Bohner
Ott
Deusch

Mathematik für berufliche Gymnasien

Lineare Algebra

Vektorgeometrie

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik am BSW Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Umschlag: © frhuynh – Fotolia.com, kleines Bild oben: © Picture-Factory – Fotolia.com,
kleines Bild unten: Africa Studio – Fotolia.com
Download-Icon: Stoyan Haytov – Fotolia.com

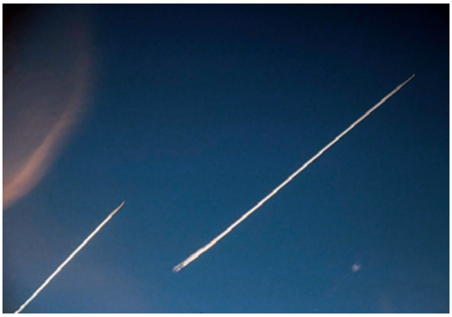
* * * * * * * * * *

1. Auflage 2016

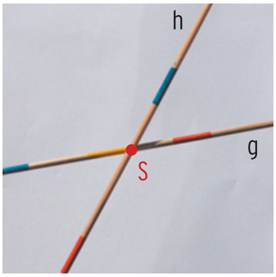
Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de
ISBN 978-3-8120-**0638**-5

4.3 Gegenseitige Lage von zwei Geraden

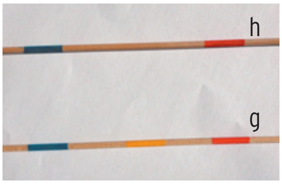
Betrachtet man zwei Geraden im Raum, so stellt sich die Frage, welche Lage sie zueinander haben können.
Hierbei gibt es vier Möglichkeiten.



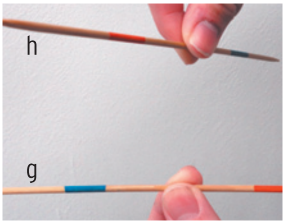
a) Die Geraden g und h **schneiden** sich **in einem Punkt S.**



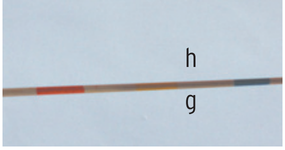
b) Die Geraden g und h sind **parallel** und **verschieden** (echt parallel).



c) Die Geraden g und h schneiden sich nicht und sind nicht parallel. Sie sind **windschief.**



d) Die Geraden g und h sind **identisch.**



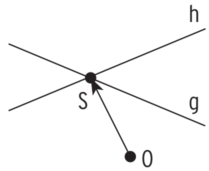
Beispiel

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; r, s $\in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von g und h.

Lösung

Der gemeinsame Punkt S liegt auf g und h, somit gilt für den Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$:



$\vec{x} = \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Umformung: $r\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ bzw. $r\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

LGS in Matrixform: $\begin{array}{c} \begin{matrix} r & s & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{array}\right) \end{array}$

Lösen mit dem Additionsverfahren: $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Auflösung ergibt: s = 2 und r = −1

Das LGS ist damit **eindeutig lösbar,** somit **schneiden** sich die Geraden g und h in **genau einem Punkt S.**

Ortsvektor des Schnittpunktes: $\vec{x} = \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt: S(1 | −2 | 2)

Beispiel

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$; r, s $\in \mathbb{R}$.

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

Lösung

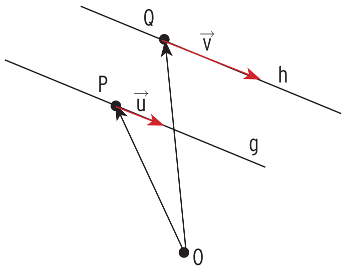
Untersuchung auf Parallelität

Die Richtungsvektoren auf lineare Abhängigkeit untersuchen:

$\vec{u} = k\vec{v}$: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Da der Richtungsvektor von g ein Vielfaches des Richtungsvektors von h ist, sind die Geraden g und h **parallel.**

Mit einer **Punktprobe** stellt man fest, ob die Geraden g und h parallel und verschieden oder ob sie identisch sind.
Man kann den Aufpunkt P von g wählen und überprüfen, ob P auf der Geraden h liegt.



Punktprobe mit P(7 | 4 | 2): $\begin{pmatrix}7\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}6\\4\\-4\end{pmatrix}$

Umformung: $\begin{pmatrix}6\\4\\-1\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}6\\4\\-4\end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix}s = 1\\ s = 1\\ s = 0{,}25\end{matrix}$

Es gibt kein s, sodass alle drei Gleichungen erfüllt sind.
Die Geraden g und h sind **parallel und verschieden** (echt parallel).
Hinweis: Wenn es ein s gibt, sodass alle drei Gleichungen erfüllt sind, sind die Geraden identisch.

Beispiel

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\-1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$.

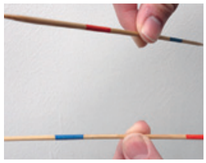
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

Lösung

Untersuchung auf Parallelität: $\begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix}k = -3{,}5\\ 0 = 0\\ k = 0{,}25\end{matrix}$

Es gibt kein k, sodass alle drei Gleichungen erfüllt sind.

Die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig. g und h sind nicht parallel.



Gleichsetzen: $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$

Umformung: $r\begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\\-3\end{pmatrix}$

Lösen mit dem Additionsverfahren: $\begin{array}{c} \begin{matrix}r & s & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c}7 & 2 & 5\\0 & -1 & -1\\1 & -4 & -3\end{array}\right)\end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c}7 & 2 & 5\\0 & -1 & -1\\0 & 30 & 26\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}7 & 2 & 5\\0 & -1 & -1\\0 & 0 & -4\end{array}\right)$

Das LGS ist **unlösbar,** somit schneiden sich die Geraden g und h nicht.
g und h sind **nicht parallel** und schneiden sich nicht. Sie sind **windschief.**

Beachten Sie:

Zwei Geraden, die nicht parallel sind und die keinen gemeinsamen Punkt haben, heißen **windschief.**

Beispiel

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; r, s $\in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie: Die Geraden g und h schneiden sich senkrecht.

Lösung

Lage von g und h

Gleichsetzen ergibt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Umformung: $r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

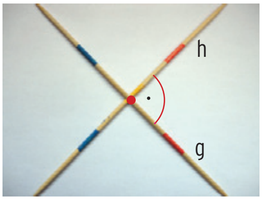
Lösen des Gleichungssystems: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 7 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 7 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 7 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Das LGS ist **eindeutig lösbar,** die Geraden g und h schneiden sich in einem Punkt.

Bedingung für **senkrecht** stehen:

Die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Geraden g und h stehen senkrecht aufeinander. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 - 2 - 4 = 0$



Die Geraden g und h schneiden sich senkrecht, sie sind orthogonal.

Beispiel

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$; r, s $\in \mathbb{R}$.

Wie müssen a und b gewählt werden, damit g und h parallel verlaufen?
Wie liegen die Geraden in diesem Fall zueinander?

Lösung

Untersuchung auf **Parallelität:** $k\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} 2k = a \\ k = -0{,}5 \\ k = b \end{array}$

Auflösung: $a = -1$; $b = -0{,}5$

Für $a = -1$ und $b = -0{,}5$ verlaufen die Geraden parallel.

Punktprobe mit dem Aufpunkt A(1 | 0 | 0) von h in g: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} r = 0{,}5 \\ r = 2 \\ r = -3 \end{array}$

Es gibt kein r, sodass alle drei Gleichungen erfüllt sind.

Die Geraden sind für $a = -1$ und $b = -0{,}5$ parallel und verschieden, d. h. echt parallel.

Was man wissen sollte – über die gegenseitige Lage von zwei Geraden

Die Geraden g und h sind gegeben durch

$g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r\vec{u};\ r \in \mathbb{R}$ $h: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + s\vec{v};\ s \in \mathbb{R}$

Untersuchung der gegenseitigen Lage von g und h in zwei Schritten

1. Untersuchung auf Parallelität

$\vec{u} = k\vec{v}$

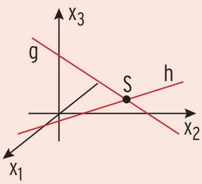
Es gibt kein k.	Es gibt ein k.
$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind **linear unabhängig.**	$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind **linear abhängig.**
g und h sind **nicht parallel.**	g und h sind **parallel.**

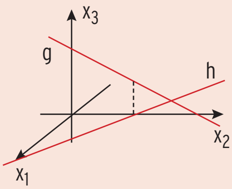
2. Gleichsetzen: $\overrightarrow{OP} + r\vec{u} = \overrightarrow{OQ} + s\vec{v}$

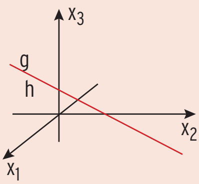
Das LGS ist

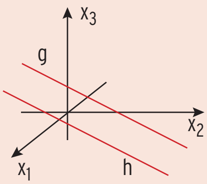
Punktprobe mit P „in h“
(bzw. Punktprobe mit Q „in g“)

eindeutig lösbar.	unlösbar.	P liegt auf h.	P liegt nicht auf h.
g und h **schneiden**	g und h sind	g und h sind	g und h sind **parallel**
sich in **einem Punkt.**	**windschief.**	**identisch.**	**und verschieden.**



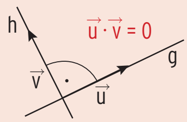






Orthogonale Geraden

Zwei Geraden g und h mit den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind **orthogonal,** wenn gilt: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.



Hinweis: Auch Geraden, die sich nicht schneiden, können orthogonal zueinander sein.

Aufgaben

1 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h.
Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

2 Die Gerade g verläuft durch die Punkte A(0 | 5 | 0) und B(0 | 0 | 5).
Die Gerade h verläuft durch die Punkte C(−1 | 4 | 3) und D(5 | 5 | 1).
Untersuchen Sie, ob die Geraden g und h windschief sind.

3 Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

Die Gerade h schneidet g in einem Punkt.
Die Gerade k verläuft parallel zu g und die Gerade p ist zu g windschief.
Geben Sie jeweils eine Geradengleichung an.

4 Gegeben sind die Punkte A(−1 | 0 | 0), B(3 | 4 | 0), C(0 | 3 | −4) und D(1 | 2 | 0).
Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B und die Gerade h durch C und D.
Zeigen Sie, dass sich die Geraden g und h schneiden. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S. Liegt der Schnittpunkt S zwischen A und B?

5 Die Geraden g und h schneiden sich in einem Punkt.
Überprüfen Sie, ob sich g und h senkrecht schneiden.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$

b) g: $\vec{x} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$

6 Gegeben sind der Punkt P und die Gerade g. Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden h, die orthogonal zu g ist und durch den Punkt P verläuft.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$, P(6 | 4 | 0) b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$, P(−3 | 1 | 7)

Von der Normalenform (Koordinatenform) zur Parameterform

Beispiel

Die Ebene E ist gegeben durch $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform.

Lösung

Gleichung in Koordinatenform: $2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2 = 0$

Es handelt sich um eine Gleichung mit drei Variablen. Zwei Variablen sind frei wählbar und die dritte kann man in Abhängigkeit von diesen beiden bestimmen.

Wir wählen: $x_1 = r;\ x_2 = s;\ \ r, s \in \mathbb{R}$

Aus $2r - 3s - x_3 + 2 = 0$

erhält man: $x_3 = 2r - 3s + 2$

Vektorschreibweise: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 2r - 3s + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}$

Hinweis: Man kann auch drei Punkte der Ebene E bestimmen, z. B. $A(-1\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,0\,|\,2)$ und $C(1\,|\,1\,|\,1)$. Mithilfe dieser Punkte kann man die Gleichung der Ebene in der Drei-Punkte-Form angeben.

Beispiel

Die Ebene E ist gegeben durch $x_1 + x_2 = 1$.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform.

Lösung

Gleichung in Koordinatenform: $x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 = 1$

Eine Gleichung mit drei Variablen. Zwei Variable sind frei wählbar.

x_3 ist frei wählbar, dann kann man entweder x_2 oder x_1 noch frei wählen.

$x_3 = r;\ x_2 = s$ frei wählbar: $x_1 + s = 1$

$x_1 = 1 - s$

Vektorschreibweise: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - s \\ s \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}$

Hinweis: Die Ebene E ist parallel zur x_3-Achse.

Was man wissen sollte – über Formen einer Ebenengleichung

- **Parameterform**
  Gegeben sind ein Stützvektor $\vec{p}$ und zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die nicht parallel sind.
  $\vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$; $r, s \in \mathbb{R}$.
- **Normalenform**
  Gegeben sind ein Stützvektor $\vec{p}$ und ein Normalenvektor $\vec{n}$.
  $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$
- **Koordinatenform**
  Gegeben sind die Koeffizienten n_1, n_2, n_3 und die Konstante b.
  $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b$

Umwandlung einer Form in eine andere

Parameterform	**Normalenform**	**Koordinatenform**
$\vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$	$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$	$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b$

Parameterform → Normalenform: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

Normalenform → Koordinatenform: Ausmultiplizieren

Koordinatenform → Parameterform: Zwei Variablen (r und s) sind frei wählbar.

Aufgaben

1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalen- und in Koordinatenform.

a) b)

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

c) E: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

d) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

e) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

f) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

a) b)

2 Geben Sie eine Koordinatenform der Ebene E an.

a) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

b) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

c) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

d) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

e) E: $\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$

f) E: $\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 5$

a) b)

3 Bestimmen Sie für die Ebene E eine Gleichung in der Normalenform.

a) E: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8$

b) E: $5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 20 = 0$

c) E: $4x_1 + 3x_2 = 12$

d) E: $x_2 - 2x_3 + 6 = 0$

e) E: $x_1 = 3$

f) E: $4x_2 = 8$

a) b)

4 Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene E.

a) E: $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$

b) E: $-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -6$

c) E: $x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$

d) E: $-x_1 - 2x_2 = 3$

e) E: $6x_1 = 10$

f) E: $-4x_2 + 3x_3 = 0$

g) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

h) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$

i) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

j) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

5 Die Ebene E geht durch den Punkt P und hat den Normalenvektor $\vec{n}$.
Geben Sie eine Ebenengleichung in Normalenform und Koordinatenform an.

a) $P(6 \mid 3 \mid 2)$; $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

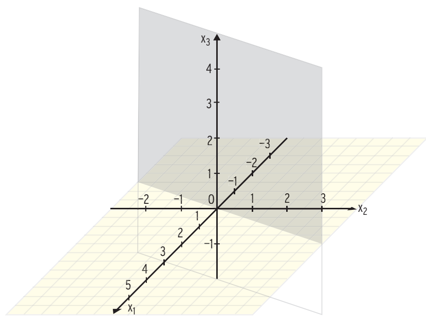
b) $P(0 \mid 4 \mid -2)$; $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

6 Eine Ebene E verläuft durch den Punkt $P(3 \mid 1 \mid 2)$ und hat den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Prüfen Sie, ob der Punkt A in der Ebene E liegt.

a) $A(2 \mid -1 \mid 5)$ b) $A(4 \mid -5 \mid 3)$ c) $A(3 \mid 1 \mid 100)$ d) $A(5 \mid 0 \mid 0)$

7 Gegeben ist die Gleichung $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12$.
Geben Sie drei Lösungen dieser Gleichung an und interpretieren Sie geometrisch.

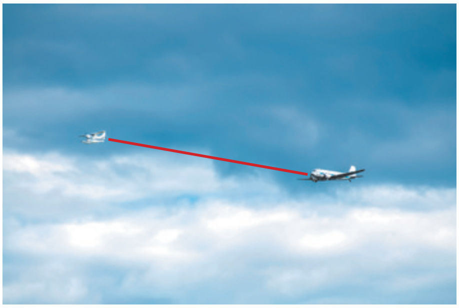
8 Die Ebene E hat die Gleichung $3x_1 + x_2 = 6$.
Welche Werte kann x_3 annehmen?
Welche besondere Lage hat E?
Zeigt die Abbildung die Ebene E?
Begründen Sie Ihre Antwort.



7 Abstandsberechnungen im Raum

7.1 Abstand von zwei Punkten

Zwei Flugzeuge müssen einen Mindestabstand einhalten. Sind die Positionen der Flugzeuge (z. B. durch GPS) bekannt, so berechnet man den Abstand der beiden Punkte.
Der Abstand zwischen zwei Punkten A und B ist die Länge (der Betrag) des Vektors $\overrightarrow{AB}$.
Diese Länge wurde im Kapitel Skalarprodukt schon berechnet.



Beachten Sie:

Gegeben sind die zwei Punkte A $(a_1 | a_2 | a_3)$ und B $(b_1 | b_2 | b_3)$.
Für den **Abstand d der Punkte A und B** gilt:

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Beispiel

Berechnen Sie den Abstand der Punkte $A(-4 | -7 | 3)$ und $B(5 | -3 | -2)$.

Lösung

Vektor $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Abstand d: $d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{122} = 11{,}05$

Aufgaben

1 Gegeben sind die Punkte A und B. Berechnen Sie den Abstand der Punkte A und B.

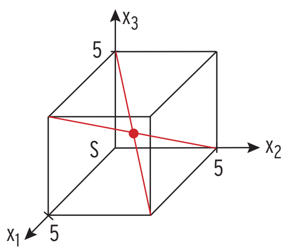
a) $A(6 | -5 | 1)$, $B(-5 | 3 | 7)$

b) $A(-0{,}5 | -2 | 1{,}5)$, $B(2{,}5 | 0 | -0{,}5)$

c) $A(10 | 7 | -5)$, $B(0 | 0 | 0)$

d) $A(4 | -3 | 2)$, $B(-4 | 3 | -2)$

2 Die Abbildung zeigt einen Würfel.
S ist der Schnittpunkt der Raumdiagonalen. Welchen Abstand hat S von den Eckpunkten des Würfels?



7.2 Abstand eines Punktes von einer Ebene

Ein Punkt A, der nicht in der Ebene liegt, hat verschiedene Entfernungen zu den Punkten der Ebene. Die kleinste Entfernung zu einem Ebenenpunkt heißt Abstand des Punktes A von der Ebene.

Beachten Sie:

Der **Abstand eines Punktes A von der Ebene E** ist die **kleinste Entfernung** von A zu E.

Berechnung des Abstandes d

Gleichung der Ebene E: $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$

$\vec{a} - \vec{p}$ und $\vec{n}$ schließen den Winkel α ein.

Aus dem Skalarprodukt: $\cos(\alpha) = \dfrac{(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|(\vec{a} - \vec{p})| \cdot |\vec{n}|}$

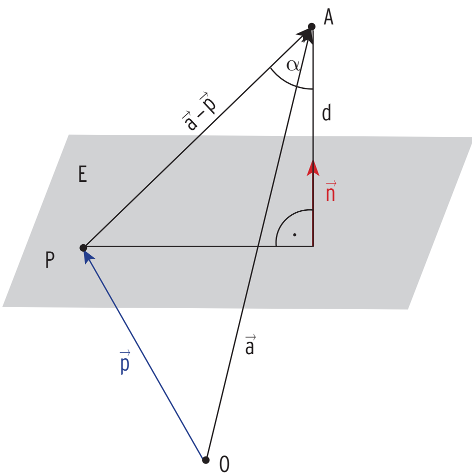
Rechtwinkliges Dreieck: $\cos(\alpha) = \dfrac{d}{|(\vec{a} - \vec{p})|}$

$$d = |(\vec{a} - \vec{p})| \cdot \cos(\alpha)$$

Einsetzen von $\cos(\alpha)$:

$$d = |(\vec{a} - \vec{p})| \cdot \frac{(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|(\vec{a} - \vec{p})| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Diese Formel liefert für $0 \leq \alpha \leq 90°$ einen positiven Wert.
Andernfalls ergibt sich ein negativer Wert.



Nimmt man den Betrag, so erhält man den (positiven) Abstand d:

$$d = \left| \frac{(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| \quad \text{mit} \quad |\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{p} \cdot \vec{n} = b$ erhält man: $(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 - b$.

Abstandsformel in Koordinatenform: $d = \left| \dfrac{n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 - b}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right|$