Ott
Schomburg

Abitur 2022

Aufgabensammlung zur zentralen schriftlichen Abiturprüfung
Berlin/Brandenburg

Mathematik

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Wolfgang Schomburg
Studium der Mathematik an der Technischen Universität zu Berlin

* * * * *

4. Auflage 2021

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0644-04-DS

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung für Berlin und Brandenburg enthält auf die neue Prüfungsordnung für die gymnasiale Oberstufe abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf die schriftliche Abiturprüfung 2022 im Fach Mathematik.
Der aktuellen Entwicklung geschuldet ist eine veränderte Struktur der schriftlichen Prüfungsklausuren für das Fach Mathematik **im Abitur 2022**:

- Der Umfang der Prüfungsklausuren bleibt unverändert. Im Leistungskursfach müssen Aufgaben im Umfang von 120 Bewertungseinheiten bearbeitet werden.
- Der Anteil des hilfsmittelfreien Aufgabenteils bleibt unverändert bei 25 % der Bewertungseinheiten.
- Die Bearbeitungszeiten bleiben unverändert bei 330 Minuten (Lk), jeweils einschließlich Auswahlzeit.

Verändert werden der Auswahlmodus und der Umfang der einzelnen Aufgaben zu den Sachgebieten. Der Auswahlmodus enthält nun eine vorgeschaltete **„Auswahl durch die unterrichtende Lehrkraft“.** Dadurch werden das thematische Spektrum der zu bearbeitenden Aufgaben und die Auswahlmöglichkeiten für die Schülerinnen und Schüler beschränkt.

Die zentrale Abiturprüfung 20212 besteht aus zwei Teilen,
einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil (ohne Formelsammlung, Taschenrechner, CAS-Gerät) und einem Prüfungsteil mit Hilfsmittel (Formelsammlung und Taschenrechner/CAS).
Die Aufgaben für den **Leistungskurs bzw. das erhöhte Anforderungsniveau** sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten: Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie.
Die Zentralen Abiturprüfungen Berlin (LK) und Brandenburg (eA) der Jahre 2016 bis 2018 wurden ergänzt und verändert, um in Umfang und Schwierigkeit der Abiturprüfung 2022 zu entsprechen.
Die Zentralen Abiturprüfungen für den Leistungskurs (Berlin) bzw. für das erhöhte Anforderungsniveau (Brandenburg) waren die letzten Jahre großteils identisch, ab 2018 vollkommen übereinstimmend. Daher ist es sinnvoll eine gemeinsame Aufgabensammlung anzubieten.
Die Original-Abituraufgaben ab 2019 werden in der Aufgabensammlung behandelt und ausführlich gelöst.
Diese Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.
Die Aufgaben sind als Übungsaufgaben zu verstehen, im Umfang und in den Fragestellungen. Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.
Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben schülergerechte und ausführliche Lösungen angegeben. An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.
Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Veränderte Struktur der schriftlichen Prüfungsklausuren im Abitur 2022

Erhöhtes Anforderungsniveau (eA) — Leistungskurs (LK)

Die insgesamt zu erreichenden 120 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:

Aufgabenstellung 1 (Hilfsmittelfreier Aufgabenteil): 30 BE (85 Minuten)
Das Aufgabenset für SuS enthält 4 Aufgaben zur Analysis (je 5 BE) und zwei Aufgaben (je 5 BE) zu einem Sachgebiet (Stochastik oder Analytische Geometrie)

Aufgabenstellung 2 (komplexe Aufgaben zu den Sachgebieten: 90 BE (245 Minuten)
Das Aufgabenset für SuS enthält 2 Aufgaben zur Analysis (je 50 BE) und eine Aufgabe (40 BE) zu einem Sachgebiet (Stochastik oder Analytische Geometrie)

<table>
<tr><th></th><th>Vorbereitete Prüfungsaufgaben</th><th>Auswahl durch die Lehrkraft</th><th>Aufgabenset für die SuS</th><th>Wahl durch die SuS</th><th>BE/Zeit</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Aufgabenstellung 1 (Hilfsmittelfreier Aufgabenteil)</td><td>4 Aufgaben zur Analysis (je 5 BE)</td><td>keine</td><td>4 Aufgaben zur Analysis</td><td rowspan="3">keine</td><td rowspan="3">30 BE (70 Minuten + 15 Minuten)</td></tr>
<tr><td>2 Aufgaben zur Analytische Geometrie (je 5 BE)</td><td rowspan="2">2 Aufgaben zu einem Sachgebiet</td><td rowspan="2">2 Aufgaben zu einem anderen Sachgebiet</td></tr>
<tr><td>2 Aufgaben zur Stochastik (je 5 BE)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Aufgabenstellung 2 (komplexe Aufgaben zu den Sachgebieten)</td><td>2 Aufgaben zur Analysis 50 BE</td><td>keine</td><td>2 Aufgaben zur Analysis</td><td>1 Aufgabe muss ausgewählt werden</td><td rowspan="3">50 BE + 40 BE (245 Minuten einschl. Auswahlzeit)</td></tr>
<tr><td>1 Aufgabe zur Analytische Geometrie 40 BE</td><td rowspan="2">1 Aufgabe zu einem Sachgebiet</td><td rowspan="2">1 Aufgabe zu einem anderen Sachgebiet</td><td rowspan="2">keine</td></tr>
<tr><td>1 Aufgabe zur Stochastik 40 BE</td></tr>
</table>

Die Gesamtbearbeitungszeit beträgt 330 Minuten. Sie beinhaltet eine individuelle Lese- und Auswahlzeit für die Prüflinge, die 30 Minuten nicht überschreiten sollte.
Die Abiturprüfung beginnt mit der Bearbeitung der Aufgabenstellung 1 zum hilfsmittelfreien Teil in einem Umfang von 85 Minuten.
Hinweis: Hier gibt es keine Wahlmöglichkeiten für SuS. Die Aufgabenstellung und die Lösung zum hilfsmittelfreien Teil werden spätestens nach 85 Minuten abgegeben.
Eine frühere Abgabe ist möglich. Prüflinge, die für die Aufgabenstellung 1 weniger Zeit benötigen, können bereits mit der Bearbeitung der weiteren Wahlaufgaben beginnen, vorerst ohne die Nutzung von Hilfsmitteln.
Nach der **vollständigen Abgabe der Lösungen der Aufgabenstellung 1** durch alle Prüflinge beginnt mit der Nutzung von Formelsammlung und Rechner bzw. CAS-Rechengerät die weitere Arbeit an den Aufgaben.
Hinweis für das Abitur 2022: *Wenn eine Schule sich z.B. für Vektorgeometrie und gegen Stochastik entschieden hat, dann fliegt die Stochastik aus dem hilfsmittelfreien Teil und aus den weiteren Aufgabenstellungen heraus! In der Aufgabensammlung werden die beiden Gebiete jedoch gleichwertig behandelt.*

I Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

Übungsaufgaben zur Aufgabenstellung 1 Analysis

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 22/23**

a) Die Funktion g erfüllt folgende Bedingungen: $g'(3) = 2$

$g''(3) = 0$

$g'''(3) \neq 0$

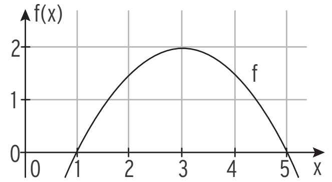
Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen

b) Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^{2 \cdot x} - 4 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagrechte Tangente hat.

Ermitteln Sie eine Stammfunktion von h, deren Schaubild durch den Punkt $P(1 \mid 0)$ verläuft.

c) Die Abbildung zeigt den Graphen einer quadratischen Funktion f.



c1) Geben Sie eine Gleichung der Funktion f an.

c2) Gegeben sind die beiden Terme

(I) $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$ und (II) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{f(4) - f(x)}{4 - x}$; $x \neq 4$

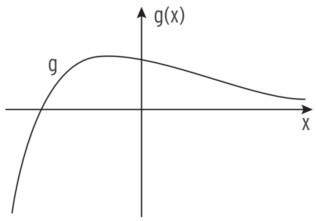
Beschreiben Sie ihre jeweilige Bedeutung in Bezug auf den Graphen von f.

c3) Veranschaulichen Sie den Wert des Terms $4 \cdot 2 - \int_1^5 f(x)dx$.

Aufgabe 2

Die Abbildung zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten, differenzierbaren Funktion g.

Betrachtet wird eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f, für deren erste Ableitungsfunktion $f'(x) = e^{g(x)}$ gilt.

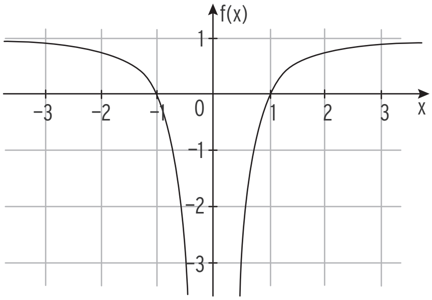


a) Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Extrempunkt hat.

b) Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Wendepunkt hat.

Aufgabe 3 **Lösungen Seite 23/24**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$; $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat. Die Abbildung zeigt den Graphen von f , der symmetrisch bezüglich der Ordinatenachse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit $g(x) = -3$ gegeben.



a) Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die Abszissenachse und die Gerade g einschließen.

Aufgabe 4

K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{x-3} - 2$.
Die Tangente an K an der Stelle $x = 3$ schneidet die Asymptote von f in S.

Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx$.

Interpretieren Sie den Integralwert mithilfe geeigneter Flächenstücke.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Aufgabe 7

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4e^{2x} - 2$.
Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(0{,}5) = -1$.

Lösungen – Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

Lösungen – Analysis Übungsaufgaben

Aufgabe 1 *Lösung der Aufgabe Seite 8*

a) $g'(3) = 2$ Die Steigung der Tangente an das Schaubild von g an der Stelle x = 3 ist 2.

$g''(3) = 0$; $g'''(3) \neq 0$ Das Schaubild der Funktion g hat einen Wendepunkt an der Stelle x = 3.

b) $h(x) = e^{2x} - 4 \cdot x$; $h'(x) = 2e^{2x} - 4$

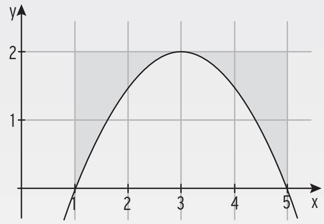
Punkt mit waagrechter Tangente: $h'(x) = 0$ $2e^{2x} - 4 = 0$
$e^{2x} = 2$
Logarithmieren: $2x = \ln(2)$, also $x = \frac{1}{2}\ln(2)$
y-Wert: $h(\frac{1}{2}\ln(2)) = 2 - 4 \cdot \frac{1}{2}\ln(2) = 2 - 2\ln(2)$
Gesuchter Punkt $(\frac{1}{2}\ln(2) \mid 2 - 2\ln(2))$

Stammfunktion von h: $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2 \cdot x^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

durch P(1 | 0): $H(0) = \frac{1}{2}e^2 - 2 + c = 0$ für $c = 2 - \frac{1}{2}e^2$

Gesuchte Stammfunktion: $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2 \cdot x^2 + 2 - \frac{1}{2}e^2$; $x \in \mathbb{R}$

c1) Nullstellenansatz: $f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$
Mit den Nullstellen (abgelesen): $x_1 = 1$; $x_2 = 5$
Punktprobe mit S(3 | 2): $2 = a \cdot (3 - 1) \cdot (3 - 5) \Rightarrow a = -0{,}5$
Mögliche Funktionsgleichung: $f(x) = -0{,}5(x - 1) \cdot (x - 5)$
Hinweis: Ansatz mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ und Einsetzen von 3 Punkten (1 | 0); (5| 0),(3| 2) führt über ein LGS auf $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5$
Ansatz mit $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ und Einsetzen von Scheitelpunkt S(3| 2) und P(1 | 0) führt auf $f(x) = -0{,}5(x - 3)^2 + 2$



c2) Der erste Term beschreibt die durchschnittliche Steigung des Graphen von f im Intervall [1; 3].
Der zweite Term beschreibt die Steigung des Graphen von f an der Stelle 4.

c3) Einzeichnen eines möglichen Flächenstücks.

Aufgabe 2 *Lösung der Aufgabe Seite 8*

a) Extrempunkt: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

Wegen $f'(x) = e^{g(x)} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ hat der Graph von f keinen Extrempunkt.

b) Wendepunkt: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$ oder $f''(x_1) = 0$ und $f''(x)$ ändert das Vorzeichen in x_1.

Mit der Kettenregel: $f''(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

An der Stelle, an der g ein Maximum annimmt, ändert sich das Vorzeichen von $g'(x)$.

Wegen $e^{g(x)} > 0$ ändert sich damit an dieser Stelle auch das Vorzeichen von $f''(x)$,

d. h. der Graph von f hat einen Wendepunkt.

Aufgabe 3 *Lösung der Aufgaben Seite 9*

a) $f(x) = g(x)$

$$1 - \frac{1}{x^2} = -3$$

$$\frac{1}{x^2} = 4$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$$

oder $f(\frac{1}{2}) = -3$ wahre Aussage

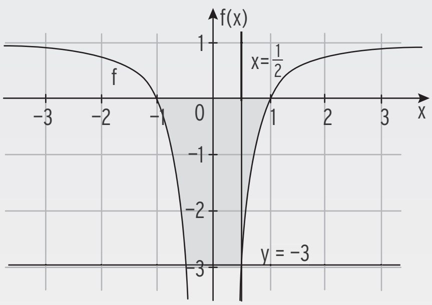
b) Gerade g: Waagrechte durch $(0 \mid -3)$

Inhalt der Fläche = Rechtecksinhalt + 2 · Inhalt der Fläche unter dem Graphen auf $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx = \left[x + \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = 2 - 2{,}5 = -0{,}5$$

$A = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0{,}5 = 4$

Der Flächeninhalt beträgt 4 FE.



Aufgabe 4

$f(x) = e^{x-3} - 2$

Ableitungen: $f'(x) = e^{x-3}$

Ansatz für die Tangente: $y = mx + b$

Mit $f(3) = -1$ und $f'(3) = 1 = m$ $(e^0 = 1)$

erhält man $-1 = 1 \cdot 3 + c \Rightarrow b = -4$

Tangente in $P(3 \mid -1)$: $y = x - 4$

Schnitt von Tangente und der

Asymptote: $y = -2$: $-2 = x - 4 \Rightarrow x = 2$

Koordinaten des Schnittpunktes: $S(2 \mid -2)$

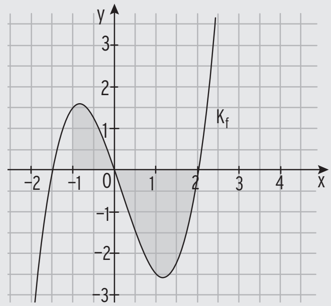
Aufgabe 5 *Lösung der Aufgaben Seite 9*

$$\int_{-1}^{2}(x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{2}$$

$$= -\frac{10}{3} + \frac{13}{12} = -2{,}25$$

(Flächenbilanz)

Das Flächenstück zwischen dem Graphen von f und der x-Achse oberhalb der x-Achse ist um 2,25 kleiner als das Flächenstück zwischen dem Graphen von f und der x-Achse unterhalb der x-Achse.



Aufgabe 6

Schnittstellen von f und g durch

Gleichsetzen: f(x) = g(x) $\qquad -x^2 + 3 = 2x$

Nullform: $\qquad x^2 + 2x - 3 = 0$

Lösung mit $x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ $\qquad x_{1|2} = -1 \pm \sqrt{1 + 3} = -1 \pm 2$

Schnittstellen = Integrationsgrenzen: $\qquad x_1 = -3;\quad x_2 = 1$

Integration von − 3 bis 1 über f(x) − g(x): $\qquad \int_{-3}^{1}(f(x) - g(x))dx$

$$= \int_{-3}^{1}(-x^2 + 3 - 2x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x - x^2\right]_{-3}^{1}$$

obere Grenze − untere Grenze $\qquad = -\frac{1}{3} + 3 - 1 - \left(-\frac{1}{3}(-3)^3 + 3(-3) - (-3)^2\right)$

$$= \frac{32}{3}$$

Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt $\frac{32}{3}$.

Aufgabe 7

$f(x) = 4e^{2x} - 2$

Stammfunktion: $\qquad F(x) = 2e^{2x} - 2x + c;\ c \in \mathbb{R}$

Bedingung für c: F(0,5) = − 1: $\qquad F(0{,}5) = 2e^1 - 1 + c = -1 \Leftrightarrow c = -2e$

Gesuchte Stammfunktion: $\qquad F(x) = 2e^{2x} - 2x - 2e$

Übungsaufgaben zur Aufgabenstellung 1 Analytische Geometrie

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 73/74**

Gegeben sind die Ebenen E: $x + 3y = 6$ und F: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Schnittgeraden von E und F.

b) Ermitteln Sie die Gleichung einer Geraden, die in E enthalten ist und mit F keinen Punkt gemeinsam hat.

c) Gegeben ist die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a^2 \\ 6 \\ a-4 \end{pmatrix}$; $a, r, s \in \mathbb{R}$

Begründen Sie, dass die Gleichung für alle reellen Zahlen a eine Ebene beschreibt. Zeigen Sie, dass es keinen Wert für a gibt, für den die verwendeten Spannvektoren in der Ebenengleichung orthogonal verlaufen.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von g und h an. Zeigen Sie, dass g und h senkrecht zueinander verlaufen.

b) Die Ebene E enthält die Geraden g und h.
Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

Aufgabe 3

Der Punkt $A(-2|3|\sqrt{12})$ ist bezüglich des Koordinatenursprungs symmetrisch zum Punkt B. Die Punkte $C_r(3r|2r|0)$ mit $r \in \mathbb{R}$ bilden eine Gerade g, die im Koordinatenursprung senkrecht zur Geraden durch A und B steht.

Bestimmen Sie alle Werte von r, für die A, B und C_r Eckpunkte eines Dreiecks mit dem Flächeninhalt 65 sind.

Aufgabe 4 **Lösungen Seite 75/76**

1 Gegeben ist die Ebene E durch E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u, v \in \mathbb{R}$

Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Geraden an,

(A) die in der Ebene E liegt,

(B) die keine gemeinsamen Punkte mit E hat.

2 Zeichnen Sie einen Würfel mit der Kantenlänge 3 LE in ein räumliches Koordinatensystem.

Markieren Sie eine Kante und geben Sie eine Gleichung der Geraden an, auf der diese Kante liegt.

Aufgabe 5

1 Gegeben ist die Gerade g mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

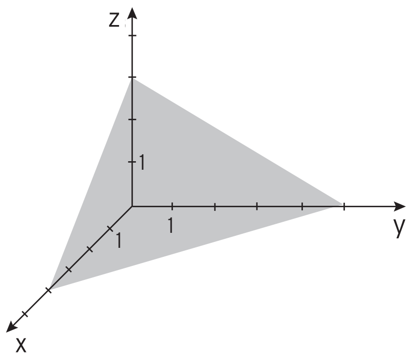
Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Geraden an, die

a) parallel zu g durch P (0| 1| –2) verläuft,

b) g rechtwinklig schneidet.

2 Ermitteln Sie eine Gleichung der dargestellten Ebene.

Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung des Abstands vom Ursprung zur Ebene.



Aufgabe 6

Gegeben sind die Punkte A(3| 1| 1) und B(−2| 2| 4) sowie die Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

1 Bestätigen Sie, dass g durch A und B geht.

2 Die Geraden g und h haben genau einen Schnittpunkt. Bestimmen Sie diesen Schnittpunkt.

3 Geben Sie einen weiteren Punkt auf g an, der von A den gleichen Abstand hat wie B.

Aufgabe 7 **Lösungen Seite 76/77**

Gegeben ist die Ebene E_1: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$.

1 Zeigen Sie, dass alle Punkte der Ebene E_1 die folgende Gleichung erfüllen:

$7x + y - 5z = 0$

2 Geben Sie für die Ebene E_2: $\vec{x} = p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + q \cdot \vec{v}$; $p, q \in \mathbb{R}$.

einen Vektor $\vec{v}$ so an, dass die Ebene E_2 nicht identisch mit der Ebene E_1 ist.

Begründen Sie, dass der von Ihnen angegebene Vektor $\vec{v}$ die Bedingung erfüllt.

Aufgabe 8

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1 Zeigen Sie, dass $\vec{a}$ orthogonal zu $\vec{b}$ und nicht orthogonal zu $\vec{c}$ ist.

2 Gegeben ist ein weiterer Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ d \end{pmatrix}$ mit $d \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass bei geeigneter Wahl von d der Vektor $\vec{d}$ orthogonal zu $\vec{a}$

und auch orthogonal zu $\vec{b}$ sein kann, aber nicht zu beiden Vektoren gleichzeitig.

Aufgabe 9

1 Gegeben ist das Viereck ABCD mit den Eckpunkten $A(0|\,0|0)$, $B(-3|\,1|4)$,

$C(2|-4|4)$ und $D(5\,|-5|\,0)$.

Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

2 In einem kartesischen Koordinatensystem ist die senkrechte Pyramide ABCDS gegeben. Die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche ist 5, die Höhe der Pyramide 7.

a) Geben Sie mögliche Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an.

b) Mindestens einer der Eckpunkte soll so verschoben werden, dass sich das Volumen der Pyramide vervierfacht. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten jeweils die Koordinaten der verschobenen Eckpunkte an und begründen Sie Ihre Angabe.

Lösungen – Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

Lösungen –Analytische Geometrie Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Lösungen der Aufgaben Seite 61

a) E: $x + 3y = 6$; F: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ ausmultipliziert: F: $2x - z = 1$

Schnittgerade von E und F

Lösung des linearen Gleichungssystems: $x + 3y = 6$ (1) $\wedge$ $2x - z = 1$ (2)

Aus (1) ergibt sich $3y = 6 - x$

Man setzt: $x = t$ $\qquad y = 2 - \frac{t}{3}$

Aus (2) ergibt sich $z = 2x - 1$ $\qquad z = 2t - 1$

Schnittgerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$; $r, t \in \mathbb{R}$

b) Als Aufpunkt der gesuchten Geraden h dient ein Punkt P in E, der nicht in F liegt, z.B.

P(6 | 0 | 0). Als Richtungsvektor dient der Richtungsvektor der Schnittgeraden von E und F.

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a^2 \\ 6 \\ a-4 \end{pmatrix}$; $a, r, s \in \mathbb{R}$

Die Gleichung beschreibt eine Ebene, wenn die Spannvektoren linear unabhängig sind,

also einer nicht das Vielfache des anderen ist:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} a^2 \\ 6 \\ a-4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Aus Zeile y folgt: $k = 0{,}5$

Einsetzen ergibt: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} a^2 \\ 6 \\ a-4 \end{pmatrix}$ Aus Zeile z folgt: $-4 = 0{,}5(a-4) \Rightarrow a = -4$

Einsetzen in Zeile x ergibt: $\qquad 2 = 0{,}5 \cdot (-4)^2$ Widerspruch

Die Spannvektoren sind linear unabhängig.

Spannvektoren verlaufen orthogonal: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 \\ 6 \\ a-4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2a^2 + 18 - 4a + 16 = 0$

$2a^2 - 4a + 34 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 17 = 0$

Diese Gleichung hat wegen $D = 1 - 17 < 0$ keine Lösung, die Vektoren verlaufen nicht orthogonal.

Aufgabe 2 *Lösungen der Aufgaben Seite 61*

a) A(3 |− 3| 3) ist der gemeinsame Aufpunkt der beiden Geraden, also ein Schnittpunkt.

Skalarprodukt der Richtungsvektoren: $\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = 0$

g und h verlaufen senkrecht zueinander.

b) Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren ergibt einen Vektor, der senkrecht zu den Richtungsvektoren von g und h steht.

$\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix}$ Der Vektor $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ist Normalenvektor der Ebene.

Gleichung von E die Form $y = c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

A(3 |− 3| 3) liegt auf E, also gilt: $c = -3$

Gleichung von E in Koordinatenform E: $y = -3$

Alternative: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$

Umwandlung in Koordinatenform:

$x = 3 + 3r + s$

$y = -3$

$z = 3 - r + 3s$

Die y-Koordinate ist unabhängig von r und s. Ebenengleichung E: $y = -3$

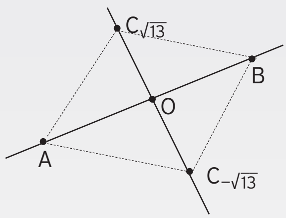
Aufgabe 3

Bei einer Spiegelung am Koordinatenursprung drehen sich die Vorzeichen der Koordinaten um.

Punkt B ist der Spiegelpunkt von Punkt A: B $(2\,|-3|-\sqrt{12})$.

Die Punkte $C_r(3r|2r|0)$ mit $r \in \mathbb{R}$ bilden eine Ursprungsgerade g: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

sie steht senkrecht auf AB.



Flächeninhalt des Dreiecks ABC_r : $A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OC_r}\right|$

Mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\-6\\-2\sqrt{12}\end{pmatrix}$ und $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16 + 36 + 4 \cdot 12} = \sqrt{100} = 10$

und $\overrightarrow{OC_r} = \begin{pmatrix}3r\\2r\\0\end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{OC_r}\right| = \sqrt{9r^2 + 4r^2} = \sqrt{13r^2}$

ergibt sich mit der Bedingung A = 65

$\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OC_r}\right| = 65$

$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{13r^2} = 65$

$\sqrt{13r^2} = 13$

Quadrieren $13r^2 = 13^2 = 169 \Rightarrow r^2 = 13$

Zwei Lösungen für r: $r = -\sqrt{13} \vee r = \sqrt{13}$

Aufgabe 4 *Lösungen der Aufgaben Seite 62*

1 E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; u, v ∈ ℝ

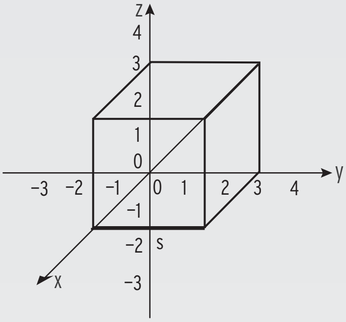
(A) g liegt in der Ebene E: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; r ∈ ℝ

(B) h hat keine gemeinsamen Punkte mit E: h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; s ∈ ℝ

2 Würfel mit der Kantenlänge 3

Gleichung der Geraden, auf der diese

Kante liegt: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; r ∈ ℝ



Aufgabe 5

1 g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; s ∈ ℝ

a) h verläuft parallel zu g durch P (0| 1| -2):

Mit dem Richtungsvektor von g und dem angegebenen Punkt erhält man: h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; r ∈ ℝ.

b) k schneidet g rechtwinklig: Mit einem orthogonalen Richtungsvektor und

dem gleichen

Stützvektor wie bei g erhält man: k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; t ∈ ℝ.

2 Gleichung der dargestellten Ebene:

Die Ebene verläuft durch die Punkte A(4|0|0), B(0|5|0) und C(0|0|3).

Damit ergibt sich: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; t ∈ ℝ.

Verfahren zur Bestimmung des Abstands vom Ursprung zur Ebene
(eine Möglichkeit): Zunächst bestimmt man einen Normalenvektor $\vec{n}$ von E. Dann stellt man die Gleichung der Gerade g mit dem Ursprung O als Stützpunkt und $\vec{n}$ als Richtungsvektor auf. Man berechnet den Schnittpunkt S von g und E und bestimmt den Abstand $\overline{OS}$.
Damit hat man den gesuchten Abstand der Ebene E vom Ursprung.

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2016

Aufgabenstellung 2

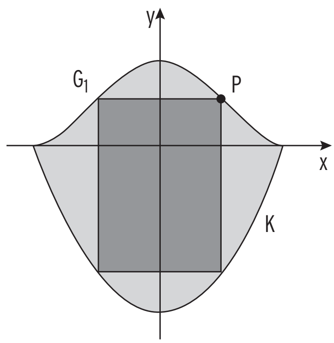
Aufgabe 2.1 Stadtwappen

Gegeben sind die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = x^4 - 2ax^2 + a^2$; $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und die Funktion g mit $g(x) = 2x^2 - 2$.
Die Graphen der Schar f_a sind G_a und der Graph der Funktion g ist K .

a) Weisen Sie nach, dass alle Graphen G_a achsensymmetrisch zur y-Achse verlaufen. Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von a G mit den beiden Koordinatenachsen.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte von G_a in Abhängigkeit von a. Für jeden Parameterwert a mit $a > 0$ sind die drei lokalen Extrempunkte Eckpunkte eines Dreiecks. Wenn der Parameterwert a verdoppelt wird, vervielfacht sich der Flächeninhalt des ursprünglichen Dreiecks $A_\triangle$. Das neue Dreieck hat den Flächeninhalt $A_{neu} = v \cdot A_\triangle$. Ermitteln Sie den Faktor v.

c) Die Graphen G_1 und K schließen im Intervall [– 1; 1] eine Fläche ein, die als Schablone für das Wappen einer Stadt genutzt werden soll. Berechnen Sie den zugehörigen Flächeninhalt.



d) Der Punkt P liegt im I. Quadranten auf G_1 (siehe Abbildung). P ist Eckpunkt eines Rechtecks, dessen Seiten achsenparallel verlaufen und dessen weitere Eckpunkte auf den Begrenzungslinien des Wappens liegen. Innerhalb dieses Rechtecks soll das Wappentier abgebildet werden. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks mit der Gleichung $A(x) = 2x^5 - 8x^3 + 6x$ berechnet werden kann und ermitteln Sie den maximalen Flächeninhalt des Rechtecks. Auf den Nachweis des Maximums wird verzichtet.

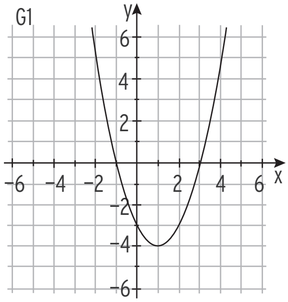
e) Die untere Begrenzung des Stadtwappens soll statt durch die quadratische Parabel K mithilfe einer anderen quadratischen Parabel modelliert werden. Dabei sollen die Symmetrie des Wappens sowie die Schnittpunkte $S_1(-1|0)$ und $S_2(1|0)$ mit G_1 zwar erhalten bleiben, sich aber die Fläche des Wappens um 2 FE vergrößern. Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der neuen Parabel.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	9	12	5	9	5	40

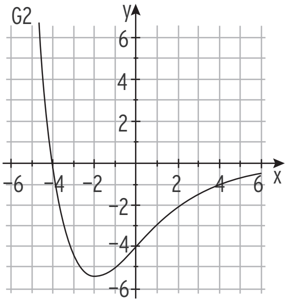
Aufgabe 34 **Lösungen Seite 31**

In den Abbildungen G1 – G4 sind Graphen von Funktionen dargestellt. In den Abbildungen A1 – A6 sind die Graphen möglicher zugehöriger Ableitungsfunktionen (1. Ableitung) dargestellt.
Ordnen Sie jedem Graphen aus {G1; G2; G3; G4} einen passenden Graphen aus {A1; A2; A3; A4; A5; A6} zu.

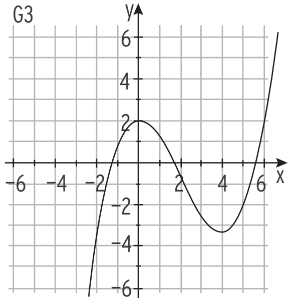
G1



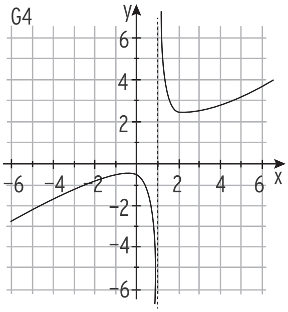
G2



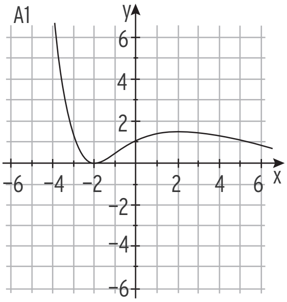
G3



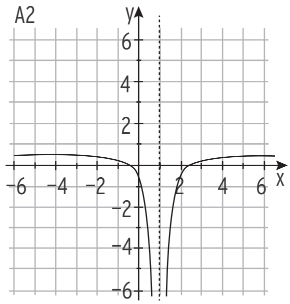
G4



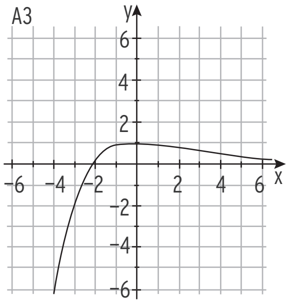
A1



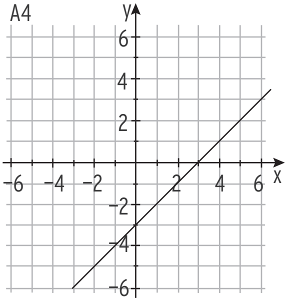
A2



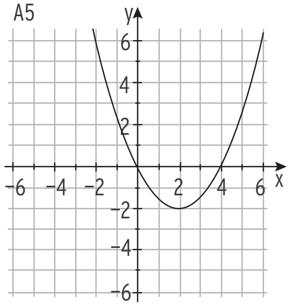
A3



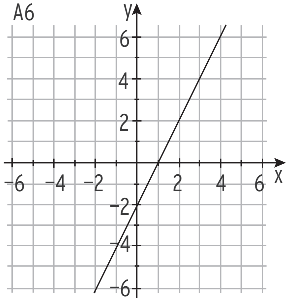
A4



A5



A6



III Zentrale schriftliche Abiturprüfungen eA

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2022

Mathematik Kurs auf erhöhtem Anforderungsniveau – Leistungskurs

Aufgabenvorschlag Teil 1

Hilfsmittel: Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

nicht für Aufgabenstellung 1

Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist

Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen

Gesamtbearbeitungszeit: 330 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: hilfsmittelfreier Teil

Hinweis: Hier gibt es keine Wahlmöglichkeiten.

Die Aufgabenstellung und die Lösung zum hilfsmittelfreien Teil werden nach 85 Minuten abgegeben.

Mit der Bearbeitung der weiteren Aufgabenstellungen bereits zuvor begonnen werden.

In jedem Fall können die zugelassenen Hilfsmittel erst nach Ablauf der 85 Minuten verwendet werden.

Aufgabenvorschlag Teil 2

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: **Analysis**

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: **Analytische Geometrie**

Aufgabenstellung 4

Thema/Inhalt: **Stochastik**

Zur Beachtung für das Abitur 2022:

SuS erhält eine Aufgabe aus Aufgabenstellung 3 bzw. Aufgabenstellung 4 nach Auswahl durch die Lehrkraft.

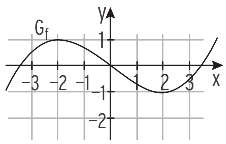
Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenvorschlag Teil 1

Aufgabenstellung 1

1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis

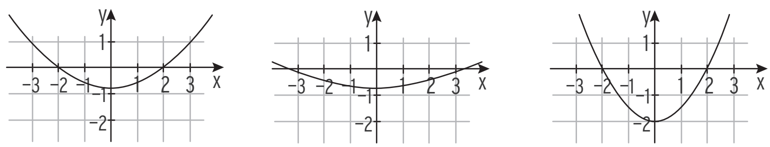


Der abgebildete Graph G_f stellt eine Funktion f dar.

a) Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f.

Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.

I II III



b) Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f.

Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall [1; 3] an.

Begründen Sie Ihre Angabe.

1.2 Analysis

Gegeben ist die Funktion f' mit $f'(x) = 3x^2 - 6x - 6$.

a) Der Punkt $P(-1|10)$ liegt auf dem Graphen der Funktion f.

Bestimmen Sie eine Gleichung von f.

b) Für die Funktion f gilt: $\int_a^b f(x)dx = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$; $a \neq b$ und $f(a) = f(b) = 0$.

Geben Sie die Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion f an.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (Fortsetzung)

1.3 Analytische Geometrie

Gegeben sind die Ebene E: $4x - y + 2z = 9$ und die Ebene H: $x - 2y + z = 1$.

a) Begründen Sie, dass die Ebenen E und H nicht parallel zueinander sind.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ursprungsgeraden, die sowohl zur Ebene E als auch zur Ebene H parallel ist.

1.4 Analytische Geometrie

Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und die Ebene E: $x + 2y - 2z = 2$

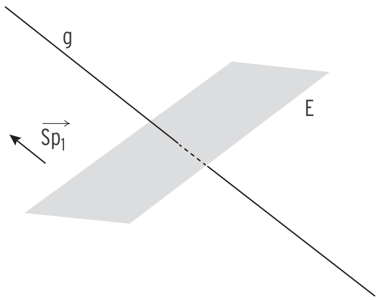
schneiden sich im Punkt S.

a) Berechnen Sie die Koordinaten von S.

b) Der Punkt P_1 liegt auf g, aber nicht in E. Die Abbildung zeigt die Ebene E, die Gerade g sowie einen Repräsentanten des Vektors $\overrightarrow{SP_1}$.

Für den Punkt P_2 gilt: $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} - 4 \cdot \overrightarrow{SP_1}$, wobei O den Koordinatenursprung bezeichnet.

Zeichnen Sie die Punkte S, P_1 und P_2 in die Abbildung ein.



Fortsetzung auf der nächsten Seite

Hinweis für das Abitur 2022:

Aufgrund der vorgeschalteten „Auswahl durch die unterrichtende Lehrkraft" erhalten die Abiturientinnen und Abiturienten in der Prüfung zur Bearbeitung

- in Aufgabenstellung 1 entweder die Stochastik- oder die Analytische Geometrie-Aufgabe.
- in Aufgabenstellung 3 und 4 nur **eine** Aufgabe (Stochastik- oder Analytische Geometrie).

Um allen Prüflingen die Möglichkeit zum Üben zu geben, haben die Autoren den Umfang belassen.

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (Fortsetzung)

1.5 Stochastik

Erscheinen beim Wurf von fünf Würfeln fünf gleiche Zahlen, so spricht man von einem Kniffel.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit fünf idealen Würfeln einen Kniffel zu erhalten.

Pauls erster Wurf

Erhält man ein Paar gleicher Zahlen und eine andere Zahl auf allen restlichen drei Würfeln, so spricht man vom Full House. Hat man beim ersten Wurf sein Ziel noch nicht erreicht, darf man einen zweiten Wurf wagen.

b) Paul hat vier gleiche Zahlen gewürfelt, er benötigt jedoch ein Full House.
Nun will er nur mit einem der vier Würfel mit gleicher Zahl weiterwürfeln.
Jasmin schlägt vor, zusätzlich den Würfel mit der einzelnen Zahl zum Würfeln aufzunehmen.
Untersuchen Sie, wer die bessere Gewinnstrategie hat.

1.6 Stochastik

Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“, die beiden anderen Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

a) Das Glücksrad wird viermal gedreht.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden.

b) Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgaben												
Aufgabe	1.1 Analysis 1		1.2 Analysis 2		1.3 Geometrie 1		1.4 Geometrie 2		1.5 Stochastik 1		1.6 Stochastik 2		
Teilaufgabe	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	Summe
BE	3	2	3	2	2	3	3	2	2	3	2	3	30

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenvorschlag Teil 2

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.1 Fischlogo

Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch $f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right)$; $a \in \mathbb{R}$; $a > 0$.
Die zugehörigen Graphen sind G_a.
Des Weiteren ist die Funktion h durch $h(x) = \frac{1}{10} e^{x-1} + 2$ gegeben.
Der Graph dieser Funktion ist K.

a) Geben Sie den Definitionsbereich von f_a an.
Berechnen Sie die Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a.

b) Alle Graphen G_a der Funktionenschar f_a besitzen genau einen lokalen Extrempunkt $E(x|\, f_a(x))$.
Zeigen Sie, dass die x-Koordinate dieses Punktes $x = \frac{a}{e}$ ist und bestimmen Sie die Art des Extrempunktes.
Begründen Sie, dass für den Wertebereich W aller Funktionen der Schar f_a gilt:
$W = \{y|\, y \in \mathbb{R},\, y \geq -e^{-1}\}$.

c) Die Funktionenschar $\overline{f_a}$ ist durch $\overline{f_a}(x) = \frac{x}{a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right)$; $a \in \mathbb{R}$; $a < 0$ gegeben.
Geben Sie den Definitionsbereich von $\overline{f_a}$ an.
Erläutern Sie, wie sich die Lage und die Art des Extrempunktes der Graphen von $\overline{f_a}$ ohne Rechnung aus der Lage und der Art des Extrempunktes der Graphen von f_a ergeben.

d) Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von h für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ an.
Skizzieren Sie den Graphen K mindestens im Intervall $-2 \leq x \leq 4$.

e) An die Graphen der Funktionen h und ihrer Ableitungsfunktion h′ wird in den Punkten $B(u|h(u))$ und $B^*(u|h'(u))$ mit $u \in \mathbb{R}$ jeweils eine Tangente gelegt.
Beschreiben Sie die besondere Lage dieser beiden Tangenten zueinander.
Begründen Sie Ihre Aussage.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Erhöhtes Anforderungsniveau - Leistungskurs Lösungen

Aufgabenstellung 1 Lösungen

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis

a) Graph I

Begründung: Graph II kommt nicht infrage, da die Extremstellen von f ($x = \pm 2$) Nullstellen von f' sein müssen. Graph III kommt nicht infrage, da die Steigung des Graphen von f im Punkt $(0|f(0))$ nicht kleiner als -1 ist.

b) Für $1 \leq x \leq 3$ gilt $F'(x) = f(x) \leq 0$. Damit ist F im gegebenen Intervall monoton fallend.

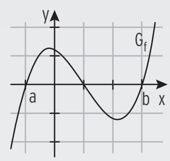
1.2 Analysis

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + c;\ c \in \mathbb{R}$

Punktprobe mit $P(-1\,|\,10)$: $10 = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 6\cdot(-1) + c \Rightarrow c = 8$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

b) Die Funktion f ist eine Funktion dritten Grades und besitzt maximal drei Nullstellen. Außer a und b existiert noch eine weitere Nullstelle, da die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen gleich groß ist. Beide Teilflächen liegen auf unterschiedlichen Seiten der x-Achse. Deshalb liegt die dritte Nullstelle zwischen a und b.



1.3 Analytische Geometrie

E: $4x - y + 2z = 9$; H: $x - 2y + z = 1$

a) Normalenvektor von E: $\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$; ... von H: $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ kat keine Lösung

Die Normalenvektoren der Ebenen E und H sind nicht kollinear.

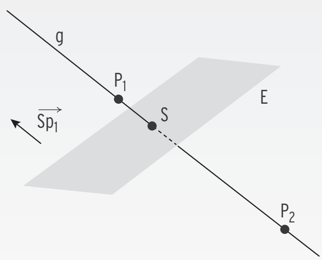
Damit verlaufen die beiden Ebenen nicht parallel zueinander.

b) Der Richtungsvektor der Geraden kann z. B. aus dem Vektorprodukt der Normalenvektoren ermittelt werden. $\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\-7\end{pmatrix}$

Dieser Vektor ist Richtungsvektor der Schnittgeraden, er steht senkrecht auf beiden Normalenvektoren: g: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\-7\end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

g verläuft parallel zu E und zu H.

1.4 Analytische Geometrie



a) g in E einsetzen: $2r + 2(2 + 4r) - 2r = 2 \Rightarrow r = -\frac{1}{4}$,

d.h. $S(-\frac{1}{2}\,|1\,|-\frac{1}{4})$

b) Hinweis: $-\overrightarrow{SP_1}$ $\searrow$

Lösungen Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenstellung 1

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.5 Stochastik

a) $P(\text{Kniffel}) = 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^4$ Im 1. Wurf kann jede Zahl fallen.

b) Paul muss die einzelne Zahl zum zweiten Mal würfeln. Diese ist damit vorgegeben:

$P_1\,(\text{Full House}) = \frac{1}{6}$

Jasmin kann eine der fünf übrigen Zahlen würfeln und muss diese Zahl auf dem zweiten geworfenen Würfel wiederholen.

$P_2\,(\text{Full House}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

Da $\frac{5}{36} < \frac{1}{6}$, hat Paul die bessere Strategie.

1.6 Stochastik

a) $P(0) = P(1) = P(2) = \frac{1}{5}$; $P(9) = \frac{2}{5}$ $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{625}$

b) Möglichkeiten: (2;9), (9; 2), (9; 9) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{25}$

Lösungen Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenstellung 2 Aufgabe 2.1 Fischlogo

G_a: $f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right)$; $a \in \mathbb{R}$; $a > 0$.

K: $h(x) = \frac{1}{10} e^{x-1} + 2$

a) Definitionsbereich von f_a

Es muss gelten $\frac{x}{a} > 0 \Rightarrow x > 0$, also ist $D_{f_a} = \{x | x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$.

Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a

Bedingung für Nullstellen: $f_a(x) = 0$ $\frac{x}{a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right) = 0$

$\frac{x}{a} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ entfällt, da $x = 0$ nicht zum Definitionsbereich gehört

$\ln\left(\frac{x}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} = 1 \Leftrightarrow x = a$

Die Graphen der Funktionenschar f_a besitzen die Nullstelle a.

b) Ableitung: $f_a'(x) = \frac{1}{a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{a}$

Hinweis: $\ln\left(\frac{x}{a}\right) = \ln(x) - \ln(a)$; $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ oder $\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{x}$

Notwendiges Kriterium für Extremstelle: $f_a'(\frac{a}{e}) = 0$

Einsetzen: $\frac{1}{a} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) + \frac{1}{a} = 0$ wegen $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(1) - \ln(e) = -1$

Untersuchung der Art des Extrempunktes: $f_a''(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{ax}$

($\frac{1}{a}$ ist eine Konstante.)

$f_a''(\frac{a}{e}) = \frac{1}{a \cdot \frac{a}{e}} = \frac{e}{a^2} > 0$; In $\frac{a}{e}$ liegt ein lokales Minimum vor

Lösungen Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenstellung 2 Aufgabe 2.1 Fischlogo Fortsetzung

b) Wertebereich:

Funktionswert: $f_a(\frac{a}{e}) = \frac{1}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

Der Funktionswert $y = -\frac{1}{e}$ ist unabhängig von a .

Da es genau einen Extrempunkt für alle Funktionen der Schar f_a gibt, ist $E(\frac{a}{e}\,|-\frac{1}{e})$ globaler Tiefpunkt.

Es gilt: $\lim\limits_{x \to \infty} f_a(x) = +\infty$.

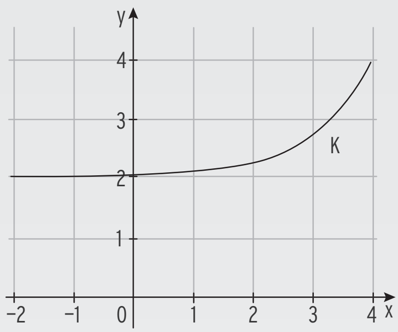
Der lokale Tiefpunkt ist gleichzeitig der globale Tiefpunkt, also $f_a(x) \geq -\frac{1}{e}$

c) $\overline{f_a}(x) = \frac{x}{a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right)$; $a < 0$

Es muss gelten $\frac{x}{a} > 0 \Rightarrow x < 0$, also ist $D_{\overline{f_a}} = \{x | x \in \mathbb{R}, x < 0\}$.

Die Graphen der Funktionenschar $\overline{f_a}$, $a < 0$ gehen durch Spiegelung an der y-Achse aus den Graphen der Funktionenschar f_a mit $a > 0$ hervor. Daher besitzt die Funktionenschar $\overline{f_a}$, $a < 0$ die lokalen Tiefpunkte $T(\frac{a}{e}\,|-\frac{1}{e})$.

Hinweis: $\frac{a}{e} < 0$ für $a < 0$



d) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 2$

$(e^{x-1} \to 0$ für $x \to -\infty)$

waagrechte Asymptote: y = 2

$\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = +\infty$

$(e^{x-1} \to \infty$ für $x \to \infty)$

e) $h(x) = \frac{1}{10}e^{x-1} + 2$; $h'(x) = \frac{1}{10}e^{x-1} = h''(x)$

Die Tangenten verlaufen zueinander parallel, da der Anstieg der Tangenten in allen Punkten $B(u|h(u))$ und $B^*(u|h'(u))$ gleich ist $(h'(u) = h''(u) = \frac{1}{10}e^{u-1})$.

f) Ansatz: $p(x) = ax^2 + bx + c$ Ableitung: $p'(x) = 2ax + b$

Bedingungen und LGS für a,b, c:

$p(-1) = 6$	$a - b + c = 6$
$p(-1) = 0$	$-2a + b = 0$
$p(4) = 4$	$16a + 4b + c = 4$

Lösung des LGS: $a = -\frac{2}{25}$; $b = -\frac{4}{25}$; $c = \frac{148}{25}$

Funktionsgleichung: $p(x) = -\frac{2}{25}x^2 - \frac{4}{25}x + \frac{148}{25}$ oder auch $p(x) = -0{,}08x^2 - 0{,}16x + 5{,}92$

g) $g(x) = p(x) - h(x) = -\frac{2}{25}x^2 - \frac{4}{25}x + \frac{148}{25} - (\frac{1}{10}e^{x-1} + 2)$

Stammfunktion von g: $G(x) = -\frac{2}{75}x^3 - \frac{2}{25}x^2 + \frac{148}{25}x - (\frac{1}{10}e^{x-1} + 2x)$

Lösungen Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenstellung 2 Aufgabe 2.1 Fischlogo Fortsetzung

g) $A = \int_{-2}^{0} k(x)\,dx = [\,G(x)\,]_{-2}^{0} \approx 7{,}91$ Der Flächeninhalt des Streifens beträgt ca. 7,9 m².

h) Maul: $m(x) = \frac{x}{4}\ln\left(\frac{x}{4}\right) + 4$

Es wird die Differenzenfunktion $d(x) = p(x) - m(x)$ gebildet.

Die Extremstelle der Differenzenfunktion ist die Abszisse des Punktes A (x_A).

Die Ordinate des Punktes ergibt sich aus der Summe des Funktionswertes von m an der Stelle x_A und der Hälfte des Funktionswertes der Differenzenfunktion d an Stelle x_A.

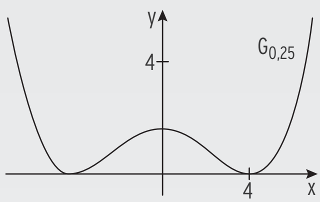
oder $x_A = \frac{1}{2}(m(x_A) + p(x_A))$

Hinweis: Dass die Extremstelle u. U. am Rand des Intervalls $0{,}5 \leq x \leq 4$ liegen kann, muss nicht betrachtet werden.

Lösungen Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenstellung 2 Aufgabe 2.2 Funktionenschar

1. $G_k : f_k(x) = 8k \cdot (kx - 1)^2 \cdot (kx + 1)^2;\ x \in \mathbb{R}$



a) Gemeinsame Punkte mit den Achsen:

$f_k(0) = 8k;\ f_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{k} \vee x = -\frac{1}{k}$

damit $(0 \mid 8k);\ (\frac{1}{k} \mid 0);\ (-\frac{1}{k} \mid 0)$

Abbildung 1 skaliert: $G_{0,25}$

$f_{0,25}(x) = 2 \cdot (0{,}25x - 1)^2 \cdot (0{,}25x + 1)^2;\ f_{0,25}(0) = 2$; Nullstellen von $f_{0,25}$: ± 4

b) G_{2k} geht aus G_k durch eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ und eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2 hervor.

$f_k(x) = 8k \cdot (kx - 1)^2 \cdot (kx + 1)^2;\qquad f_{2k}(x) = 16k \cdot (2kx - 1)^2 \cdot (2kx + 1)^2;$

Faktor: $8k \rightarrow 16k$ Streckung in y-Richtung mit dem Faktor

Aus (kx wird 2kx, Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$

$(kx - 1)^2 \cdot (kx + 1)^2 = ((kx - 1) \cdot (kx + 1))^2 = (k^2x^2 - 1)^2$, also $f_k(x) = 8k \cdot (k^2x^2 - 1)^2$

G_k symmetrisch bezüglich der y-Achse:

Bedingung: $f_k(-x) = f_k(x)$ $\qquad f_k(-x) = 8k \cdot (k^2(-x)^2 - 1)^2 = 8k \cdot (k^2x^2 - 1)^2 = f_k(x)$

c) Die Tangente an G_k im Punkt $(x_1 \mid f_k(x_1))$ steht senkrecht zur Gerade durch diesen Punkt und den Koordinatenursprung.

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2021

Mathematik Kurs auf erhöhtem Anforderungsniveau – Leistungskurs

Aufgabenvorschlag Teil 1

Hilfsmittel: Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

nicht für Aufgabenstellung 1

Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist

Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen

Gesamtbearbeitungszeit: 300 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Zusätzlich stehen weitere 30 Minuten als Bearbeitungszeit zur Verfügung (Gesamtbearbeitungszeit: 330 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit).

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: hilfsmittelfreier Teil

Hinweis: Hier gibt es keine Wahlmöglichkeiten.

Die Bearbeitungszeit von 70 Minuten für die Aufgabenstellung 1 wird um 15 Minuten verlängert. Sie beträgt daher 85 Minuten.

Die Aufgabenstellung und die Lösungen zum hilfsmittelfreien Teil werden nach 85 Minuten abgegeben.

Mit der Bearbeitung der weiteren Aufgabenstellungen kann bereits zuvor begonnen werden.

In jedem Fall können die zugelassenen Hilfsmittel erst nach Ablauf der 85 Minuten verwendet werden.

Aufgabenvorschlag Teil 2

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: **Analysis**

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: **Analytische Geometrie oder Stochastik**

Hinweis: Bearbeiten Sie Aufgabe 3.

Für die Prüfung 2021 und die Prüfung 2022 gilt:

Schüler:in erhält nur die von der Lehrkraft ausgewählte Aufgae zur Aufgabenstellung 3.

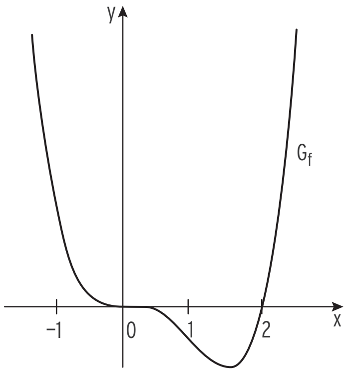
Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2021

Aufgabenvorschlag Teil 1

Aufgabenstellung 1

1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis



Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
Die Achseneinteilung der y-Achse ist nicht bekannt.
Gegeben sind die folgenden drei Funktionsgleichungen:

(I) $f_1(x) = x^2 \cdot (x^2 - 4)$

(II) $f_2(x) = x \cdot (x^2 - 2x)$

(III) $f_3(x) = x^3 \cdot (x - 2)$

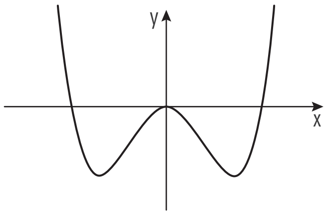
Untersuchen Sie für jede der Funktionsgleichungen (I), (II) und (III), ob sie den abgebildeten Graphen G_f beschreiben kann. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung. 5

1.2 Analysis

Gegeben ist eine in ℝ definierte Funktion f mit

$f(x) = x^4 - k \cdot x^2$, wobei k eine positive reelle Zahl ist.

Die Abbildung zeigt den Graphen von f.



a Zeigen Sie, dass $f'(x) = 2x(2x^2 - k)$, eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von f ist. 1

b Die beiden Tiefpunkte des Graphen von f haben jeweils die y-Koordinate − 1. Ermitteln Sie den Wert von k. 4

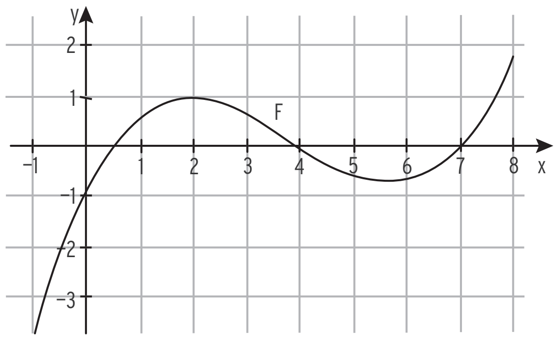
Fortsetzung auf der nächsten Seite

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2021

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (Fortsetzung)

1.3 Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F von f.



a Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise den Funktionswert von f an der Stelle 0. 1

b Geben Sie ein Intervall [a; b] mit $a,b \in \mathbb{R}$ an, so dass gilt: $\int_a^b f(x)dx = 0$. 2
Begründen Sie Ihre Aussage.

c Untersuchen Sie, ob es eine Stelle $x_S \in [0; 7]$ gibt, für die gilt: 2
f ist an der Stelle x_S monoton steigend.
Geben Sie ggf. einen möglichen Wert für x_S an.

1.4 Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \ln(2x - 5)$; $x \in \mathbb{R}$, $x > 2{,}5$.

a Zeigen Sie, dass $x_0 = 3$ eine Nullstelle von f ist. 1

b Die Normale h an den Graphen der Funktion f im Punkt S (3|0) schließt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck ein. 4
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2021

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (Fortsetzung)

1.5 Geometrie

Betrachtet werden die Ebene E: $x_1 - x_2 + x_3 - 3 = 0$ und für $a \in \mathbb{R}$ die Geraden
$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

a Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den die Gerade g_a senkrecht zu E steht. 2

b Untersuchen Sie, ob es einen Wert von a gibt, für den die Gerade g_a in E liegt. 3

1.6 Geometrie

Gegeben ist die Ebenenschar $E_a: a \cdot x + (2 + a) \cdot y - 2 \cdot z = 6$; $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. 5
Untersuchen Sie, ob es einen Wert von a gibt, für den die Schnittpunkte der Ebene E_a mit den Koordinatenachsen ein gleichseitiges Dreieck bilden.

30

1.5 Stochastik

Die Vierfeldertafel gehört zu einem Zufallsexperiment mit Ereignissen A und B. Für die Wahrscheinlichkeit p gilt $p \neq 0$.

	B	$\overline{B}$	
A	p		$3p$
$\overline{A}$			$1 - 3p$
	$4p$		

a Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel. Zeigen Sie, dass p nicht den Wert $\frac{1}{5}$ haben kann. 3

b Für einen bestimmten Wert von p sind A und B stochastisch unabhängig. Ermitteln Sie diesen Wert von p. 2

1.6 Stochastik

a In einer Urne befinden sich zwei rote und acht schwarze, sonst nicht unterscheidbare Kugeln. Zwei Kugeln werden nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei genau eine rote Kugel gezogen wird. 2

b In einer Urne befinden sich eine rote und n schwarze Kugeln. 3
Zwei Kugeln werden nacheinander ohne Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie den kleinsten Wert für n, für den gilt: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dabei keine rote Kugel zu ziehen, beträgt mindestens 90 %.

30

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2021

Aufgabenvorschlag Teil 2

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.1 Brücke

Die Abbildung 1 zeigt modellhaft den Längsschnitt einer dreiteiligen Brücke aus Holz für eine Spielzeugeisenbahn. Die Züge können sowohl über die Brücke fahren als auch darunter hindurch.

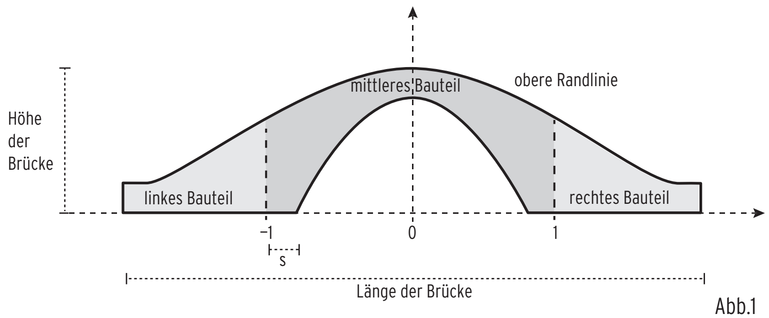


Abb.1

Die obere Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 + 1$ beschrieben werden. Dabei werden die Endpunkte dieser Randlinie durch die beiden Tiefpunkte des Graphen von f dargestellt. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x-Achse die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.

1 **a** Zeigen Sie rechnerisch, dass die obere Randlinie achsensymmetrisch ist. 2

b Bestimmen Sie rechnerisch die Höhe und die Länge der Brücke. 5
(zur Kontrolle: Ein Tiefpunkt des Graphen von f hat die x-Koordinate 2.)

c Betrachtet wird derjenige Punkt der oberen Randlinie, der sich am Übergang vom mittleren zum rechten Bauteil befindet. Prüfen Sie, ob dieser Punkt auf halber Höhe zwischen dem höchsten Punkt der oberen Randlinie und deren rechtem Endpunkt liegt. 3

d Geben Sie die Bedeutung des Terms $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$ im Sachzusammenhang an und berechnen Sie seinen Wert. 2

e Berechnen Sie die Größe des größten Steigungswinkels der Brücke, der beim Überfahren zu überwinden ist. 5

Der parabelförmige Teil der unteren Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion q mit $q(x) = 0{,}8 - a \cdot x^2;\ a \in \mathbb{R},\ a > 0$ beschrieben werden.

f In der Abbildung 1 ist die Länge einer der beiden Bodenflächen des mittleren Bauteils mit s bezeichnet. Bestimmen Sie alle Werte von a, die für diese Länge mindestens 0,1 dm liefern. 4

Fortsetzung auf der nächsten Seite