

# Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

## Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

---

Die Verfasser:

**Kurt Bohner**

Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

**Roland Ott**

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

**Ronald Deusch**

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Beratende Tätigkeit:

**Norbert Lengersdorf**

Lehrauftrag Mathematik am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

Studium der Mathematik und Physik an der RWTH Aachen

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte in zumutbarem Umfang untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.

Stand: Juli 2017

Umschlag: Kreis oben: [www.adpic.de](http://www.adpic.de)

Kreis unten: Robert Kneschke - Fotolia.com

\* \* \* \* \*

2. Auflage 2018

© 2018 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: [info@merkur-verlag.de](mailto:info@merkur-verlag.de); [lehrer-service@merkur-verlag.de](mailto:lehrer-service@merkur-verlag.de)

Internet: [www.merkur-verlag.de](http://www.merkur-verlag.de)

ISBN 978-3-8120-0665-1

# Vorwort

## Vorbemerkungen

Der vorliegende Band ist ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht in allen Berufskollegs, die den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife ermöglichen, und den Beruflichen Gymnasien in NRW der Fachrichtung Wirtschaft und Verwaltung. Das Buch behandelt den gesamten Lehrstoff, nämlich die Ganzrationalen Funktionen, die Gebrochenrationalen Funktionen, die Exponentialfunktionen und eine Einführung in die Differenzialrechnung. Grundlage der Inhalte ist der Lehrplan für Bildungsgänge, die zum Erwerb der allgemeinen Hochschulreife führen, vom Juni 2007 und vom Mai 2008.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam die im Lehrplan geforderten Inhalte. Die Autoren orientieren sich an den in den Bildungsstandards vom Juli 2014 für die allgemeine Hochschulreife formulierten mathematischen Kompetenzen (mathematisch modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die in den Bildungsstandards aufgeführten Kompetenzen wie auch die Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

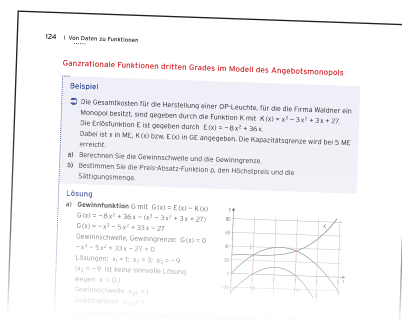
Begleitend werden ein Arbeitsheft (ISBN 978-3-8120-2665-9) und eine Formelsammlung (ISBN 978-3-8120-1665-0) angeboten. Das Arbeitsheft soll Schüler und Lehrer durch Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

## Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen. Kompetenzorientierte Fragestellung mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Probleme aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.



Jede Lerneinheit endet mit einer umfassenden Anzahl von Aufgaben. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet.

Eine **Differenzierung der Aufgaben** ist durch Farben bzw. Rechnerlogo gegeben;

**blau:** Lösung ohne Hilfsmittel

**schwarz:** keine Vorgabe zur Lösung.



Zur Lösung ist ein GTR (CAS) empfohlen oder nötig.



Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Website <http://www.merkur-verlag.de>.

**Definitionen, Festlegungen, Merksätze** und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

**Grundwissen:** Die Schüler im Beruflichen Gymnasium kommen aus verschiedenen Schularten mit unterschiedlichen Vorkenntnissen. Um die Schüler dennoch möglichst schnell auf ein gleiches Wissensniveau zu bringen und damit gleiche Ausgangsbedingungen für den Mathematikunterricht zu schaffen, gibt es ein umfangreiches **Kapitel zur Wiederholung** der grundlegenden Rechentechniken und aller mathematischen Grundlagen aus der Mittelstufe.



Seite 210

Die **Heftklammer** im Lehrbuch mit Seitenangabe weist auf einen entsprechenden Abschnitt im Kapitel Grundwissen hin.

Die Aufgaben „**Modellierung einer Situation**“ und „**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**“ werden im Anhang ausführlich gelöst.

**Computationale Funktionen** 127

- Der Graph einer Gesamtkostenfunktion  $K$  mit  $K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + d$  verläuft durch den Punkt  $P(2 | 70)$ . Berechnen Sie die Fixkosten.
- Das Schaubild einer ganzzahligen Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + cx + d$  gehe durch die Punkte  $B(1|25)$  und  $C(-2|-14)$ . Ermitteln Sie  $c$  und  $d$ .
- Der Graph einer ganzzahligen Funktion  $f$ , Grades mit  $f(x) = -0,5x^3 + bx^2 + cx + d$  verläuft durch die Punkte  $A(0|-4)$ ,  $B(1|-15)$  und  $C(2|-2)$ . Bestimmen Sie den Funktionsterm.
- Das Schaubild einer ganzzahligen Funktion  $f$ , Grades ist symmetrisch zum Ursprung und verläuft durch  $A(-2 | 7)$  und  $B(1 | 2,5)$ . Bestimmen Sie den Funktionsterm.
- Die Abbildung zeigt den Graph einer Gesamtkostenfunktion  $K$  mit  $K(x) = ax^3 + bx^2 + 27x + d$ . Die Fixen Kosten liegen bei 72 GE. Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Funktionsterm der Gesamtkostenfunktion.
- Die Gesamtkosten (in GE) für die Produktion eines Betriebes ( $x$  in ME) können der Tabelle entnommen werden:

$x$	0	1	2	3	4
$K(x)$	180	300	360	360	225

Ermitteln Sie die Gesamtkostenfunktion  $K$  der Form  $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

**11** Die Erlös- und die Gewinnfunktion eines Monopolisten lassen sich beschreiben durch  $E(x) = 10x - 0,2x^2$  und  $G(x) = -0,5x^2 - 2x + 73x + 134$ ,  $x$  in ME.

- Zeigen Sie: Die Gewinmaximierung beginnt bei  $x = 2$  ME. Berechnen Sie die Gewinnmaximale.
- Bestimmen Sie den Term der Gesamterlösfunktion.
- Ermitteln Sie die Produktionsmenge  $x$  so, dass die Gesamtkosten 250 GE betragen.

**3** Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Graphen von  $f$  und  $g$ .

a)  $f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + 2$ ,  $g(x) = \frac{1}{10}x^3 + x + 2$   
 b)  $f(x) = x^2 + 2x^3$ ,  $g(x) = 0,5x^2$

**4** Gegeben sind die Funktionen  $f$  und  $g$  mit  $f(x) = 0,5x^3 - 3x$  und  $g(x) = 0,5x^3 - x \in \mathbb{R}$ . Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen von  $f$  und  $g$ .

**Produktivität**

**Definition**  
 Die **Produktivität** eines Unternehmens ist das Verhältnis von Output und Input. Der Output wird durch die Produktionsfunktion  $P(x)$  in Abhängigkeit vom Input  $x$  beschrieben.  
**Produktivität  $p(x)$**  mit  $p(x) = \frac{P(x)}{x}$

**Hinweis:** Output und Input können verschiedene Einheiten haben.  
 $\frac{P(x) \text{ (Kilogramm)}}{x \text{ (Arbeitsstunden)}} = \frac{\text{kg}}{\text{Arbeitsstunden}}$

**Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen** 205

**1 Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen**

**Beispiele**  
 $(0, 5) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 5\}$  alle reellen Zahlen zwischen 0 und 5  
 $(-2, 2) = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 2\}$  alle reellen Zahlen zwischen  $-2$  und 2  
 $(5, 6) = \{x \in \mathbb{R} | 5 < x < 6\}$  ausschließlich  $-2$  und einschließlich 2  
 $[1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$  alle reellen Zahlen größer als 1 und kleiner als 6  
 $(-\infty, 1) = \{x \in \mathbb{R} | x < 1\}$  alle reellen Zahlen größer oder gleich 1

**Geschlossenes Intervall:**  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$   
**Offenes Intervall:**  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

ermitteln Sie aufwändig von  $g$  mit  $g(x) = 2^x - x \in \mathbb{R}$ .

**11 Funktionswerte:**  $g(0) = 2^0 + 1$ ,  $g(1) = 2^1 + \frac{1}{2}$   
 $g(4) = 2^4 + \frac{1}{4} = 0,0625$

**Eigenschaften:** Die Funktionswerte  $g(x)$  sind **monoton fallend**.  
 $g(x)$  ist **fallend** für  $x \rightarrow -\infty$ ,  $g(x)$  **steigt** null.

**Modellierung einer Situation**

Die Abteilungsleiter der Firma Weber Metallbau GmbH treffen sich zum monatlichen Meeting. Es gibt zwei Tagesordnungspunkte:

- Umsatz- und Personalentwicklung
- Der Praktikant Herr Sien soll die folgenden Daten aufbereiten, auswerten und als Meeting vorstellen.

Wochen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Umsatz (in Mio. €)	0,4	0,4	0,2	0,1	0,2	0,4	0,3	0,3	0,2	0,1

- An den ersten Tagen im März wurden täglich um 10.00 Uhr die folgenden Temperaturwerte in °C gemessen: 11, 12, 13, 14, 11, 17, 11, 14, 13, 11, 13, 14, 10, 10, 11, 11.
- Mitteln Sie die Durchschnittstemperatur.
- Der Median stimmt mit dem Mittelwert überein. Überprüfen Sie die Behauptung.
- Berechnen Sie für die Häufigkeitsverteilung die absoluten Häufigkeiten, die Varianz und die Standardabweichung ( $n = 80$ ).

$x$	0	1	2	3	4	5
$n$	62	4326	638	835	635	2025

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Von Daten zu Funktionen</b>	<b>9</b>
1	Erhebung und Bewertung von Daten	9
1.1	Erfassung und Darstellung von Daten	10
1.1.1	Einführung	10
1.1.2	Häufigkeiten und grafische Darstellung	11
1.2	Deutung und Bewertung von Daten	19
1.2.1	Lagemaße	19
1.2.2	Streuungsmaße	26
1.2.3	Lineare Regression und Korrelation	37
2	Einführung in die Funktionen	42
2.1	Zuordnungen	43
2.2	Definition einer Funktion	49
3	Ganzrationale Funktionen	55
3.1	Lineare Funktionen	55
3.1.1	Definition der linearen Funktion	56
3.1.2	Abschnittsweise definierte Funktionen	62
3.1.3	Aufstellen von Geradengleichungen	64
3.1.4	Gemeinsame Punkte	67
3.1.5	Marktgleichgewicht	72
3.1.6	Geradenschar	78
3.2	Quadratische Funktionen	81
3.2.1	Definition einer quadratischen Funktion	82
3.2.2	Gemeinsame Punkte	86
3.2.3	Aufstellen von Parabelgleichungen	94
3.2.4	Quadratische Funktionen in Anwendungen	97
3.2.5	Parabelschar	103
3.3	Ganzrationale Funktionen dritten Grades	106
3.3.1	Einführung	107
3.3.2	Polynomgleichungen	110
3.3.3	Nullstellen einer ganzrationalen Funktion	114
3.3.4	Ganzrationale Funktionen dritten Grades in Anwendungen	121
3.3.5	Aufstellen von Kurvengleichungen	126
3.3.6	Kurvenschar	132
4	Gebrochenrationale Funktionen	135
4.1	Einführung	136
4.2	Die Grundfunktion $f$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$	137
4.3	Schaubilder von gebrochenrationalen Funktionen	140
4.4	Hebbare Definitionslücken	146
4.5	Gebrochenrationale Funktionen in Anwendungen	148
5	Exponentialfunktionen	159
5.1	Einführungsbeispiele	160
5.2	Definition einer Exponentialfunktion	162
5.3	Die Euler'sche Zahl $e$	164
5.4	Exponentialfunktionen zur Basis $e$	165

5.5	Schaubilder von Exponentialfunktionen .....	167
5.6	Exponentialgleichungen und geometrische Interpretation .....	172
5.6.1	Der natürliche Logarithmus .....	172
5.6.2	Exponentialgleichungen .....	173
5.6.3	Bestimmung von gemeinsamen Punkten .....	178
5.7	Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben .....	181

**II Von der mittleren zur lokalen Änderungsrate 188**

1	Änderungsrate .....	189
2	Ableitung .....	193
2.1	Definition der Ableitung .....	193
2.2	Ableitungsregeln .....	195
2.3	Ableitung und Steigung .....	199

**III Grundwissen 205**

1	Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen .....	205
2	Algebraische Begriffe und Vorübungen .....	206
2.1	Begriffe .....	206
2.2	Rechnen mit Summen und Differenzen .....	206
2.3	Rechnen mit Brüchen .....	208
2.4	Vereinfachung durch Ausklammern .....	209
2.5	Rechnen mit Potenzen .....	210
3	Gleichungen und Gleichungssysteme .....	212
3.1	Lineare Gleichungen .....	212
3.2	Lineare Gleichungssysteme .....	214
3.3	Quadratische Gleichungen .....	216

**Anhang 220**

1	Fachbegriffe aus der Wirtschaft .....	220
2	Lösungen der Modellierungen und Tests .....	224
3	Lösungen der Aufgaben im Kapitel Grundwissen .....	236
4	TI-84 Plus CE-T Kurzanleitung .....	239
5	Mathematische Zeichen .....	252
6	Stichwortverzeichnis .....	253