Patyna

Mathematik

für das Berufliche Gymnasium in Niedersachsen
Kerncurriculum und Bildungsstandards
Qualifikationsphase – Schwerpunkt Wirtschaft
Analysis
Lehrerbegleitheft

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasserin:
Marion Patyna

Umschlag: Hintergrund: ECE, Ernst-August-Galerie, Hannover,
Kreis rechts oben: Candy Box – Fotolia.com, Kreis Mitte: Colourbox.de,
Kreis links: Syda Productions – Colourbox.de, Grafik: Colourbox.de

* * * * *

2. Auflage 2021

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de
Merkur-Nr. 3686-02
ISBN 978-3-8120-**3686-3**

4 Methodenvielfalt

Gibt es einen Unterschied zwischen Theorie und Praxis? Es gibt ihn. In der Tat.[1]
(Werner Mitsch, Aphoristiker, 1936 – 2009)

Methodenvielfalt soll im Unterricht nicht zu einem Methodenfeuerwerk ausarten. Methoden sollen gezielt eingesetzt werden, um die Lernsituationen zu bearbeiten, um im Anschluss sinnvolle Übungsphasen zu gestalten und um die Lernenden bei der Verankerung neuer Erkenntnisse zu unterstützen und sie zum Selbertun anzuregen. Die nachfolgend aufgeführten Methodenbeispiele können genau dabei unterstützen.

4.1 Lernspirale

Das Lernspiralkonzept[2] nach H. Klippert eignet sich dafür, Lernenden ein systematisches Vorgehen beim Bearbeiten von Lernsituationen beizubringen, aber auch zur Aneignung neuer mathematischer Inhalte, die zur Bearbeitung der Lernsituation benötigt werden. Unterricht mithilfe von Lernspiralen „steigert die Motivation“, fördert das „berufspropädeutische Lernen“, das „sozial-kommunikative Lernen“ sowie die „Mitverantwortung“, sorgt für eine „effektive Stoffvermittlung“, ist eine „praktische Methodenschulung“ und fördert die „Kreativität“ der Lernenden. (Klippert, 2007, S. 81 – 85). Für die Lehrkraft bietet der Unterricht mithilfe von Lernspiralen Entlastungschancen (Klippert, 2007, S. 85 f.).

Um diese Ziele zu erreichen, ist es sinnvoll, die Tischanordnung im Klassenraum mithilfe von L-Tischen (Winkelsitzordnung[3]) zu organisieren, die jederzeit zu Gruppentischen zusammengestellt werden können (Abb. 10). Die Lernenden ziehen Spielkarten und wissen dann, an welchen Platz sie sich setzen sollen. Ein L-Tisch für die Könige, ein L-Tisch für die Damen, die Buben, 10 usw.

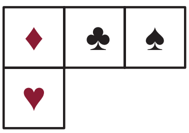


Abbildung 3: L-Tisch. Eigene Darstellung.

Auf diese Weise entstehen die Tandems für die Partnerarbeit und die Gruppen für die Vierer-Gruppenarbeit. Da jedem Lernenden eine Karte zugeordnet wird, kann auf diese Weise auch per erneutem Los festgelegt werden, wer die Gruppenergebnisse präsentiert.

1 Zitiert nach Gudjons, 2014, S. 156.
2 Zum Lernspiral-Konzept vgl. Klippert, H.: Lernförderung im Fachunterricht. Donauwörth 2013; vgl. außerdem die entsprechenden Mathematik-Hefte im Auer Verlag
3 Klippert, 2013, S. 44 f.

Mithilfe einer Lernspirale sollen sich die Lernenden in ein Thema, eine Aufgabe oder einen neuen mathematischen Sachverhalt hineinbohren – wie bei einem **Spiralbohrer**. Die Erarbeitung erfolgt in vorgegeben Schritten mit unterschiedlichen Methoden und Sozialformen, i. d. R. auch mit vorgegeben Zeiten für die einzelnen Schritte. (Klippert, 2007, S. 63 – 67):

Schritt		Beschreibung	Sozialform
	**1. Schritt** Warm up	▪ Assoziationsbilder, Brainstorming, Text lesen und markieren … ▪ oder: Mathematisieren von berufsbezogenen Aufgaben mit der ICH-DU-WIR Methode	Einzelarbeit
	2. Schritt Informationsphase	▪ Probleme thematisieren, Assoziationen strukturieren, Ideen vergleichen, Merksätze abschreiben, Spickzettel schreiben, …	Einzel- oder Partnerarbeit
	3. Schritt ggf. Doppelkreis	▪ über die Assoziationen oder neuen Kenntnisse sprechen ▪ meist in zwei Runden: der Innen-kreis erzählt dem Außenkreis – dann neue Partnerbildung: der Außenkreis erzählt dem Innenkreis	Partnerarbeit
	4. Schritt Zusammenführung der Ideen, der Kennt-nisse, …	▪ vergleichen, verbessern ▪ strukturieren ▪ Ablaufpläne erstellen ▪ Lösen von Aufgaben ▪ kontrollieren ▪ Handlungsergebnisse erstellen	Zufallsgruppe
	5. Schritt Vorbereitung der Präsentation	▪ Gliederung erstellen ▪ Definitionen formulieren ▪ Erklärungen formulieren ▪ Visualisierung erstellen	Zufallsgruppe
	6. Schritt Präsentation	▪ mit Plakaten, Folien, Tafelbildern, … ▪ auf dem Marktplatz, vor der Klasse, …	allein oder Tandem
	7. Schritt Reflexion	▪ Methodenreflexion ▪ Reflexion der mathematischen neuen Inhalte ▪ Reflexion der Lerneffekte	Plenum

Tabelle 2: Lernspiral-Konzept. Eigene Darstellung in Anlehnung an Klippert, 2007, S. 63 – 67 und Klippert, 2013, S. 20 – 28.

Alle sieben Schritte zusammen bilden auch den Kreislauf der **vollständigen Handlung** ab und fördern so die Handlungskompetenzen der Lernenden.

4.2 Kaskade

Mithilfe einer **Kaskade** kann eine Klasse/ein Kurs ein gemeinsames Handlungsergebnis für eine Lernsituation erstellen. Dieses Vorgehen eignet sich aber auch für das Sammeln und Clustern von Begriffen z. B. im Rahmen eines Brainstormings.

Der Aufbau einer Kaskade erfolgt über die jeweilige Verdoppelung der Gruppenteilnehmer: 1 – 2 – 4 – 8 – 16 – 32 oder 1 – 3 – 6 – 12 – 24.

Auf diese Weise werden Zwischenergebnisse immer wieder verglichen, verbessert und ergänzt. Es entsteht eine fachliche Diskussion unter Verwendung der Fachsprache; dabei wird die Kommunikationskompetenz geschult.

Ablaufplanung zur Bearbeitung einer Lernsituation:

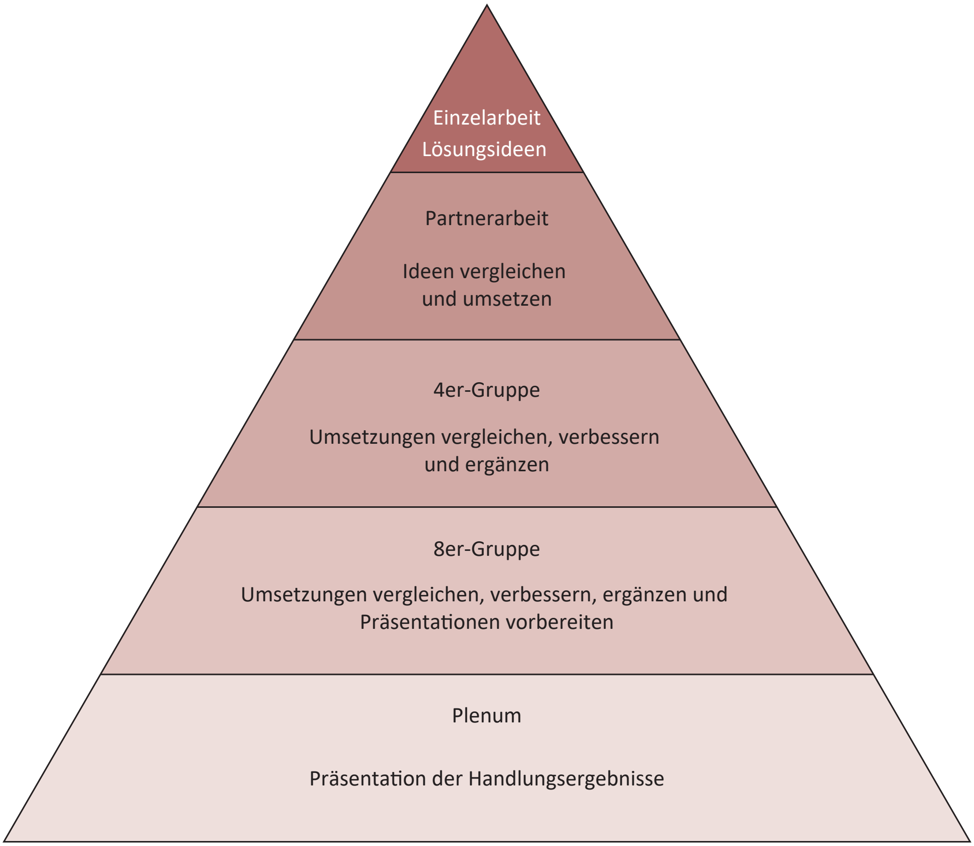


Abbildung 4: Ablauf einer Kaskade zur Bearbeitung einer Lernsituation. Eigene Darstellung.

Mithilfe einer Kaskade wird die Anzahl der Handlungsergebnisse verringert; statt z. B. sechs Ergebnisse in einer Klasse mit 24 Lernenden zu erhalten, entstehen nur drei Handlungsergebnisse, die im Plenumsgespräch miteinander verglichen werden müssen. Der Aufbau der Kaskade sorgt zum einen dafür, dass alle Lernenden am Handlungsergebnis beteiligt sind und sich alle am Plenumsgespräch beteiligen können. Zum anderen wird durch die Verringerung der Handlungsergebnisse ein Fokussierung erreicht.

Ablaufplanung zum Sammeln und Clustern von Begriffen:

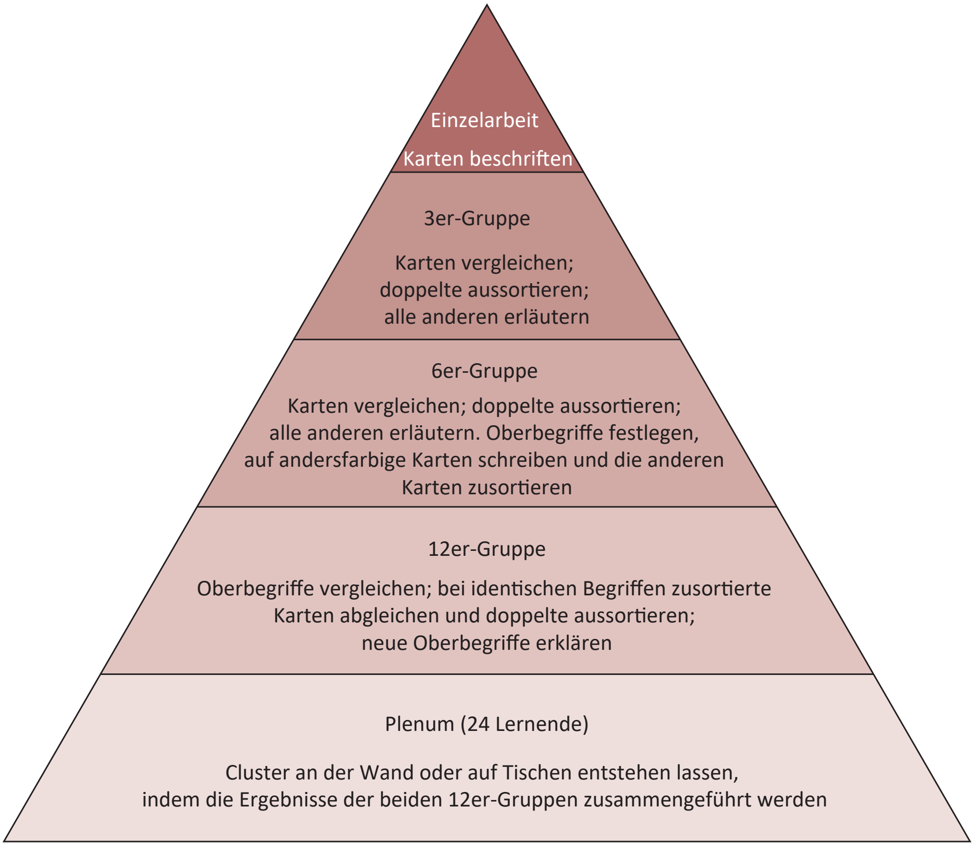


Abbildung 5: Ablauf einer Kaskade zum Sammeln und Clustern von Begriffen. Eigene Darstellung.

	Thema	Inhalt	Ziel Lernende	Ziel Lehrkräfte	Fazit
3	Minimalkosten-kombination Buch S. 53–55	Isoquante, Isokostengerade Minimalkosten-kombination Grenzrate der Substitution Differential-rechnung	Aufstellen der Funktionsgleichungen für die Isokostengerade und für die Isoquante Passante, Sekante, Tangente im Sachzusammenhang beschreiben Definitionen von Isokostengerade und Isoquante kennen Pol und Asymptote ermitteln und im Sachzusammenhang interpretieren Definitions- und Wertebereiche festlegen Minimalkostenkombination berechnen → Kettenregel Grenzrate der Substitution ermitteln und interpretieren	Strukturiertes Arbeiten der Lernenden erkennen → Gruppenarbeit (Gruppen-zusammensetzung planen) Binnendifferenzierung durch geeignetes Coaching durchführen Unterschiedliche Ansätze und Lösungswege bei den Lernenden erkennen und in der Reflexionsphase gegenüberstellen Übungen und Vertiefungen auswählen	Gebrochenrationale Funktionen klassifizieren Funktionsuntersuchung von gebrochen rationalen Funktionen durchführen: ▪ Ableitungsregel: Kettenregel ▪ Definitions- und Wertebereich ▪ Definitionslücken ▪ Grenzwertbetrachtungen Parametervariationen durchführen Scharen analysieren LGS zum Bestimmen von Funktions-termen lösen

Tabelle 8: Ziele Lernsituation 3. Eigene Darstellung.

6.2.2 Lösungen zu Kapitel 4.5 Schulbuch

Übungsaufgaben für Klausuren und Prüfungen

1 Isoquante

$$I_{\text{Output}}(x) = \frac{a}{x-b} + c$$

$$I_{\text{Output}}(x) = \frac{a}{x-5} + 5$$

$P(7|8) \Rightarrow I_{\text{Output}}(7) = \frac{a}{7-5} + 5 = 8$

$\Rightarrow a = 6$

$\Rightarrow I_{\text{Output}}(x) = \frac{6}{x-5} + 5$

Isokostengerade

$$I_K(x) = -\frac{p_x}{p_y}x + \frac{K}{p_y}$$

$P_1(7|8)$ und $P_2(0|18{,}5)$

$\Rightarrow I_K(7) = -\frac{p_x}{p_y} \cdot 7 + 18{,}5 = 8$

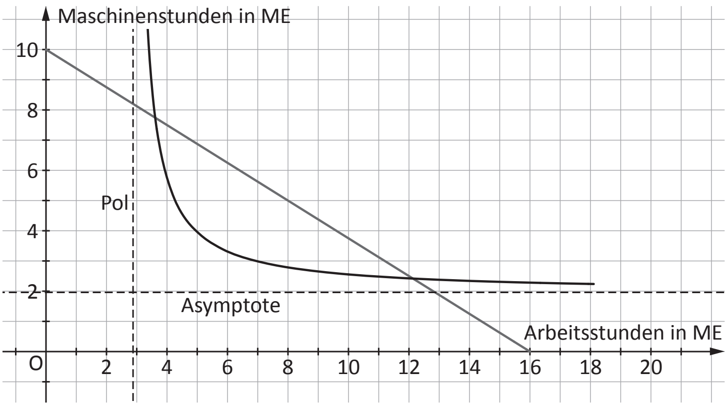
$\Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = 1{,}5$

$\Rightarrow I_K(x) = -1{,}5x + 18{,}5$

2 Lücken ausfüllen

Die **Isokostenfunktion** gibt alle Kombinationsmöglichkeiten zweier Produktionsfaktoren an, die gleich hohe Kosten verursachen.
Eine **Isoquantenfunktion** kombiniert zwei Produktionsfaktoren so, dass derselbe Output erzielt wird.

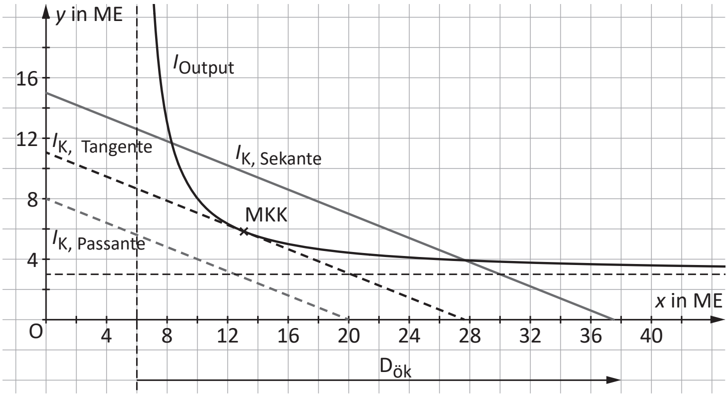
Koordinatensystem ergänzen



Bedeutung der Schnittpunkte der beiden Graphen erklären

Mit dem gegebenen Kostenbudget kann die Produktion mithilfe zweier verschiedener Kombinationen der Produktionsfaktoren realisiert werden.

3



4

LGS

$I_K(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{32}{5}$

Outputmenge 1

$I_{Output\ 1}(x) = \frac{a}{x-b} + c$

LGS aufstellen und Funktionsterm bestimmen.

LGS

$$\left| \begin{array}{r} I_{Output\ 1}(5) = \frac{a}{5-b} + \quad c = 7 \\ I_{Output\ 1}(6{,}5) = \frac{a}{6{,}5-b} + c = 4 \\ I_{Output\ 1}(9) = \frac{a}{9-b} + \quad c = 3 \end{array} \right|$$

$\Rightarrow \ I_{Output\ 1}(x) = \frac{5}{x-4} + 2$

$I_K(x) = I_{Output}(x)$

$-\frac{1}{5}x + \frac{32}{5} = \frac{5}{x-4} + 2$

Schnittpunkte Isokostengerade und Isoquante ermitteln

$\Rightarrow \ x_1 \approx 5{,}52 \ \vee \ x_2 \approx 20{,}48$

$S_1(5{,}52|5{,}3)$ und $S_2(20{,}48|2{,}3)$

Outputmenge 2

$I_{Output\ 2}(x) = \frac{9}{x-4} + 2$

$I_K(x) = I_{Output}(x)$

$-\frac{1}{5}x + \frac{32}{5} = \frac{9}{x-4} + 2$

Schnittpunkte Isokostengerade und Isoquante ermitteln

$\Rightarrow \ x_1 = 7 \ \vee \ x_2 = 19$

$S_1(7|5)$ und $S_2(19|2{,}6)$

Beide Outputmengen können mit dem Kostenbudget realisiert werden. Die Geschäftsführung sollte sich für die höhere Outputmenge entscheiden. Da die Isoquante für Output 2 weiter rechts und weiter oben im Koordinatensystem liegt, ist der Output höher. Für Output 2 kann dann das Kostenbudget mithilfe der MKK optimiert werden.

$I'_{Output\ 2}(x) = -\frac{9}{(x-4)^2}$

Funktionswert durch Einsetzen in die Isoquante ermitteln

$I'_K(x) = -\frac{1}{5}$

$-\frac{9}{(x-4)^2} = -\frac{1}{5}$

$\Rightarrow\ x \approx 10{,}71$

MKK (10,71|3,34)

Kostenbudget

$K = p_x \cdot x + p_y \cdot y = 10 \cdot 10{,}71 + 50 \cdot 3{,}34 = 274{,}10$

Um die Outputmenge 2 kostenminimal zu produzieren, müssen 10,71 ME Arbeit und 3,34 ME Kapital eingesetzt werden.

Die Produktionskosten liegen bei 274,10 GE.

5 Umformen des Funktionsterms

$I_{\text{Output}}(x) = \frac{3x + 34}{x - 2} = \frac{40}{x - 2} + 3$

Polynomdivision

Definitions- und Wertebereich

Pol bei $x = 2$

$D_{\text{ök}} = (2; \infty)\ \Rightarrow$ Mehr als zwei ME Arbeit müssen zur Weißkohlernte eingesetzt werden.

$W_{\text{ök}} = (3; \infty)\ \Rightarrow$ Mehr als drei ME Kapital (Erntemaschinen) müssen zur Weißkohlernte eingesetzt werden.

Asymptote $g(x) = 3$

Kostenbudget

$K = p_x \cdot x + p_y \cdot y = 1x + 10y$

MKK bestimmen

$I'_{\text{Output}}(x) = -\frac{40}{(x-2)^2}$

$I'_{\text{K}}(x) = -\frac{p_x}{p_y} = -\frac{1}{10}$

$-\frac{40}{(x-2)^2} = -\frac{1}{10}\ \Rightarrow\ x = 22$

$I_{\text{Output}}(22) = \frac{40}{22 - 2} + 3 = 5$

MKK (22|5)

Die geplante Outputmenge kann durch die Kombination von 22 ME Arbeit und 5 ME Kapital (Maschineneinsatz) erzielt werden. Die Kombination der Produktionsfaktoren verursacht die geringsten Kosten.

Kostenbudget bestimmen

$K = 1 \cdot 22 + 10 \cdot 5 = 72$

Das Kostenbudget für die MKK beträgt 72 GE.

Grenzrate der Substitution bei der MKK

$-\frac{40}{(22-2)^2} = -\frac{1}{10}$

1 ME Kapital (Maschinen) kann durch 10 ME Arbeit ersetzt werden.

Grafik