Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Ronald Deusch
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Beratende Tätigkeit:

Norbert Lengersdorf
Lehrauftrag Mathematik am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath
Studium der Mathematik und Physik an der RWTH Aachen

Umschlag: Kreis oben: www. adpic.de
Kreis unten: Robert Kneschke – Fotolia.com

* * * * * * * *

2. Auflage 2018

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-**0665**-**1**

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band ist ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht in allen Berufskollegs, die den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife ermöglichen, und den Beruflichen Gymnasien in NRW der Fachrichtung Wirtschaft und Verwaltung. Das Buch behandelt den gesamten Lehrstoff, nämlich die Ganzrationalen Funktionen, die Gebrochenrationalen Funktionen, die Exponentialfunktionen und eine Einführung in die Differenzialrechnung. Grundlage der Inhalte ist der Lehrplan für Bildungsgänge, die zum Erwerb der allgemeinen Hochschulreife führen, vom Juni 2007 und vom Mai 2008.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam die im Lehrplan geforderten Inhalte. Die Autoren orientieren sich an den in den Bildungsstandards vom Juli 2014 für die allgemeine Hochschulreife formulierten mathematischen Kompetenzen (mathematisch modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

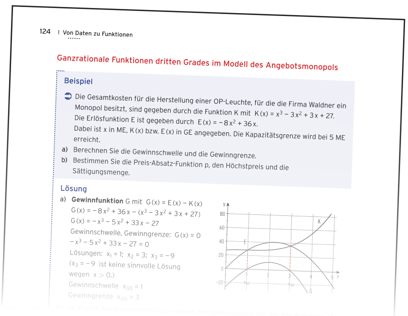
Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die in den Bildungsstandards aufgeführten Kompetenzen wie auch die Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Begleitend werden ein Arbeitsheft (ISBN 978-3-8120-2665-9) und eine Formelsammlung (ISBN 978-3-8120-1665-0) angeboten. Das Arbeitsheft soll Schüler und Lehrer durch Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

Der Aufbau dieses Buches


124 | Von Daten zu Funktionen

Ganzrationale Funktionen dritten Grades im Modell des Angebotsmonopols

Beispiel

Die Gesamtkosten für die Herstellung einer OP-Leuchte, für die die Firma Waldner ein Monopol besitzt, sind gegeben durch die Funktion K mit $K(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 27$. Die Erlösfunktion E ist gegeben durch $E(x) = -8x^2 + 36x$. Dabei ist x in ME, K(x) bzw. E(x) in GE angegeben. Die Kapazitätsgrenze wird bei 5 ME erreicht.

a) Berechnen Sie die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze.

b) Bestimmen Sie die Preis-Absatz-Funktion p, den Höchstpreis und die Sättigungsmenge.

Lösung

a) **Gewinnfunktion** G mit $G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = -8x^2 + 36x - (x^3 - 3x^2 + 3x + 27)$

$G(x) = -x^3 - 5x^2 + 33x - 27$

Gewinnschwelle, Gewinngrenze: $G(x) = 0$

$-x^3 - 5x^2 + 33x - 27 = 0$

Lösungen: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = -9$

($x_3 = -9$ ist keine sinnvolle Lösung wegen $x > 0$.)

Gewinnschwelle $x_{GS} = 1$

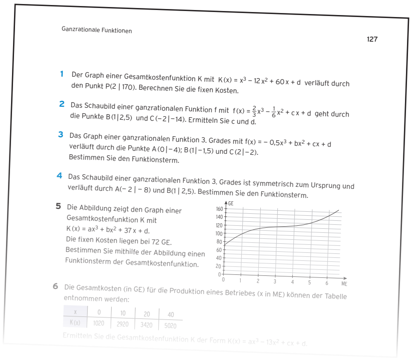
Gewinngrenze $x_{GG} = 3$

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.

Kompetenzorientierte Fragestellung mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Probleme aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.

Jede Lerneinheit endet mit einer umfassenden Anzahl von Aufgaben. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet.

Eine **Differenzierung der Aufgaben** ist durch Farben bzw. Rechnerlogo gegeben;
blau: Lösung ohne Hilfsmittel
schwarz: keine Vorgabe zur Lösung.


Ganzrationale Funktionen 127

1 Der Graph einer Gesamtkostenfunktion K mit $K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + d$ verläuft durch den Punkt P(2 | 170). Berechnen Sie die fixen Kosten.

2 Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + cx + d$ geht durch die Punkte B(1 | 2,5) und C(−2 | −14). Ermitteln Sie c und d.

3 Das Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades mit $f(x) = -0{,}5x^3 + bx^2 + cx + d$ verläuft durch die Punkte A(0 | −4); B(1 | −1,5) und C(2 | −2). Bestimmen Sie den Funktionsterm.

4 Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist symmetrisch zum Ursprung und verläuft durch A(− 2 | − 8) und B(1 | 2,5). Bestimmen Sie den Funktionsterm.

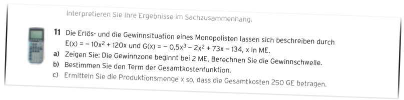
5 Die Abbildung zeigt den Graph einer Gesamtkostenfunktion K mit $K(x) = ax^3 + bx^2 + 37x + d$. Die fixen Kosten liegen bei 72 GE. Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Funktionsterm der Gesamtkostenfunktion.

6 Die Gesamtkosten (in GE) für die Produktion eines Betriebes (x in ME) können der Tabelle entnommen werden:

x	0	10	20	40
K(x)	1020	2920	3420	5020

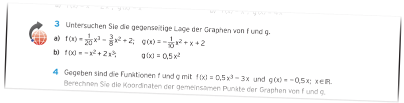
Ermitteln Sie die Gesamtkostenfunktion K der Form $K(x) = ax^3 - 13x^2 + cx + d$.

Zur Lösung ist ein GTR (CAS) empfohlen oder nötig.


Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

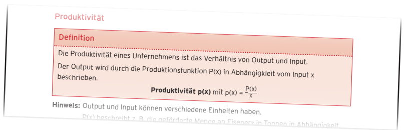
11 Die Erlös- und die Gewinnsituation eines Monopolisten lassen sich beschreiben durch $E(x) = -10x^2 + 120x$ und $G(x) = -0{,}5x^3 - 2x^2 + 73x - 134$, x in ME.
a) Zeigen Sie: Die Gewinnzone beginnt bei 2 ME. Berechnen Sie die Gewinnschwelle.
b) Bestimmen Sie den Term der Gesamtkostenfunktion.
c) Ermitteln Sie die Produktionsmenge x so, dass die Gesamtkosten 250 GE betragen.

Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Website http://www.merkur-verlag.de.


3 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Graphen von f und g.
a) $f(x) = \frac{1}{20}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2$; $g(x) = -\frac{1}{10}x^2 + x + 2$
b) $f(x) = -x^2 + 2x^3$; $g(x) = 0{,}5x^2$

4 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x$ und $g(x) = -0{,}5x$; $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen von f und g.

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.


Produktivität

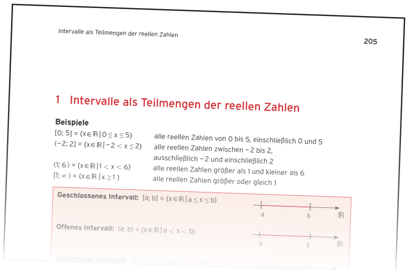
Definition

Die Produktivität eines Unternehmens ist das Verhältnis von Output und Input.
Der Output wird durch die Produktionsfunktion P(x) in Abhängigkeit vom Input x beschrieben.

Produktivität p(x) mit $p(x) = \frac{P(x)}{x}$

Hinweis: Output und Input können verschiedene Einheiten haben.

Grundwissen: Die Schüler im Beruflichen Gymnasium kommen aus verschiedenen Schularten mit unterschiedlichen Vorkenntnissen.
Um die Schüler dennoch möglichst schnell auf ein gleiches Wissensniveau zu bringen und damit gleiche Ausgangsbedingungen für den Mathematikunterricht zu schaffen, gibt es ein umfangreiches **Kapitel zur Wiederholung** der grundlegenden Rechentechniken und aller mathematischen Grundlagen aus der Mittelstufe.


Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen 205

1 Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen

Beispiele

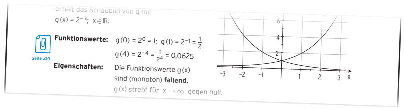
$[0; 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 5\}$	alle reellen Zahlen von 0 bis 5, einschließlich 0 und 5
$(-2; 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \le 2\}$	alle reellen Zahlen zwischen −2 bis 2, ausschließlich −2 und einschließlich 2
$(1; 6) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 6\}$	alle reellen Zahlen größer als 1 und kleiner als 6
$[1; \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 1\}$	alle reellen Zahlen größer oder gleich 1

Geschlossenes Intervall: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$

Offenes Intervall: $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Die **Heftklammer** im Lehrbuch mit Seitenangabe weist auf einen entsprechenden Abschnitt im Kapitel Grundwissen hin.

Seite 210

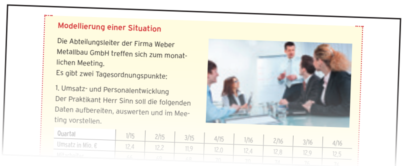

$g(x) = 2^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.

Seite 210

Funktionswerte: $g(0) = 2^0 = 1$; $g(1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
$g(4) = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = 0{,}0625$

Eigenschaften: Die Funktionswerte g(x) sind (monoton) **fallend.**
g(x) strebt für $x \to \infty$ gegen null.

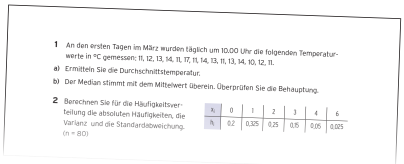
Die Aufgaben **„Modellierung einer Situation"** und **„Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse"** werden im Anhang ausführlich gelöst.


Modellierung einer Situation

Die Abteilungsleiter der Firma Weber Metallbau GmbH treffen sich zum monatlichen Meeting.
Es gibt zwei Tagesordnungspunkte:

1. Umsatz- und Personalentwicklung
Der Praktikant Herr Sinn soll die folgenden Daten aufbereiten, auswerten und im Meeting vorstellen.

Quartal	1/15	2/15	3/15	4/15	1/16	2/16	3/16	4/16
Umsatz in Mio. €	12,4	12,2	11,9	12,0	12,4	12,8	12,9	12,5


1 An den ersten Tagen im März wurden täglich um 10.00 Uhr die folgenden Temperaturwerte in °C gemessen: 11, 12, 13, 14, 11, 17, 11, 14, 13, 11, 13, 14, 10, 12, 11.
a) Ermitteln Sie die Durchschnittstemperatur.
b) Der Median stimmt mit dem Mittelwert überein. Überprüfen Sie die Behauptung.

2 Berechnen Sie für die Häufigkeitsverteilung die absoluten Häufigkeiten, die Varianz und die Standardabweichung. (n = 80)

x_i	0	1	2	3	4	6
h_i	0,2	0,325	0,25	0,15	0,05	0,025

Inhaltsverzeichnis

I Von Daten zu Funktionen 9