

# Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

## Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

---

Die Verfasser:

### **Roland Ott**

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

### **Kurt Bohner**

Lehrauftrag Mathematik am BSW Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

### **Ronald Deusch**

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

### **Stefan Rosner**

Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte in zumutbarem Umfang untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.

Stand: August 2022

Umschlag: © frhuynh - Fotolia.com

\* \* \* \* \*

1. Auflage 2022

© 2022 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: [info@merkur-verlag.de](mailto:info@merkur-verlag.de); [lehrer-service@merkur-verlag.de](mailto:lehrer-service@merkur-verlag.de)

Internet: [www.merkur-verlag.de](http://www.merkur-verlag.de)

Merkur-Nr. 0339-01-DS

# Vorwort

## Vorbemerkungen

Der vorliegende Band „Mathematik für berufliche Gymnasien - Jahrgangsstufen 1 und 2“ ist ein Lehr- und Arbeitsbuch für alle beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg für das grundlegende Anforderungsniveau (gA).

Das Lehrbuch richtet sich exakt nach dem neuen Bildungsplan für die gymnasiale Oberstufe, Mathematik, in Baden-Württemberg, der am 01.08.2021 in Kraft getreten ist.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam sowohl die im Lehrplan geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen (modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die im Bildungsplan aufgeführten Kompetenzen und Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

## Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.

1.4.2 Gemeinsame Punkte

**Beispiel 1**

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 1,5 \sin(3x)$ ;  $x \in [-0,5; 2]$ .  
Ermitteln Sie die gemeinsamen Punkte des Graphen von  $f$  mit der  $x$ -Achse.

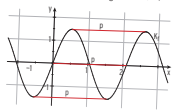
**Lösung**

Bedingung für die Nullstellen:  $f(x) = 0$

$$1,5 \sin(3x) = 0 \quad | : 1,5$$
$$\sin(3x) = 0$$
$$3x = 0; \pm\pi; \pm 2\pi; \pm 3\pi; \dots \quad | : 3$$
$$x = 0; \pm \frac{\pi}{3}; \pm \frac{2\pi}{3}; \pm \pi; \dots$$

Gemeinsame Punkte:  
 $N_1(0|0)$ ;  $N_2(\frac{\pi}{3}|0)$ ;  $N_3(\frac{2\pi}{3}|0)$ ;  $N_4(\pi|0)$

**Alternative** mithilfe der Periode von  $f$ :  
 $p = \frac{2\pi}{3}$   
Der Graph von  $f$  verläuft durch den Ursprung.



Abstand von zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen:  $\frac{2\pi}{3} - \frac{0}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Nullstellen:  
 $x_1 = 0$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{3}$ ;  $x_3 = \frac{2\pi}{3}$ ;  $x_4 = \frac{3\pi}{3} = \pi$

**Beispiel 2**

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 3 \cos(\frac{1}{2}x)$ ;  $x \in \mathbb{R}$ .  
Bestimmen Sie drei Nullstellen von  $f$ .

## 6 Vorwort

Jede Lerneinheit schließt mit einer ausreichenden Anzahl von **Aufgaben** ab. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Aufgaben aus dem Alltag, aus der Wirtschaft und der Technik stellen einen praktischen Bezug her. Eine Differenzierung der Aufgaben ist durch Farben gegeben:

**grün:** Lösung ohne Hilfsmittel

**blau:** keine Vorgabe zur Lösung

**Definitionen, Festlegungen, Merksätze** und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

Die Aufgaben „**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**“ sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Sie werden im Anhang ausführlich gelöst.

Für **Aufgaben mit dem Download-Logo**

stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Webseite <https://www.merkur-verlag.de>.

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Im Buch wird **Geogebra** in vielfältiger Weise, zur Erarbeitung von mathematischen Inhalten und zur Lösung von Aufgaben eingesetzt.

**Videos** dienen der Veranschaulichung von Problemen und Erläuterung von Lösungswegen. Sie unterstützen die Lernenden beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge.

44 | Analysis

**Aufgaben**

1 Bestimmen Sie alle Lösungen exakt, die im Intervall  $[0; 2\pi]$  liegen.

a)  $5\sin(x) = 0$       b)  $\sin(x) = 0,5\sqrt{2}$       c)  $\sin(x) = -0,5$   
d)  $-4\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 4$       e)  $\sin(x + \pi) = 1$       f)  $\sin\left(\frac{3}{2}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

2 Bestimmen Sie alle Lösungen, die im Intervall  $[-\pi; 6,5]$  liegen.

a)  $3\sin(x) - 2 = 0$       b)  $\sin(x) = \frac{1}{3}$       c)  $-5\sin(2x) = 3$

3 Berechnen Sie  $x$  ungerundet so, dass die Gleichung im Intervall  $[-4; 4]$  erfüllt ist.

a)  $2\sin(x) = \sin(2x) - 1$       b)  $-4\sin(x) + 2\sqrt{2} = 0$       c)  $\sqrt{3}\sin(x) - \sqrt{3} = 0$   
d)  $2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2} = 0$       e)  $2\sin\left(\frac{3}{2}x\right) = 3\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$       f)  $1 - 2\sin(x - \pi) = 0$

4 Welche Gleichung hat eine Lösung, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

a)  $\sin(2x + \pi) - 3 = 0$       b)  $4\sin(x) - 3 = 0$       c)  $\sin(2x) = 3 + \sin(x)$

5 Für welchen Wert von  $a$  ist  $x = \frac{\pi}{6}$  Lösung der Gleichung  $a \cdot \sin(x) - 2 = 0$ ?  
Berechnen Sie für diesen Wert von  $a$  alle Lösungen für  $0 < x < \pi$ .

6 Bestimmen Sie die exakten Lösungen, die im Intervall  $[-\pi; 2\pi]$  liegen.

a)  $1 - \cos(x) = 0$       b)  $\cos(x) = 0,5$       c)  $2\cos(x) = \sqrt{2}$

7 Bestimmen Sie alle Lösungen  $x$ , die im Intervall  $[0; 6,5]$  liegen.

a)  $1 + 2\cos(x) = 0$       b)  $3 - 3\cos(x) = 0$       c)  $-4\cos(x) = -1$

1) **Definitionsbereich:**  $D = \mathbb{R}$

2) **Wertebereich:**  $W = [-1; 1]$  d. h.:  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$  bzw.  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$   
Sinus- und Kosinusfunktion haben die **Amplitude 1**.

3) **Periodizität:** Wegen  $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$  bzw.  $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$  gilt:  
Sinus- und Kosinusfunktion haben die **Periode  $2\pi$** .

4) **Nullstellen** von  $f$  mit  $f(x) = \sin(x)$ ;  $x \in \mathbb{R}$   
Bedingung:  $f(x) = 0$        $\sin(x) = 0$  für  $x = 0; \pm\pi; \pm 2\pi; \dots$   
Nullstellen von  $f$ :  $x_1 = 0; x_{2k} = \pm\pi; x_{4k} = \pm 2\pi; \dots$   
allgemein:  $x_k = k\pi; k \in \mathbb{Z}$

**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**

1 Ermitteln Sie die Nullstellen von  $f$  auf  $D = [-3\pi; 3\pi]$ .

a)  $f(x) = 3\sin(x)$       b)  $f(x) = \cos(4x)$       c)  $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}$

2 Bestimmen Sie die Amplitude, die Periode und den Wertebereich von  $f$  mit  $f(x) = -4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + 3$ ;  $x \in \mathbb{R}$ .  
Wie entsteht das Schaubild von  $f$  aus der Kosinuskurve?

3 Lösen Sie folgende Gleichung exakt auf dem gegebenen Bereich.  
a)  $\cos(x) = -\pi$ ;  $x \in [0; 10]$       b)  $\sin(2x) = \frac{1}{2}$ ;  $x \in [0; 4]$       c)  $4\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$ ;  $x \in [-2\pi; 2\pi]$

4 Der Graph von  $g$  mit  $g(x) = a \sin(b \cdot x) + d$  hat einen höchsten Punkt  $A(1|5)$  und den nachfolgend tiefsten Punkt  $B(3|-2)$ . Bestimmen Sie  $a$ ,  $b$  und  $d$ .

**Aufgaben**

1 Bestimmen Sie die Amplitude, die Periode und die Gleichung der Mittellinie.

a)  $f(x) = 3\sin(4x)$       b)  $f(x) = 2\cos(5x)$       c)  $f(x) = -5\sin(2x) + 1$   
d)  $f(x) = -4\cos(x) + 3$       e)  $f(x) = 3 - 6\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$       f)  $f(x) = -2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 3$

2 Geben Sie den zugehörigen Funktionsterm an.

**Gleichungen der Form  $\sin(z) = u$  bzw.  $\cos(z) = u$**

**Beispiel 1**

Bestimmen Sie alle Lösungen von  $\sin(x) = \frac{1}{2}$  im Intervall  $[0; 3\pi]$ .

**Lösung**

Der WTR gibt eine exakte Lösung an:  $x_1 = \frac{\pi}{6}$

**Hinweis:** Der Wert kann auch der Tabelle (\*) (Formelsammlung) entnommen werden.  
\*in \*merkt man auch Arcussinus.

Bestimmen Sie eine weitere Lösung mithilfe der Sinuskurve.

**L4 Trigonometrische Gleichungen und deren geometrische Interpretation**

**1.4.1 Lösung von trigonometrischen Gleichungen**

Gleichungen der Form  $\sin(z) = 0$  bzw.  $\cos(z) = 0$

**Vorbetrachtung**

Man fest ab:  $\sin(0) = 0$ ;  $\sin(\pi) = 0$ ;  $\sin(2\pi) = 0$   
Allgemein gilt:  
 $\sin(2\pi) = 0$  für  $z = 0; \pm\pi; \pm 2\pi; \pm 3\pi; \dots$

# Inhaltsverzeichnis

I Analysis		10
1	Trigonometrische Funktionen und zugehörige Gleichungen .....	10
1.1	Definition der Winkelfunktionen .....	12
1.1.1	Definition der Winkelfunktionen für Winkel von $0^\circ$ bis $90^\circ$ .....	12
1.1.2	Definition der Winkelfunktionen für beliebige Winkel .....	16
1.1.3	Das Bogenmaß eines Winkels .....	20
1.2	Trigonometrische Funktionen .....	21
1.2.1	Sinus- und Kosinusfunktion .....	21
1.2.2	Transformationen .....	23
1.3	Aufstellen von Funktionstermen .....	36
1.4	Trigonometrische Gleichungen und deren geometrische Interpretation .....	38
1.4.1	Lösung von trigonometrischen Gleichungen .....	38
1.4.2	Gemeinsame Punkte .....	45
1.5	Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben .....	50
2	Verknüpfung und Verkettung von Funktionen .....	54
2.1	Verknüpfung von Funktionen .....	56
2.1.1	Summe von Funktionen .....	56
2.1.2	Produkt von Funktionen .....	59
2.2	Verkettung von Funktionen .....	60
3	Differenzialrechnung .....	62
3.1	Ableitungen von Funktionen .....	64
3.1.1	Definition der Ableitung .....	64
3.1.2	Ableitungsregeln .....	67
3.1.3	Tangente .....	79
3.2	Untersuchung von Funktionsgraphen mithilfe der Differenzialrechnung .....	84
3.2.1	Monotonie .....	84
3.2.2	Extrempunkte .....	89
3.2.3	Wendepunkte .....	96
3.2.4	Kurvenuntersuchung .....	105
3.3	Aufstellen von Kurvengleichungen aus gegebenen Bedingungen .....	111
3.4	Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben .....	119
3.5	Optimieren .....	128
4	Integralrechnung .....	132
4.1	Einführung .....	134
4.2	Stammfunktion, grafisches Ableiten und Aufleiten .....	136
4.2.1	Stammfunktion .....	136
4.2.2	Grafisches Ableiten und grafisches Aufleiten .....	142
4.3	Das bestimmte Integral .....	146

## 8 Inhaltsverzeichnis

4.4	Flächeninhaltsberechnung mithilfe der Integralrechnung	155
4.4.1	Fläche zwischen Kurve und x-Achse	155
4.4.2	Fläche zwischen zwei Kurven	161
4.4.3	Besondere Aufgabenstellungen bei der Flächeninhaltsberechnung	170
4.5	Anwendungen der Integralrechnung	175
4.5.1	Flächen in anwendungsorientierten Aufgaben	175
4.5.2	Interpretation von Flächen	177

## II Vektorielle Geometrie

180

1	Lineare Gleichungssysteme	180
1.1	Einführung	182
1.2	Umformung und Lösung eines linearen Gleichungssystems	184
1.2.1	Das LGS ist eindeutig lösbar	184
1.2.2	Das LGS ist unlösbar	188
1.2.3	Das LGS ist mehrdeutig lösbar	189
1.2.4	Lineare Gleichungssysteme mit Parameter	192
2	Vertiefung der Vektoriellen Geometrie	198
2.1	Geraden	200
2.1.1	Geradengleichung in Parameterform	200
2.1.2	Lage einer Geraden im Koordinatensystem	205
2.1.3	Gegenseitige Lage von zwei Geraden	209
2.2	Ebenen	217
2.2.1	Ebenengleichung in Parameterform	217
2.2.2	Spurpunkte und Spurgeraden einer Ebene	222
2.3	Abstandsberechnungen	226
2.3.1	Abstand eines Punktes von einer Koordinatenebene	226
2.3.2	Abstand von zwei Punkten	227
2.3.3	Abstand eines Punktes von einer Geraden	231
2.4	Volumenberechnungen	233

## III Stochastik

238

1	Umgang mit Zufall und Wahrscheinlichkeit	238
1.1	Zufallsexperiment	240
1.1.1	Einstufiges Zufallsexperiment	240
1.1.2	Mehrstufiges Zufallsexperiment	242
1.2	Ereignisse	244
1.3	Wahrscheinlichkeit	249
1.3.1	Definition der Wahrscheinlichkeit	249
1.3.2	Wahrscheinlichkeit bei Gleichverteilung (Laplace-Experiment)	253
1.3.3	Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten	256
1.3.4	Additionssatz	263
1.3.5	Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit	266

1.4	Kombinatorik .....	276
1.4.1	Produktregel .....	276
1.4.2	Stichproben .....	277
1.5	Zufallsvariable .....	285
1.5.1	Einführung.....	285
1.5.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung .....	288
1.5.3	Erwartungswert einer Zufallsvariablen .....	291
1.5.4	Varianz und Standardabweichung einer Zufallsvariablen .....	296
2	Binomialverteilung .....	304
2.1	Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Ketten .....	306
2.2	Die Bernoulli-Formel .....	308
2.3	Erwartungswert und Standardabweichung einer Binomialverteilung .....	320
<b>Anhang</b>		<b>327</b>
1	Lösungen der Tests.....	327
2	Einführung in Geogebra, Geogebra- und Videolisten .....	343
	Mathematische Zeichen .....	349
	Stichwortverzeichnis .....	350
	Abbildungsverzeichnis.....	352