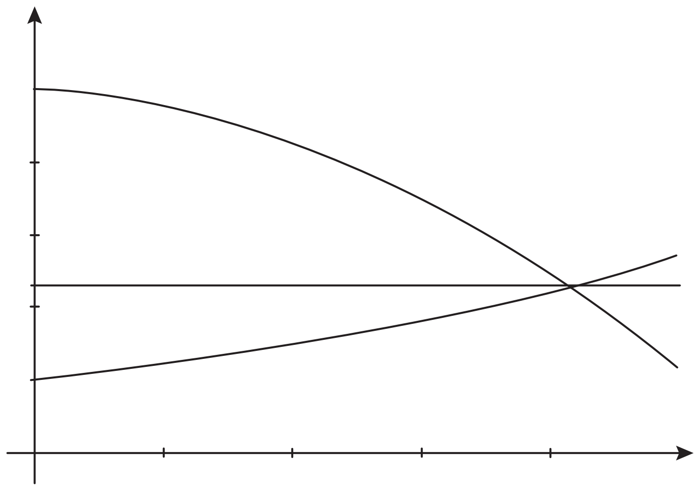
Aufgabe 2 – Analysis (28 Punkte)

2.2 Durch eine Umstellung des Produktionsverfahrens und günstigere Rohstoffpreise will die *VacciCorp GmbH* die Kosten senken.
Die Gesamtkosten lassen sich zukünftig durch die folgende ertragsgesetzliche Kostenfunktion modellieren:
$K_c(x) = x^3 - 6x^2 + cx + 100$ mit $c \in \mathbb{R}$.
Dabei gibt x die Menge in ME und $K_c(x)$ die Gesamtkosten in GE an.

2.2.1 Der Graph einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion ist streng monoton steigend und besitzt deshalb keine Extremstellen.
Als mögliche Extremstellen x_1 und x_2 der Funktion K_c ergeben sich:
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - \frac{c}{3}}$
Ermitteln Sie den Wertebereich für c, so dass die Funktion K_c keine Extremstellen besitzt. (4 Punkte)

2.2.2 Der Leiter der Controlling-Abteilung behauptet, dass die Kostenentwicklung unabhängig von c immer bei 2 ME von degressivem zu progressivem Wachstum übergeht. Beweisen oder widerlegen Sie diese Behauptung. (4 Punkte)

Anlage 1 zu Aufgabe 2.1.3



Zentrale Abiturprüfung 2022

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 3 – Stochastik (28 Punkte)

Der Grippeimpfstoff GripVax wurde weiterentwickelt und verbessert. Er steht in zwei verschiedenen Impfstoffkombinationen zur Verfügung.

3.1 In der 3. Phase der klinischen Prüfung der Grippeimpfung werden die zwei verschiedenen Impfstoffkombinationen GripVax A und GripVax B getestet.
15 % der Probanden werden mit GripVax A geimpft. Der Rest erhält den Impfstoff GripVax B.
76,5 % aller Probanden wurden mit GripVax B geimpft und haben keine Nebenwirkungen.
Insgesamt zeigen 90,75 % aller Probanden keine Nebenwirkungen.
Es wird folgende Notation verwendet:
A: Der Patient wird mit Impfstoff GripVax A geimpft.
B: Der Patient wird mit Impfstoff GripVax B geimpft.
N: Es treten Nebenwirkungen auf.
$\overline{N}$: Es treten keine Nebenwirkungen auf.

3.1.1 Stellen Sie diesen Sachverhalt in einem vollständigen Baumdiagramm dar.

(4 Punkte)

3.1.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Patient mit GripVax A geimpft wurde und keine Nebenwirkungen auftreten.

(2 Punkte)

3.1.3 Zeigen Sie, dass gilt: $P_N(B) \approx 0{,}9189$.

(2 Punkte)

3.2 Die *VacciCorp GmbH* führt regelmäßig Qualitätskontrollen bei der Herstellung der Grippeimpfstoffe durch. Erfahrungsgemäß sind 10 % aller produzierten Impfstoffflaschen fehlerhaft. Aus der laufenden Produktion wird eine Stichprobe von 300 Flaschen entnommen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der fehlerhaften Flaschen an.

3.2.1 Begründen Sie, warum davon ausgegangen werden kann, dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist.

(2 Punkte)

3.2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
E_1: Es werden genau 25 fehlerhafte Flaschen gefunden.
E_2: Es werden höchstens 20 fehlerhafte Flaschen gefunden.
E_3: Es werden mehr als 20, aber höchstens 40 fehlerhafte Flaschen gefunden.
E_4: Es werden mehr als 270 fehlerfreie Flaschen gefunden.

(6 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2022

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 3– Stochastik (Fortsetzung)

3.2.3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Anzahl der fehlerhaften Flaschen um mehr als eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.

(4 Punkte)

3.3 Für den Einsatz in Arztpraxen werden die Flaschen in Kartons verpackt. Die Arztpraxen fordern, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % alle Flaschen eines Kartons nicht fehlerhaft sind. Um dieser Forderung nachzukommen, möchte die *VacciCorp GmbH* den Anteil fehlerhafter Flaschen reduzieren.

3.3.1 Ermitteln Sie, wie gering die Wahrscheinlichkeit p für eine fehlerhafte Flasche maximal sein dürfte, damit die VacciCorp GmbH die Forderung der Arztpraxen einhalten kann, wenn die Flaschen in Kartons zu je 25 Stück verpackt werden.

(4 Punkte)

3.3.2 Die in 3.3.1 zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit ist nicht realisierbar. Die *VacciCorp GmbH* garantiert, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von über 90 % in ihren Kartons höchstens 3 fehlerhafte Flaschen enthalten sind. Dazu wurde die Wahrscheinlichkeit, dass eine Flasche fehlerhaft ist, auf $p = 7{,}5\ \%$ gesenkt.
Bestimmen Sie, wie viele Flaschen ein Karton dann höchstens enthalten darf.

(4 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2022

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 4 – Lineare Algebra/Analytische Geometrie (28 Punkte)

Die *VacciCorp GmbH* produziert die Grippeimpfstoffe GripVax A und GripVax B sowie die Infusionslösung GoFastIn.

4.1 Die Grippeimpfstoffe GripVax A und GripVax B der VacciCorp GmbH werden in einem zweistufigen Produktionsprozess hergestellt. Aus den Rohstoffen R1 bis R4 werden zunächst drei Zwischenprodukte Z1 bis Z3 gefertigt, welche dann zu den beiden Endprodukten E1 (GripVax A) und E2 (GripVax B) verarbeitet werden. Die zugehörigen Materialverflechtungen können den folgenden Matrizen entnommen werden (alle Angaben in ME):

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ b & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B_{ZE} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad C_{RE} = \begin{pmatrix} 21 & 16 \\ 56 & 41 \\ 34 & 16 \\ 34 & 30 \end{pmatrix}$$

Die Rohstoffkosten sowie die Fertigungskosten der Zwischen- und Endprodukte sind folgender Tabelle zu entnehmen:

	R1	R2	R3	R4	Z1	Z2	Z3	E1	E2
Kosten in Euro/ME	0,05	0,10	0,10	0,02	1,00	0,50	0,75	1,50	2,50

Der Grippe-Impfstoff GripVax A wird für 30,00 Euro/ME und GripVax B für 40,00 Euro/ME verkauft.

4.1.1 Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b.

(2 Punkte)

4.1.2 Eine Apotheke ordert 100 ME von GripVax A und 150 ME von GripVax B. Die anteiligen Fixkosten für diesen Auftrag betragen 1 500,00 Euro. Berechnen Sie die Höhe des Gewinns für diesen Auftrag.

(8 Punkte)

4.1.3 Aufgrund einer Renovierung soll das Lager der *VacciCorp GmbH* vollständig durch die Produktion von E1 und E2 geräumt werden. Es befinden sich noch 1 500 ME von Z2 im Lager. Die Zwischenprodukte Z1 und Z3 können in beliebiger Menge beschafft werden.
Ermitteln Sie, wie viele Endprodukte daraus noch hergestellt werden können, wenn die Endprodukte E1 und E2 im Verhältnis 1 : 2 gefertigt werden.

(4 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2022

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 4 – Lineare Algebra/Analytische Geometrie Fortsetzung

4.2 Als besonderen Service für Apotheken bietet die *VacciCorp GmbH* die drei Pakete P1, P2 und P3 an, die aus den beiden Impfstoffen sowie der Infusionslösung bestehen. Die Zusammenstellung der Endprodukte E1 (GripVax A), E2 (GripVax B) und E3 (GoFastIn) in den Paketen (in Stück pro Paket) ist der folgenden Matrix zu entnehmen:

$$M_{EP} = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 18 \\ 25 & 10 & 4 \\ 45 & 30 & 22 \end{pmatrix}$$

Der Betrieb hat noch 14 400 Stück von E1, 8 700 Stück von E2 und 23 100 Stück von E3 vorrätig.

Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

4.2.1 A_1: Es werden immer Vorräte von Endprodukten übrigbleiben, unabhängig davon, wie viele Pakete zusammengestellt werden.

(2 Punkte)

4.2.2 A_2: Bei einer Zusammenstellung von 180 Stück von P1, 230 Stück von P2 und 320 Stück von P3 werden die Vorräte nicht vollständig aufgebraucht.

(3 Punkte)

4.2.3 A_3: Es gibt unendlich viele Kombinationen, die von P1, P2 und P3 zusammengestellt werden können.

(3 Punkte)

4.2.4 A_4: Mit den vorhandenen Vorräten können höchstens 800 Stück von P3 zusammengestellt werden.

(3 Punkte)

4.2.5 A_5: Wenn 200 Stück von P1, von P2 die 1,25-fache Menge von P1 und von P3 die 1,5-fache Menge von P1 zusammengestellt werden, verbleiben keine Vorräte an Endprodukten.

(3 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2022 Lösungen

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi) Lösungen

1.1 Analysis

Gesamtkosten: $K(x) = 0{,}1x^3 - x^2 + 20x + 100$

Marktpreis: 37,5 GE/ME.

1.1.1 Höhe der Grenzkosten in GE/ME

$K'(x) = 0{,}3x^2 - 2x + 20$; $K'(2) = 1{,}2 - 4 + 20 = 17{,}2$

Die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 2 ME betragen 17,2 GE/ME.

1.1.2 Verkaufspreis: 17,5 GE/ME

$k_v(x) = 0{,}1x^2 - x + 20$; $k'_v(x) = 0{,}2x - 1$; $k''_v(x) = 0{,}2 > 0$

Hinreichende Bedingung für Minimalstelle: $k'_v(x) = 0 \wedge k''_v(x) > 0$

$0{,}2x - 1 = 0$ für $x = 5$; $k_v(5) = 17{,}5$

Das Betriebsminimum liegt bei 5 ME, der zugehörige Verkaufspreis von 17,5 GE/ME entspricht der kurzfristigen Preisuntergrenze, daher ist dieser Preis nur kurzfristig durchsetzbar.

1.1.3 $K(x) = K_v(x) + K_{fix}$; $G(x) = E(x) - K(x)$; $G'(x) = E'(x) - K'(x) = E'(x) - K'_v(x)$

Die Veränderung der Fixkosten hat keinen Einfluss auf die gewinnmaximale Menge, wohl aber auf den maximalen Gewinn.

Alternative:

Die Fixkosten sind eine von der Produktionsmenge x unabhängige Größe. Eine Veränderung der Fixkosten führt somit zwar zu einer vertikalen Verschiebung des Graphen der Gewinnfunktion, nicht aber zu einer horizontalen. Somit verändert sich zwar der maximale Gewinn, nicht jedoch die gewinnmaximale Ausbringungsmenge.

1.2 Lineare Algebra

1.2.1 $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1700 \\ 200 \\ 1100 \end{pmatrix}$

Es werden 1 700 ME von V1, 200 ME von V2 und 1 100 ME von V3 benötigt.

1.2.2 $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1850 \\ 500 \\ a \end{pmatrix}$ ergibt das LGS:

$5x_1 + 6x_2 = 1850 \wedge 2x_1 = 500 \wedge 3x_1 + 4x_2 = a$

$x_1 = 250$ eingesetzt ergibt $x_2 = 100$;

eingesetzt ergibt $a = 3 \cdot 250 + 4 \cdot 100 = 1150$

Es müssen 1 150 ME von V3 nachbestellt werden.

Zentrale Abiturprüfung 2022 Lösungen

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi) Lösungen

1.3 Stochastik

1.3.1 Vierfeldertafel

	G	$\overline{G}$	Σ
T	36	**48**	84
$\overline{T}$	4	112	116
Σ	40	160	**200**

1.3.2 $P(G \cap \overline{T}) + P(\overline{G} \cap T) = P(G) \cdot P_G(\overline{T}) + \frac{48}{200} = 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}24 = 0{,}26$

oder $P(G \cap \overline{T})$ und $P(\overline{G} \cap T)$ direkt aus der Vierfeldertafel ablesen.

Die Wahrscheinlichkeit für ein falsches Testergebnis beträgt 26 %.

Zentrale Abiturprüfung 2021 Lösungen

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 2 - Analysis

2.1.1 Leiten Sie die Funktionsgleichung der Nachfragefunktion p_N her.

Ansatz: $p_N(x) = ax^2 + bx + c$

Betrachtet wird das folgende lineare Gleichungssystem:

$p_N(0) = c = 100$

$p_N(30) = 900a + 30b + c = 91$

$p_N(60) = 3600a + 60b + c = 70$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die Lösung $a = -\frac{1}{150}$, $b = -\frac{1}{10}$ und $c = 100$.

Damit ergibt sich: $p_N(x) = -\frac{1}{150}x^2 - \frac{1}{10}x + 100$

2.1.2 Bestimmen Sie die Konsumentenrente und erläutern Sie die Bedeutung im Sachzusammenhang.

Marktgleichgewicht: $p_A(x) = p_N(x)$

$x \approx 82{,}94 \quad (x \approx -126{,}71 \notin D_{ök})$

Mit $p_N(82{,}94) \approx 45{,}84$ ergibt sich das Marktgleichgewicht zu MGG(82,94|45,84).

Konsumentenrente: $KR = \int_0^{x_G} p_N(x)\,dx - p_G \cdot x_G \approx \int_0^{82{,}94} p_N(x) - 45{,}84)dx \approx 2880{,}19$

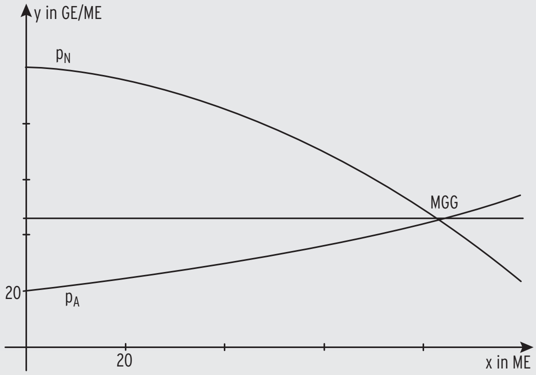
Die Konsumentenrente hat eine Höhe von 2 880,19 GE und gibt den Betrag an, den die Konsumenten durch die Festlegung des Marktpreises sparen, da dieser unter dem Preis liegt, den sie zu zahlen bereit wären.

Zentrale Abiturprüfung 2022 Lösungen

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 2 - Analysis

2.1.3 Ergänzen Sie die Grafik



2.1.4 Vergleichen Sie die angebotene und die nachgefragte Menge, die sich durch diesen staatlichen Eingriff in die Preisbildung ergeben würden.

$p_N(x) = 50 \Rightarrow x_N \approx 79{,}43 \qquad (x \approx -94{,}43 \notin D_{ök})$

$p_A(x) = 50 \Rightarrow x_A \approx 91{,}63$

$x_A - x_N = 91{,}63 - 79{,}43 = 12{,}20$

Insgesamt ergibt sich durch den staatlichen Eingriff also ein Angebotsüberhang von ca. 12,2 ME.

2.2.1 Ermitteln Sie den Wertebereich für c, so dass die Funktion K_c keine Extremstellen besitzt.

$K_c(x) = x^3 - 6x^2 + cx + 100$; $K'_c(x) = 3x^2 - 12x + c$; $K''_c(x) = 6x - 12$

Mögliche Extremstellen: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - \frac{c}{3}}$

Da die Funktion K_c keine Extremstellen hat, darf sich für $K'_c(x) = 0$ höchstens eine Lösung ergeben. Dies ist der Fall, wenn die Diskriminante kleiner als oder gleich Null ist: $4 - \frac{c}{3} \leq 0 \Leftrightarrow c \geq 12$

Es muss gelten: $c \geq 12$, damit keine Extremstellen existieren.

2.2.2 Beweisen oder widerlegen Sie diese Behauptung.

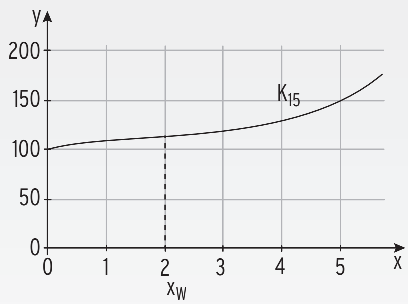
Gesucht wird die Wendestelle der Funktion K_c.

Notw. Bed.: $K''_c(x) = 0 \qquad 6x - 12 = 0$

$x = 2$

Hinr. Bed.: $K''_c(x) = 0 \wedge K'''_c(x) \neq 0$

Wegen $K'''_c(2) = 6$ ist die hinreichende Bedingung erfüllt, außerdem liegt ein Wechsel von einer Rechts- zu einer Linkskrümmung vor, so dass die Behauptung richtig ist.

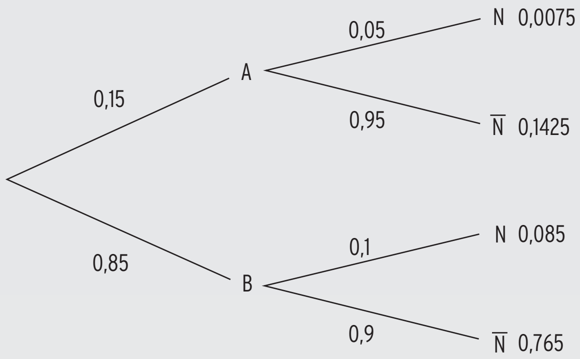


Zentrale Abiturprüfung 2022 Lösungen

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 3 –Stochastik (28 Punkte)

3.1.1 Baumdiagramm



3.1.2 **Ein zufällig ausgewählter Patient wurde mit GripVax A geimpft und hat keine Nebenwirkungen:** $P(A \cap \overline{N}) = P(\overline{N}) - P(\overline{N} \cap B) = 0{,}9075 - 0{,}7650 = 0{,}1425$

Ergebnis lässt sich auch direkt aus dem Baumdiagramm ablesen.

3.1.3 **Zeigen Sie, dass gilt: $P_N(B) = 0{,}9189$.**

$$P_N(B) = \frac{P(B \cap N)}{P(N)} = \frac{0{,}085}{0{,}085 + 0{,}0075} = \frac{0{,}085}{0{,}0925} = 0{,}9189$$

3.2.1 **Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt .**

Die Stichprobe wird der laufenden Produktion entnommen, so dass von einer annähernd gleichbleibenden Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Flasche ausgegangen werden kann. Außerdem kann eine der Produktion entnommene Flasche nur fehlerhaft oder nicht fehlerhaft sein, so dass es nur zwei Ergebnisse gibt.

3.2.2 **Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:**

X: Anzahl fehlerhafter Flaschen, **Y:** Anzahl fehlerfreier Flaschen

X ist B(300; 0,1)-verteilt, Y ist B(300; 0,9)-verteilt

$P(E_1) = P(X = 25) \approx 0{,}0510$

$P(E_2) = P(X \leq 20) \approx 0{,}0287$

$P(E_3) = P(20 < X \leq 40) \approx 0{,}9459$

$P(E_4) = P(Y > 270) \approx 0{,}4719$

3.2.3 **Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Anzahl der fehlerhaften Flaschen um mehr als eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.**

$\mu = n \cdot p = 300 \cdot 0{,}1 = 30$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{300 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} \approx 5{,}2$

Gesucht wird die Gegenwahrscheinlichkeit zum 1σ-Intervall um den Erwartungswert:

$1 - P(25 \leq X \leq 35) \approx 0{,}2893$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 28,93 % weicht die Anzahl der fehlerhaften Flaschen um mehr als eine Standardabweichung vom Erwartungswert ab.

Zentrale Abiturprüfung 2022 Lösungen

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 3 –Stochastik (28 Punkte)

3.3.1 Ermitteln Sie, wie gering die Wahrscheinlichkeit p für eine fehlerhafte Flasche maximal sein dürfte, damit die VacciCorp GmbH die Forderung der Arztpraxen einhalten kann, wenn die Flaschen in Kartons zu je 25 Stück verpackt werden.

X: Anzahl fehlerhafter Flaschen in einem Karton; X is B(25, p)-verteilt.

Gesucht wird p, so dass gilt: $P(X = 0) = (1 - p)^{25} > 0{,}9$

$$\Leftrightarrow 1 - p > 0{,}9^{\frac{1}{25}} \Rightarrow p > 0{,}0042...$$

Damit dürfte die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Flasche maximal 0,42 % betragen.

3.3.2 Bestimmen Sie, wie viele Flaschen ein Karton dann höchstens enthalten darf.

X: Anzahl fehlerhafter Flaschen in einem Karton; X ist B(n; 0,075)-verteilt.

Gesucht wird n, so dass gilt: $P(X \leq 3) > 0{,}9$

Für n = 23 ergibt sich: $P(X \leq 3) \approx 0{,}9108$

Für n = 24 ergibt sich: $P(X \leq 3) \approx 0{,}8990$

Damit darf ein Karton höchstens 23 Flaschen enthalten.

Zentrale Abiturprüfung 2022 Lösungen

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 4 – Lineare Algebra (28 Punkte)

4.1.1 Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b.

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ b & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_{ZE} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_{RE} = \begin{pmatrix} 21 & 16 \\ 56 & 41 \\ 34 & 16 \\ 34 & 30 \end{pmatrix}$$

Aus $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$: $1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + a \cdot 6 = 21 \Rightarrow a = 2$

$$b \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 6 = 56 \Rightarrow b = 4$$

4.1.2 Berechnen Sie die Höhe des Gewinns für diesen Auftrag.

Berechnung der Rohstoffkosten: $(0{,}05 \quad 0{,}1 \quad 0{,}1 \quad 0{,}02) \cdot C_{RE} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = (2138)$

Berechnung der Zwischenproduktkosten: $(1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}75) \cdot B_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = (2362{,}5)$

Berechnung der Endproduktkosten: $(1{,}5 \quad 2{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = (525)$

Zentrale Abiturprüfung 2022 Lösungen

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 4 – Lineare Algebra Fortsetzung

4.1.2 Berechnung der Gesamtkosten: $2138 + 2362{,}5 + 525 + 1500 = 6525{,}5$

Berechnung des Erlöses $(30\ 40) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = (9000)$

Berechnung des Gewinns: $9000 - 6525{,}5 = 2474{,}5$

Der Gewinn für diesen Auftrag liegt bei 2 474,50 Euro.

4.1.3 **Ermitteln Sie, wie viele Endprodukte daraus noch hergestellt werden können, wenn die Endprodukte E1 und E2 im Verhältnis 1 : 2 gefertigt werden.**

Die Vorgaben führen zu folgender Gleichung: $B_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1500 \\ b \end{pmatrix}$

Das Gleichungssystem: $17x = a \wedge 10x = 1500 \wedge 8x = b$

hat die Lösung $x = 150$, $a = 2550$ und $b = 1200$.

Es können 150 ME von E_1 und 300 ME von E_2 hergestellt werden.

4.2.1 **Begründen oder widerlegen Sie die Aussage** A_1.

Das lineare Gleichungssystem $M_{EP} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 14400 \\ 8700 \\ 23100 \end{pmatrix}$ hat die Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 620 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{37}{30} \\ 1 \end{pmatrix}$

Für t = 0 ergibt sich die Zusammenstellung 100 Pakete P1, 620 Pakete P2 und keine Pakete P3. Hierfür wird der Vorrat vollständig aufgebraucht.

Die Aussage ist damit falsch.

4.2.2 **Begründen oder widerlegen Sie die Aussage** A_2.

$$M_{EP} \cdot \begin{pmatrix} 180 \\ 230 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13960 \\ 8080 \\ 22040 \end{pmatrix}$$

Diese Aussage ist richtig, es bleiben sogar von allen Vorräten noch Reste übrig.

4.2.3 **Begründen oder widerlegen Sie die Aussage** A_3.

In Teilaufgabe 4.2.1 wurde die Lösung des Gleichungssystems angegeben. Für jeden Wert von t aus dem ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich ergibt sich hierfür zwar eine Lösung, jedoch ist die Menge der Kombinationen endlich, weil hier nur ganzzahlige Lösungen betrachtet werden können.

4.2.4 **Begründen oder widerlegen Sie die Aussage** A_4.

$$M_{EP} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14400 \\ 3200 \\ 17600 \end{pmatrix}$$

Die Aussage ist richtig: Für 800 Pakete P3 wird der gesamte Vorrat an E1 benötigt, so dass der Vorrat von E1 für 801 Pakete P3 nicht ausreicht.

4.2.5 **Begründen oder widerlegen Sie die Aussage** A_5.

$$M_{EP} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14400 \\ 8700 \\ 23100 \end{pmatrix}$$

Die Aussage ist richtig, da sämtliche Vorräte aufgebraucht werden.