Ott
Schomburg

Abitur 2022

Aufgabensammlung zur zentralen schriftlichen Abiturprüfung
Berlin/Brandenburg

Mathematik

grundlegendes Anforderungsniveau – Grundkurs

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Wolfgang Schomburg
Studium der Mathematik an der Technischen Universität zu Berlin

* * * * *

4. Auflage 2021

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0635-04-DS

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung für Berlin und Brandenburg enthält auf die **neue Prüfungsordnung** für die gymnasiale Oberstufe abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf die schriftliche Abiturprüfung 2022 im Fach Mathematik.

Der aktuellen Entwicklung geschuldet ist eine veränderte Struktur der schriftlichen Prüfungsklausuren für das Fach Mathematik im Abitur 2022:

- Der Umfang der Prüfungsklausuren bleibt unverändert. Im Grundkursfach müssen Aufgaben im Umfang von 100 Bewertungseinheiten bearbeitet werden.
- Der Anteil des hilfsmittelfreien Aufgabenteils bleibt unverändert bei 25 % der Bewertungseinheiten (BE).
- Die Bearbeitungszeiten bleiben unverändert bei 285 Minuten (Gk), jeweils einschließlich Lese- und Auswahlzeit.

Verändert werden der Auswahlmodus und der Umfang der einzelnen Aufgaben zu den Sachgebieten. Der Auswahlmodus enthält nun eine vorgeschaltete **„Auswahl durch die unterrichtende Lehrkraft“.** Dadurch werden das thematische Spektrum der zu bearbeitenden Aufgaben und die Auswahlmöglichkeiten für die Schülerinnen und Schüler beschränkt.

Die zentrale Abiturprüfung ab 2019 besteht aus zwei Teilen,
einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil (ohne Formelsammlung, Taschenrechner, CAS-Gerät) und einem Prüfungsteil mit Hilfsmittel (Formelsammlung und Taschenrechner/CAS).
Die Aufgaben für den **Grundkurs** bzw. das grundlegende Anforderungsniveau sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten: Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie.
Der erste Teil der Aufgabensammlung bietet eine Vielzahl von Übungsaufgaben zum neuen hilfsmittelfreien Teil der Abiturprüfung auf grundlegendem Niveau.
Für den zweiten Teil wurden die Originalprüfungsaufgaben der Jahre 2015 bis 2018 mit einer Aufgabenstellung 1 ergänzt, die ohne Hilfsmittel bearbeitet werden muss.
Die zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019 enthält eine Aufgabenstellung 1, einen hilfsmittelfreien Teil. Die Abituraufgaben ab 2019 werden in der Aufgabensammlung im Original behandelt und ausführlich gelöst.
Diese Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.
Die Aufgaben sind als Übungsaufgaben zu verstehen, im Umfang und in den Fragestellungen. Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.
Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.
An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.
Autor und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Veränderte Struktur der schriftlichen Prüfungsklausuren im Abitur 2022

Grundlegendes Anforderungsniveau - Grundkurs

Die insgesamt zu erreichenden 100 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:

Aufgabenstellung 1 (Hilfsmittelfreier Aufgabenteil): 25 BE (75 Minuten)

Das Aufgabenset für SuS enthält 3 Aufgaben zur Analysis (je 5 BE) und zwei Aufgaben (je 5 BE) zu einem Sachgebiet (Stochastik oder Analytische Geometrie)

Aufgabenstellung 2 (komplexe Aufgaben zu den Sachgebieten: 75 BE (210 Minuten)

Das Aufgabenset für SuS enthält **2** Aufgaben zur Analysis (je 45 BE) und **eine** Aufgabe (30 BE) zu einem Sachgebiet (Stochastik oder Analytische Geometrie)

<table>
<tr><th></th><th>Vorbereitete Prüfungsaufgaben</th><th>Auswahl durch die Lehrkraft</th><th>Aufgabenset für die SuS</th><th>Wahl durch die SuS</th><th>BE/Zeit</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Aufgabenstellung 1 (Hilfsmittelfreier Aufgabenteil)</td><td>3 Aufgaben zur Analysis (je 5 BE)</td><td>keine</td><td>3 Aufgaben zur Analysis</td><td rowspan="3">keine</td><td rowspan="3">25 BE
(75 Minuten)</td></tr>
<tr><td>2 Aufgaben zur Analytische Geometrie (je 5 BE)</td><td rowspan="2">2 Aufgaben zu einem Sachgebiet</td><td rowspan="2">2 Aufgaben zu einem anderen Sachgebiet</td></tr>
<tr><td>2 Aufgaben zur Stochastik (je 5 BE)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Aufgabenstellung 2 (komplexe Aufgaben zu den Sachgebieten)</td><td>2 Aufgaben zur Analysis 45 BE</td><td>keine</td><td>2 Aufgaben zur Analysis</td><td>1 Aufgabe muss ausgewählt werden</td><td rowspan="3">45 BE
+
30 BE
(210 Minuten einschl. Auswahlzeit)</td></tr>
<tr><td>1 Aufgabe zur Analytische Geometrie 30 BE</td><td rowspan="2">1 Aufgabe zu einem Sachgebiet</td><td rowspan="2">1 Aufgabe zu einem anderen Sachgebiet</td><td rowspan="2">keine</td></tr>
<tr><td>1 Aufgabe zur Stochastik 30 BE</td></tr>
</table>

Die Gesamtbearbeitungszeit beträgt 285 Minuten. Sie beinhaltet eine individuelle Lese- und Auswahlzeit für die Prüflinge, die 30 Minuten nicht überschreiten sollte.

Die Abiturprüfung beginnt mit der Bearbeitung der Aufgabenstellung 1 zum hilfsmittelfreien Teil in einem Umfang von maximal 75 Minuten. Die Lösungen der Aufgaben aus diesem Teil der Prüfung werden nach 75 Minuten eingesammelt.

Prüflinge, die für die Aufgabe 1 weniger Zeit benötigen, können bereits mit der Bearbeitung der weiteren Wahlaufgaben beginnen, vorerst ohne die Nutzung von Hilfsmitteln.

Nach der **vollständigen Abgabe der Lösungen der Aufgabe 1** durch alle Prüflinge beginnt mit der Nutzung von Formelsammlung und Rechner bzw. CAS-Rechengerät die weitere Arbeit an den Aufgaben.

Hinweis für das Abitur 2022: *Wenn eine Schule sich z.B. für Vektorgeometrie und gegen Stochastik entschieden hat, dann fliegt die Stochastik aus dem hilfsmittelfreien Teil und aus den weiteren Aufgabenstellungen heraus! In der Aufgabensammlung werden die beiden Gebiete jedoch gleichwertig behandelt.*

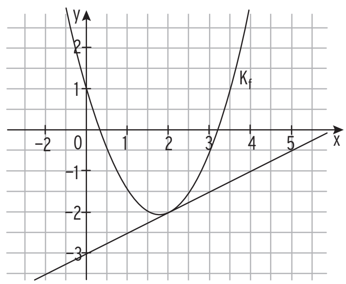
I Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

Übungsaufgaben zur Aufgabenstellung 1 Analysis

Lösungen Seite 22/23

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.
Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm.



Aufgabe 2

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$ besitzt einen Wendepunkt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

Aufgabe 3

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt $H(1 \mid 1)$ ist der Hochpunkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 4

K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{x-3} - 2$.
Die Tangente an K an der Stelle $x = 3$ schneidet die Asymptote von f in S.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)\,dx$.
Interpretieren Sie den Integralwert mithilfe geeigneter Flächenstücke.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Aufgabe 7 Lösungen Seite 24/25

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4e^{2x} - 2$.

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(0{,}5) = -1$.

Aufgabe 8

Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(1) $f(0) = 1$ (2) $f'(0) = 0$

(3) $f''(1) = 0$ und $f'''(1) \neq 0$ (4) $f'(1) = -1$

Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat. Skizzieren Sie eine möglichen Verlauf des Graphen.

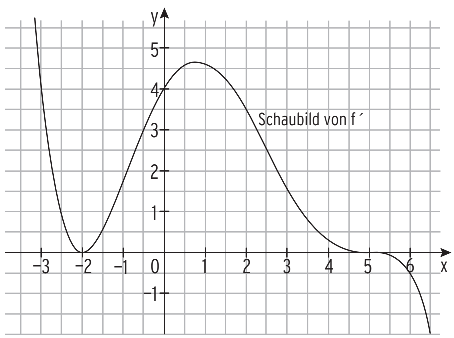
Aufgabe 9

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$.

Aufgabe 10

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f. Geben Sie für jeden der folgenden Sätze an, ob er richtig, falsch oder nicht entscheidbar ist. Begründen Sie jeweils ihre Antwort.

1. Das Schaubild von f hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.
2. Das Schaubild von f hat für $-3 \leq x \leq 6$ genau zwei Wendepunkte.
3. Das Schaubild von f verläuft im Schnittpunkt mit der y-Achse steiler als die erste Winkelhalbierende
4. $f(0) > f(5)$



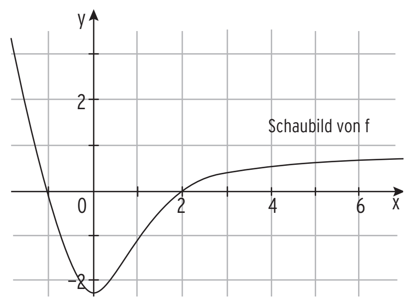
Aufgabe 11

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f. F ist eine Stammfunktion von f.

a) Machen Sie Aussagen über F im Bereich $-2 < x < 7$ hinsichtlich Extremstellen, Wendestellen, Nullstellen. Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Begründen Sie, dass $F(6) - F(2) > 1$ gilt.

c) Bestimmen Sie näherungsweise: $\int_{-1}^{0} f(x)dx$



Lösungen – Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

Lösungen – Analysis Übungsaufgaben

Aufgabe 1 *Lösung der Aufgaben Seite 8*

Man liest ab: Parabel von f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 2ax + b$

Die Gerade hat die Steigung $m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Bedingungen und LGS: $f(0) = 1$ $c = 1$

$f(2) = -2$ $4a + 2b + c = -2$

$f'(2) = \frac{1}{2}$ $4a + b = \frac{1}{2}$

Einsetzen von c = 1: $4a + 2b + 1 = -2$ $4a + 2b = -3$

$4a + b = \frac{1}{2}$ $\quad | \cdot (-1)$

Addition ergibt: $b = -3{,}5$

Einsetzen in z. B. $4a + b = \frac{1}{2}$ ergibt $a = 1$

Möglicher Funktionsterm $f(x) = x^2 - 3{,}5x + 1$

Aufgabe 2

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$ besitzt einen Wendepunkt.

Ableitungen: $f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$; $f''(x) = -6x + 6$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $-6x + 6 = 0$ für $x = 1$

Mit $f'''(x) = -6 \neq 0$ ist $x = 1$ Wendestelle.

Ansatz für die Tangente: $y = mx + b$

Mit $f(1) = -3$ und $f'(1) = 2 = m$

erhält man $-3 = 1 \cdot 2 + b$ und damit $b = -5$

Tangente in $W(1 \mid -3)$: $y = 2x - 5$

Aufgabe 3

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen: $f(0) = 0$ $d = 0$

$f'(0) = 0$ $c = 0$ Ursprung ist Berührpunkt

$H(1 \mid 1)$ der Hochpunkt: $f(1) = 1$ $a + b + c + d = 1$

$f'(1) = 0$ $3a + 2b + c = 0$

c und d eingesetzt: $a + b = 1 \quad |\cdot 3$

$3a + 2b = 0 \quad |\cdot (-1)$

Additionsverfahren: $b = 3$

Einsetzen in $a + b = 1$ ergibt $a = -2$

Funktionsterm: $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Aufgabe 4 *Lösung der Aufgaben Seite 8*

$f(x) = e^{x-3} - 2$

Ableitung: $f'(x) = e^{x-3}$

Ansatz für die Tangente: $y = mx + c$

Mit $f(3) = -1$ ($e^0 = 1$) und $f'(3) = 1 = m$

erhält man $-1 = 1 \cdot 3 + c \quad \Rightarrow b = -4$

Tangente in P(3 | − 1): $y = x - 4$

Schnitt von Tangente und der

Asymptote: $y = -2$ $\quad -2 = x - 4 \quad \Rightarrow x = 2$

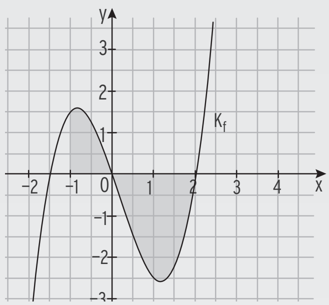
Koordinaten des Schnittpunktes: S(2 |− 2)

Aufgabe 5

$$\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = -2{,}25$$

Hinweis: f hat eine einfache Nullstelle ($x_1 = 0$) zwischen den Integralgrenzen − 1 und 2, also handelt es sich um eine Fläche oberhalb und eine unterhalb der x-Achse (Flächenbilanz).

Das Flächenstück zwischen dem Graphen von f und der x-Achse oberhalb der x-Achse ist um 2,25 kleiner als das Flächenstück zwischen dem Graphen von f und der x-Achse unterhalb der x-Achse.



Aufgabe 6

Schnittstellen von f und g durch

Gleichsetzen: $f(x) = g(x)$ $\quad -x^2 + 3 = 2x$

Nullform: $\quad x^2 + 2x - 3 = 0$

Lösung mit $x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ $\quad x_{1|2} = -1 \pm \sqrt{1 + 3}$

Schnittstellen = Integrationsgrenzen: $\quad x_1 = -3;\ x_2 = 1$

Integration von − 3 bis 1 über f(x) − g(x): $\quad \int_{-3}^{1} (f(x) - g(x))dx$

$$= \int_{-3}^{1} (-x^2 + 3 - 2x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x - x^2\right]_{-3}^{1}$$

obere Grenze − untere Grenze $\quad = -\frac{1}{3} + 3 - 1 - \left(-\frac{1}{3}(-3)^3 + 3(-3) - (-3)^2\right)$

$$= \frac{32}{3}$$

Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt $\frac{32}{3}$.

Aufgabe 7 *Lösung der Aufgaben Seite 9*

$f(x) = 4e^{2x} - 2$

Stammfunktion: $F(x) = 2e^{2x} - 2x + c;\ c \in \mathbb{R}$

Bedingung für c: $F(0,5) = -1$: $F(0,5) = 2e^1 - 1 + c = -1 \Leftrightarrow c = -2e$

Gesuchte Stammfunktion: $F(x) = 2e^{2x} - 2x - 2e$

Aufgabe 8

Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

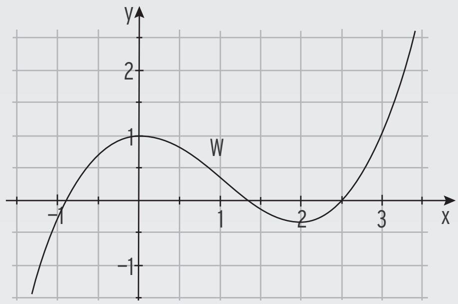
(1) $f(0) = 1$ Der Graph von f verläuft durch (0 | 1)

(2) $f'(0) = 0$ Der Graph von f hat in x = 0 eine waagrechte Tangente

(3) $f''(1) = 0$ und $f'''(1) \neq 0$ Der Graph von f hat in x = 1 eine Wendestelle.

(4) $f'(1) = -1$ Die Steigung im WP ist negativ, (0| 1) ist ein Hochpunkt.

Möglicher Verlauf des Graphen:



Aufgabe 9

Ableitung von f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$ mit der Produktregel

Mit $u(x) = 2x^2 + 5 \Rightarrow u'(x) = 4x$

und $v(x) = e^{-2x} \Rightarrow v'(x) = -2e^{-2x}$

folgt durch Einsetzen in $f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$:

$f'(x) = (2x^2 + 5) \cdot (-2e^{-2x}) + e^{-2x} \cdot 4x$

Zusammenfassen durch Ausklammern: $f'(x) = e^{-2x}\left((2x^2 + 5) \cdot (-2) + 4x\right)$

Erste Ableitung von f: $f'(x) = e^{-2x}\left(-4x^2 - 10 + 4x\right)$

$f'(x) = e^{-2x}\left(-4x^2 + 4x - 10\right)$

Aufgabe 10

1. $f'(-2) = 0$
   falsch; $f'(x)$ wechselt bei $x = -2$ das Vorzeichen nicht.
2. wahr: Das Schaubild von f' hat für $-3 \leq x \leq 6$ genau zwei Extrempunkte.
3. erste Winkelhalbierende mit Steigung $m = 1$
   wahr: $f'(0) = 4 > 1$
4. falsch: $f'(x) > 0$ für $-2 < x < 5$, also ist f wachsend

Übungsaufgaben zur Aufgabenstellung 1
Analytische Geometrie

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 69**

1 Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

Stellen Sie die Gerade g in einem räumlichen Koordinatensystem dar.

Beschreiben Sie die Lage von g im Raum.

2 Untersuchen Sie die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems

$x_1 + 4x_2 + x_3 = 2$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$

Aufgabe 2

1 Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie, ob es einen Punkt auf g gibt, dessen drei Koordinaten identisch sind.

b) Die Gerade h verläuft orthogonal zu g und durch Q(8 | 5 | 10).

Bestimmen Sie eine Gleichung von h.

2 Gegeben ist die Ebene E: $4x + 4y + 7z = 28$.

Es gibt zwei zu E parallele Ebenen F und G, die vom Ursprung den Abstand 2 haben.

Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung von F und G.

Aufgabe 3 **Lösungen Seite 70**

1 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1 | 2 | 5), B(2 | 7 | 8) und C(− 3 | 2 | 4) gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind.

b) Für jede reelle Zahl a ist ein Punkt D(a | $2+ a\sqrt{2}$ | $5 + \sqrt{2}$) gegeben. Bestimmen Sie alle Werte von a, für die die Strecke von A nach D die Länge 2 hat.

2 Gegeben sind die Ebene E: $2x + y - z - 4 = 0$ sowie der Punkt P(− 3 | 0 | 2).

a) Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt.

b) Spiegelt man den Punkt P an der Ebene E, so erhält man den Punkt P*.

Ermitteln Sie die Koordinaten von P*.

Aufgabe 4 **Lösungen Seite 71**

1 Gegeben ist die Ebene E durch $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u, v \in \mathbb{R}$

Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Geraden an,

(A) die in der Ebene E liegt,

(B) die keine gemeinsamen Punkte mit E hat.

2 Zeichnen Sie einen Würfel mit der Kantenlänge 3 LE in ein räumliches Koordinatensystem. Markieren Sie eine Kante und geben Sie eine Gleichung der Geraden an, auf der diese Kante liegt.

Aufgabe 5

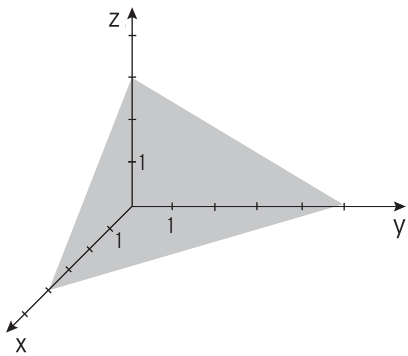
1 Gegeben ist die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Geraden an, die

a) parallel zu g durch P (0| 1| −2) verläuft,

b) g rechtwinklig schneidet.

2 Ermitteln Sie eine Gleichung der dargestellten Ebene.
Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung des Abstands vom Ursprung zur Ebene.



Aufgabe 6 **Lösungen Seite 72**

Gegeben sind die Punkte A(3| 1| 1) und B(−2| 2| 4) sowie die Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

1 Bestätigen Sie, dass g durch A und B geht.

2 Die Geraden g und h haben genau einen Schnittpunkt. Bestimmen Sie diesen Schnittpunkt.

3 Geben Sie einen weiteren Punkt auf g an, der von A den gleichen Abstand hat wie B.

Aufgabe 7 **Lösungen Seite 73**

Gegeben ist die Ebene E_1: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$.

1 Zeigen Sie, dass alle Punkte der Ebene E_1 die folgende Gleichung erfüllen:

$7x + y - 5z = 0$

2 Geben Sie für die Ebene E_2: $\vec{x} = p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + q \cdot \vec{v}$; $p, q \in \mathbb{R}$.

einen Vektor $\vec{v}$ so an, dass die Ebene E_2 nicht identisch mit der Ebene E_1 ist.

Begründen Sie, dass der von Ihnen angegebene Vektor $\vec{v}$ die Bedingung erfüllt.

Aufgabe 8

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1 Zeigen Sie, dass $\vec{a}$ orthogonal zu $\vec{b}$ und nicht orthogonal zu $\vec{c}$ ist.

2 Gegeben ist ein weiterer Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ d \end{pmatrix}$ mit $d \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass bei geeigneter Wahl von d der Vektor $\vec{d}$ orthogonal zu $\vec{a}$

und auch orthogonal zu $\vec{b}$ sein kann, aber nicht zu beiden Vektoren gleichzeitig.

Aufgabe 9 **Lösungen Seite 74**

1 Gegeben ist das Viereck ABCD mit den Eckpunkten A(0| 0|0), B(− 3| 1|4),

C(2| − 4|4) und D(5 | − 5| 0).

Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

2 In einem kartesischen Koordinatensystem ist die senkrechte Pyramide ABCDS gegeben. Die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche ist 5, die Höhe der Pyramide ist 7.

a) Geben Sie mögliche Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an.

b) Mindestens einer der Eckpunkte soll so verschoben werden, dass sich das Volumen der Pyramide vervierfacht. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten.

Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten jeweils die Koordinaten der verschobenen Eckpunkte an und begründen Sie Ihre Angabe.

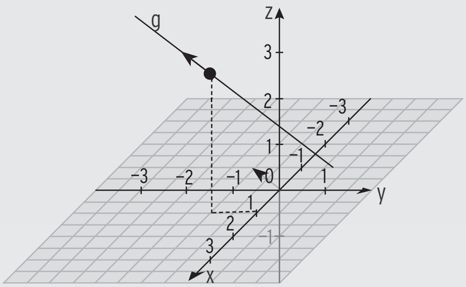
Lösungen – Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

Lösungen –Analytische Geometrie Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Lösung der Aufgaben Seite 57

1 g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$



Lage von g im Raum:
g verläuft parallel zur x-y-Ebene
durch P(1| − 1 | 3)
(z = 0 im Richtungsvektor)

Hinweis: z = 0 im Richtungs- und im Aufpunktvektor: g liegt in der x-y-Ebene

2 LGS in Matrixform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar; $x_2 = 0$; $x_3 = r$ frei wählbar

Einsetzen in $x_1 + 4x_2 + x_3 = 2$ ergibt: $x_1 + r = 2 \Rightarrow x_1 = 2 - r$

Lösung: $(2 - r, 0, r)$; $r \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2

1 g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

a) Punkt (c | c | c) liegt auf g: $3 + r = c$
$4r = c$
$1 + 3r = c$

Aus der Gleichung 4r = c: $r = \frac{c}{4}$

Eingesetzt in die Gleichung 3 + r = c: $3 + \frac{c}{4} = c \Rightarrow c = 4$ und damit $r = 1$

Eingesetzt in die Gleichung 1 + 3r = c: $1 + 3 = 4$ wahr

Der Punkt (4 | 4 | 4) liegt auf g.

b) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$ $\qquad \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

2 E: $4x + 4y + 7z = 28$ hat vom Ursprung O den Abstand $d = \frac{28}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2}} = \frac{28}{9}$

Zu E parallele Ebenen F und G haben die Gleichung $4x + 4y + 7z = c$

F, G hat vom Ursprung O den Abstand $d = \frac{c}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2}} = \frac{c}{9}$

Bedingung für Abstand 2: $\frac{c}{9} = \pm 2 \Rightarrow c = \pm 18$

F: $4x + 4y + 7z = 18$ G: $4x + 4y + 7z = -18$

Aufgabe 3 *Lösung der Aufgabe Seite 57*

1 A(1 | 2 | 5), B(2 | 7 | 8), C(− 3 | 2 | 4)

a) A, B und C sind Eckpunkte eines Dreiecks

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \neq k \cdot \overrightarrow{AC}$ für alle $k \in \mathbb{R}$

b) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} a-1 \\ a\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} a-1 \\ a\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(a-1)^2 + 2a^2 + 2}$

$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{3a^2 - 2a + 3}$

Bedingung für a: $\left|\overrightarrow{AD}\right| = 2$

Quadrieren: $3a^2 - 2a + 3 = 4$ $3a^2 - 2a - 1 = 0$

Lösung mit Formel: $a_1 = -\frac{1}{3}$; $a_2 = 1$

Die Gleichung hat die zwei Lösungen $a = -\frac{1}{3}$ bzw. $a = 1$.

Es gibt zwei Werte von a, für den die Strecke von A nach D die Länge 2 hat.

2 E: $2x + y - z - 4 = 0$; P(− 3 | 0 | 2).

a) Punktprobe mit P: $2 \cdot (-3) - 2 - 4 = 0$ falsch

P liegt nicht in der Ebene E.

b) Spiegelpunkt P*

Lotgerade zu E durch P: z. B. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

Hinweis: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist der Normalenvektor von E.

Einsetzen des allgemeinen Geradenpunktes in die Ebenengleichung ergibt

den Parameter des Lotfußpunktes:

$2 \cdot (-3 + 2r) + r - (2 - r) - 4 = 0$ für $r = 2$

P* liegt auf der Lotgeraden und hat den doppelten Parameterwert:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ Koordinaten von P*: P*(5 | 4 |− 2)

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2017

angepasst für die Abiturprüfung 2022

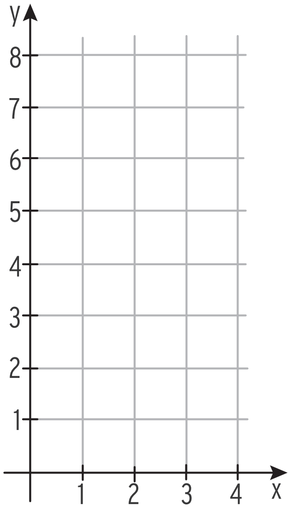
Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau – Grundkurs

Aufgabenstellung 1

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis

Das Rechteck ABCD mit A(1|0), B(2|0), C(2|8) und D(1|8) wird durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, in zwei Teilflächen zerlegt.



a) Skizzieren Sie die beiden Teilflächen in nebenstehendem Koordinatensystem. 2

b) Ermitteln Sie den Flächeninhalt der oberen Teilfläche. 3

c) Eine Funktion f ist gegeben durch $f(x)= e^{3x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. 4
Zeigen Sie, dass die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $P\,(1 \mid f(1))$ durch die Gleichung $y = 6e^3 \cdot x - 5e^3$ beschrieben werden kann.

1.2 Analysis

Die folgende Tabelle enthält Funktionswerte und Werte der ersten beiden Ableitungen einerPolynomfunktion h vom Grad 4. Das Schaubild von h ist K. 6

x	− 1,5	− 1	− 0,5	0	0,5	1	1,5
h(x)	2,375	− 2	− 1,625	− 1	− 1,625	− 2	2,375
h′(x)	− 18	− 2	2	0	− 2	2	18
h″(x)	48	18	0	− 6	0	18	48

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidungen ohne Funktionsterme zu berechnen.

(1) P(− 1 | 2) liegt auf K.

(2) K besitzt zwei Wendepunkte.

(3) K besitzt drei Punkte mit waagrechter Tangente.

Aufgabenstellung 1

1.3 Analytische Geometrie

Gegeben sind die Ebene E mit $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$,

sowie die Punkte A (3|0|0) und B (− 1|0|0). Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B.

a) Zeigen Sie, dass A nicht in E liegt. 2

b) Zeigen Sie, dass der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ in E liegt. 2

c) Untersuchen Sie, ob der Richtungsvektor der Geraden g auf den Spannvektoren von E senkrecht steht. 2

1.4 Analytische Geometrie

Gegeben sind die Punkte A(1 | − 1 | 2) und B(− 1 | − 3 | 4), sowie der Punkt M(0 | − 2 | 3) der auf der Gerade g durch A nach B liegt.

Die Ebene E ist gegeben durch E: $-x_1 - x_2 + x_3 = 5$.

a) Zeigen Sie, dass E den Punkt M enthält und dass E orthogonal zu g ist. 2

b) Vom Punkt C(3 | 1 | 0) ist bekannt, dass er auf g liegt. Bestimmen Sie den Punkt D (mit D ≠ C), der von M den gleichen Abstand wie C hat. 2

25

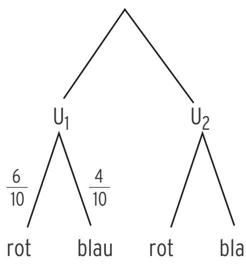
1.3 Stochastik

In den Urnen U_1 und U_2 befinden sich Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden:

U_1: 6 rote und 4 blaue Kugeln U_2 : 1 rote und 4 blaue Kugeln

a) Aus der Urne U_1 werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben. 2

b) Es wird eine der beiden Urnen zufällig ausgewählt. Aus dieser wird eine Kugel wird eine Kugel zufällig gezogen. Die gezogene Kugel ist rot. Mit dem nebenstehenden Baumdiagramm soll dieses Zufallsexperiment beschrieben werden. Ergänzen die vier fehlenden Einträge an den Pfaden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gezogene Kugel aus der Urne U_1 stammt. 4



1.4 Stochastik

Ein Glücksrad besteht aus drei Sektoren unterschiedlicher Größe. Der rote Sektor nimmt die Hälfte des Glücksrads ein, der weiße Sektor ein Drittel und der grüne Sektor den Rest. Dreht man das Glücksrad, so zeigt beim Stillstand ein Pfeil auf genau einen der drei Sektoren.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses: 2

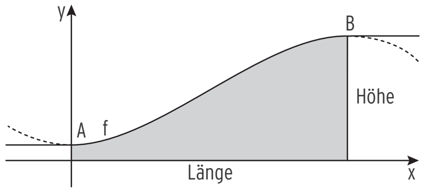
A: Bei viermaligem Drehen zeigt der Pfeil genau einmal auf den weißen Sektor.

b) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis B mit der Wahrscheinlichkeit $P(B) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2$ an. 2

25

Aufgabenstellung 2 Analysis

Aufgabe 2.1 Holzeisenbahn



Die Abbildung zeigt das Brückenteil einer Holzeisenbahn. Die obere Begrenzungslinie des Bauelements lässt sich durch die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{500}x^3 + \frac{3}{50}x^2 + 1$ beschreiben, 1 LE = 1 cm. Die linke untere Ecke liegt im Koordinatenursprung.

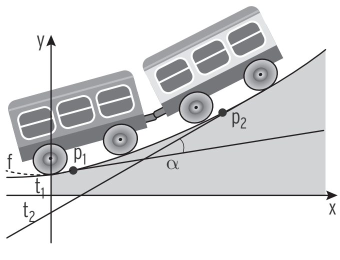
a) Ermitteln Sie rechnerisch die Extrempunkte von f und weisen Sie deren Art nach. In den oberen Eckpunkten A und B geht die Oberkante des Brückenteils ohne Knick in die waagerechten Anschlussschienen über. Begründen Sie, warum die beiden Extrempunkte von f mit diesen Eckpunkten übereinstimmen müssen. 9
[Zur Kontrolle: $f'(x) = -\frac{3}{500}x^2 + \frac{3}{25}x$ sowie $A(0|\, f(0))$ bzw. $B(20|\, f(20))$]

b) Berechnen Sie die mittlere Steigung des Brückenteils. Berechnen Sie die Stellen, an denen die lokale Steigung von f den gleichen Wert hat wie die mittlere Steigung. 6

c) Der Hersteller verkauft batteriebetriebene Lokomotiven für die Holzeisenbahn. Dafür muss sichergestellt sein, dass der Anstiegswinkel an keiner Stelle größer als 32° ist. Bestimmen Sie rechnerisch, in welchem Punkt das Brückenteil den größten Anstieg hat. Ein Nachweis mithilfe einer hinreichenden Bedingung ist nicht erforderlich. Berechnen Sie den maximalen Anstiegswinkel und entscheiden Sie, ob das genannte Kriterium erfüllt ist. 6

d) Das Brückenteil hat eine Tiefe von 4 cm. Berechnen Sie das Volumen des gesamten Brückenteils. 5

e) Damit sich die angehängten Waggons nicht gegenseitig behindern, darf der Neigungswinkel zwischen ihnen nicht größer als 25° werden. 5
Zur Untersuchung des Neigungswinkels werden die Tangenten t_1 und t_2 an den Graphen von f in den Punkten $P_1\,(1{,}5|\, f(1{,}5))$ bzw. $P_2(8{,}5|\, f(8{,}5))$ betrachtet. Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen diesen Tangenten und beurteilen Sie, ob der Neigungswinkel zu groß wird.

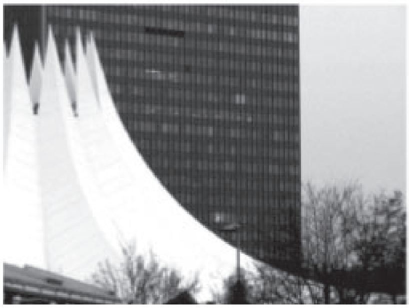


f) Der Hersteller möchte die Maße verändern. Die Länge des Brückenteils soll jetzt 25 cm betragen, seine Höhe links 1,5 cm und rechts 11,5 cm. In den beiden oberen Eckpunkten sollen wieder die Extrempunkte liegen. Das Profil des veränderten Brückenteils soll modelliert werden durch den Graphen einer Funktion g mit einer Gleichung der Form $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$. Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von g. 9

40

Aufgabenstellung 2 Analysis

Aufgabe 2.2 Dachformen



Auf dem Foto sehen Sie einen Teil des Daches eines Berliner Veranstaltungsortes. Das Dach ist aus mehreren gleichartigen Dachelementen zusammengesetzt. Für ein anderes Gebäude wird ein ähnliches Dach geplant. Die äußere Kante des geplanten Dachelementes lässt sich im Intervall [0; 2] annähernd durch die Funktion f mit $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-x}$ beschreiben, 1 LE = 10 m .

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen. Ermitteln Sie Art und Lage aller Extrempunkte des Graphen von f . 11

[Zur Kontrolle: $f'(x) = (-x^2 + 4x - 3)e^{-x}$]

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im oben angegebenen Intervall. 3

c) Im Intervall [0; 2] gibt es eine Stelle x_P, an der der Graph von f die maximale positive Steigung hat. Bestimmen Sie den Wert von x_P und die Steigung des Graphen von f an dieser Stelle. Hinweis: Es genügt die Untersuchung der notwendigen Bedingung. 5

d) Für eine Veranstaltung soll unter einem Dachelement eine Trennwand errichtet werden. Diese Trennwand wird im Intervall [0;1] durch den Funktionsgraphen und die x-Achse begrenzt. 5

Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = (-x^2 - 1)e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist.

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Trennwand, 1 LE = 10 m.

e) Es wird vorgeschlagen, statt der Trennwand eine kleinere Wand zu verwenden, die begrenzt ist durch die Koordinatenachsen und die Tangente an den Graphen von f im Punkt R(0| 1). Ermitteln Sie eine Gleichung für diese Tangente. 9

Berechnen Sie, wie viele Quadratmeter Wandfläche durch den Vorschlag eingespart werden.

f) Der Graph einer quadratischen Funktion p soll in den Punkten R(0 | 1) und S(1 | 0) tangential zum Graphen von f verlaufen. Geben Sie vier Bedingungen an, die p erfüllen muss und untersuchen Sie, ob es eine solche Funktion p gibt. 7

40

Aufgabenstellung 3 Analytische Geometrie

Aufgabe 3

Bei östlichen Winden wird vom Flughafen in Berlin-Tegel von einer Startbahn gestartet, die in eine nordöstliche Richtung zeigt.
Ein Jet hebt im Punkt $P_0(1140 \mid 240 \mid 0)$ von der Startbahn ab und erreicht eine Sekunde später die Position $P_1(1200 \mid 251 \mid 30)$.
Der Jet verändert seine Richtung beim Starten nicht nach rechts oder links. Der Jet fliegt geradlinig und verändert seine Geschwindigkeit zunächst nicht. Der Flughafen und Berlin liegen in der x-y-Ebene. Es gilt 1 LE = 1 m.

a) Geben Sie den Richtungsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{P_0P_1}$ und eine Gleichung der Geraden g an, auf der der Jet unmittelbar nach dem Start fliegt. Berechnen Sie die Länge der Strecke, die der Jet in einer Sekunde zurücklegt. 7
Berechnen Sie die Startgeschwindigkeit des Jets in der Einheit $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Berechnen Sie den Winkel, mit dem der Jet gestartet ist.

b) In gerader Verlängerung der Startbahn liegt 7 km vom Punkt $P_0(1140 \mid 240 \mid 0)$ entfernt das Rathaus Pankow. Ermitteln Sie die Koordinaten des Rathauses. 5
Runden Sie auch Zwischenergebnisse ganzzahlig.
[Kontrollergebnis: $R(8040 \mid 1505 \mid 0)$]

c) 10 Sekunden nach dem Start ändert der Jet im Punkt $P_{10}(1740 \mid 350 \mid 300)$ seine Geschwindigkeit und fliegt weniger steil mit der Richtung $\vec{r}_{neu} = \begin{pmatrix} 90 \\ 16{,}5 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$ weiter. 4
Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Jet das Rathaus überfliegt. Bestimmen Sie die Höhe, in der das Rathaus überflogen wird.

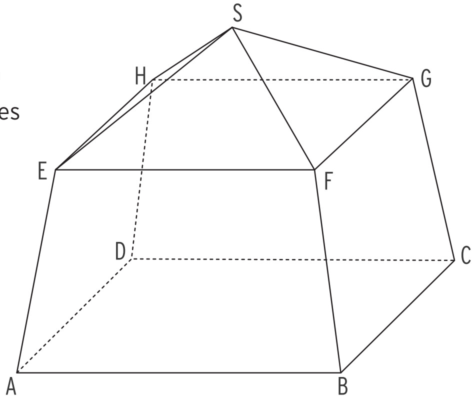
d) In der Ebene E mit der Gleichung $x - 20z = -1560$ befindet sich die untere Begrenzung einer dichten Wolkendecke. Weisen Sie nach, dass die neue Flugbahn parallel zu der unteren Begrenzung der Wolkendecke verläuft. 4
Der Bürgermeister schaut vom Rathaus im dem Moment nach oben, in dem sich der Jet genau über dem Rathaus befindet.
Untersuchen Sie, ob der Bürgermeister den Jet sehen kann oder nur die Wolkendecke.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabenstellung 3 Analytische Geometrie

Aufgabe 3 Fortsetzung

Eine Verpackung für Schokotrüffel hat die Form eines geraden quadratischen Pyramidenstumpfes mit einer aufgesetzten geraden quadratischen Pyramide als Deckel. Die Kantenlänge $\overline{AB}$ des Pyramidenstumpfs beträgt 10 cm, die Kantenlänge $\overline{EF}$ seiner Deckfläche 8 cm.
Der Pyramidenstumpf ist 6 cm hoch.
Insgesamt hat die Verpackung eine Höhe von 9 cm. 1 LE = 1 cm



e) Die Punkte B(10|10|0), D(0|0|0) und F(9|9|6) sind Eckpunkte des Pyramidenstumpfes. Die Spitze der aufgesetzten Pyramide ist S(5|5|9). Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte A, E und H an. — 2

f) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_1, in der die Seitenwand ABFE liegt, in Koordinatenform. [Zur Kontrolle: E_1: $6x + z = 60$] — 4

g) Ermitteln Sie die Größe des Winkels γ, den die Seitenwand ABFE mit der Grundfläche ABCD einschließt. Berechnen Sie den größten Abstand zweier Punkte innerhalb der Verpackung. — 4

30

Hinweis für das Abitur 2022:

Die Abiturientinnen und Abiturienten erhalten aus Aufgabenstellung 1 (hilfsmittelfreier Teil) **entweder** die Aufgaben aus Stochastik oder aus Analytischer Geometrie.

Die Abiturientinnen und Abiturienten erhalten aus Aufgabenstellung 3 bzw. Aufgabenstellung 4 nur **eine** Aufgabe.

Die Auswahl trifft jeweils die Lehrkraft.

Um allen Prüflingen die Möglichkeit zum Üben zu geben, haben die Autoren den Umfang belassen.

Aufgabenstellung 4 Stochastik

Aufgabe 4

Ein Hersteller bringt ein neues Smartphone auf den Markt.
Ein Händler erhält eine Lieferung dieser Smartphones.

a) Die gelieferten Geräte haben sechs verschiedene Farben. Für die Auslage einiger Geräteim Schaufenster sollen vier Farben ausgewählt werden. 2
Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für diese Auswahl.

b) Die Lieferung umfasst 50 Geräte; davon sind drei fehlerhaft. Aus der Lieferung werden zehn Geräte zufällig ausgewählt. 3
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Von den zehn ausgewählten Geräten ist keines fehlerhaft.
B: Von den zehn ausgewählten Geräten ist mindestens eines fehlerhaft.

Die Geräte werden in vier Werken in jeweils großer Stückzahl hergestellt. Der Tabelle können für jedes Werk folgende Daten entnommen werden:

- der Anteil der in diesem Werk hergestellten Geräte an der Gesamtzahl aller hergestellten Geräte,
- der Anteil der fehlerhaften Geräte unter den in diesem Werk hergestellten Geräten.

Werk	A	B	C	D
Anteil an der Gesamtzahl	10%	30%	20%	40%
Anteil der fehlerhaften Geräte	5%	3%	4%	2%

c) Weisen Sie nach, dass der Anteil der fehlerhaften Geräte unter allen hergestellten Geräten 3% beträgt. 2

d) Ein unter allen hergestellten Geräten zufällig ausgewähltes Gerät ist fehlerhaft. 3
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es im Werk A hergestellt wurde.

e) Von im Werk A hergestellten Geräten werden 20 zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter kein fehlerhaftes Gerät ist. 2

f) Geben Sie einen Wert von s an, für den mit dem Term $200 \cdot 0{,}98^s \cdot 0{,}02 + 0{,}98^{200}$ 4
im Sachzusammenhang die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnet werden kann.
Beschreiben Sie das zugehörige Ereignis.

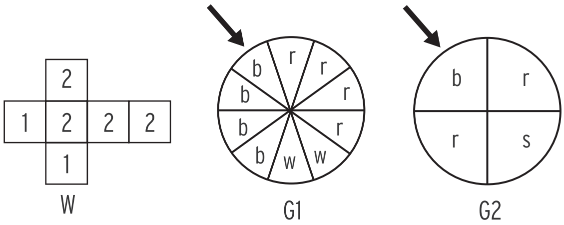
g) Ermitteln Sie, wie viele im Werk C hergestellte Geräte mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens ein fehlerhaftes Gerät befindet. 4

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabenstellung 4 Stochastik

Aufgabe 4 (Fortsetzung)

Lisa und Tom haben im Fundus der Schule einen Würfel und zwei Glücksräder (s. Abb.) gefunden. Sie führen damit verschiedene Zufallsexperimente durch.



Der Würfel W ist durch Neubeschriftung aus einem Laplacewürfel entstanden.

Die Glücksräder sind in jeweils gleich große Sektoren eingeteilt. Die Sektoren sind farbig markiert (s. Abb.; r: rot; b: blau; s: schwarz; w: weiß). Wird eines der Glücksräder gedreht, so bleibt es nach kurzer Zeit stehen und der zugehörige Zeiger zeigt (zufällig) auf einen der Sektoren. Es soll ausgeschlossen sein, dass der Zeiger auf die Grenze zwischen zwei Sektoren zeigt.

h) Im ersten Experiment würfelt Tom zunächst mit dem Würfel W, anschließend dreht Lisa dasjenige Glücksrad, das der Würfel anzeigt (zeigt W z. B. „1“, so wird G1 gedreht). 4
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A_1: Der Würfel W zeigt „2“ und das Glücksrad G2 zeigt anschließend „Rot“.
A_2: Das Glücksrad, das entsprechend dem Würfelergebnis gedreht wird, zeigt „Weiß“ oder „Rot“.

i) Jetzt dreht Lisa das Glücksrad G1 zehnmal. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse: 4
C_1: Das Glücksrad G1 zeigt genau viermal „Rot“.
C_2: Das Glücksrad G1 zeigt mindestens fünfmal „Rot“.

k) Das Glücksrad G1 soll 20-mal gedreht werden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ersten zehn Drehungen genau fünfmal „Rot“ das Ergebnis ist und insgesamt höchstens neunmal „Rot“ das Ergebnis ist. 3

Anlage zu Aufgabe 4 30

Summierte Binomialverteilungen für n = 10

Dargestellt sind die Werte $P(X \leq k)$. Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“, alle freien Plätze links unten enthalten 1,0000.
Wird die Tabelle „von unten“ gelesen ($p > 0{,}5$), ist der richtige Wert 1 – (abgelesener Wert).

n	k	p: 0,05	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	0,40	0,45	0,50	k	n
10	0	5987	3487	1615	1074	0563	0282	0173	0060	0025	0010	9	10
	1	9139	7361	4845	3758	2440	1493	1040	0464	0233	0107	8	
	2	9885	9298	7752	6778	5256	3828	2991	1673	0996	0547	7	
	3	9990	9872	9303	8791	7759	6496	5593	3823	2660	1719	6	
	4	9999	9984	9845	9672	9219	8497	7869	6331	5044	3770	5	
	5		9999	9976	9936	9803	9527	9234	8338	7384	6230	4	
	6			9997	9991	9965	9894	9803	9452	8980	8281	3	
	7				9999	9996	9984	9966	9877	9726	9453	2	
	8						9999	9996	9983	9955	9893	1	
	9								9999	9997	9990	0	
n	k	0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$	0,60	0,55	0,50	k	n
		p											

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2017 Grundkurs Lösungen

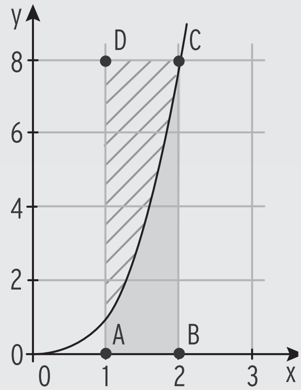
Aufgabenstellung 1 Lösungen

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis

Rechteck ABCD mit A(1|0), B(2|0), C(2|8) und D(1|8)

a) Skizze: $f(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}$



b) Flächeninhalt der oberen Teilfläche:

Rechtecksfläche – Fläche zwischen Kurve und

x-Achse auf [1; 2]

Rechtecksfläche $A_R = 1 \cdot 8 = 8$

$A_f = \int_1^2 f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

Flächeninhalt: $A = 8 - \frac{15}{4} = \frac{17}{4}$

c) $f(x)= e^{3x^2}$; $f'(x)= 6x \cdot e^{3x^2}$ (Kettenregel der Ableitung)

$f(1) = e^3$; $f'(1) = 6\,e^3 = m$

Ansatz: $y = mx + b$ Einsetzen: $e^3 = 6\,e^3 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -5e^3$

Tangentengleichung $y = 6e^3 \cdot x - 5e^3$

1.2 Analysis

(1) Die Aussage ist falsch. P liegt nicht auf K, da laut Wertetabelle $h(-1) = -2 \neq 2$.

(2) Die Aussage ist wahr. Es gelten $h''(-0{,}5)$ und $h''(0{,}5) = 0$. h ist vom Grad 4, somit ist h'' vom Grad 2 und kann keine weiteren Nullstellen mehr aufweisen. $x = -0{,}5$ und $x = 0{,}5$ sind einfache Nullstellen.

(3) Das Aussage ist wahr. Es gilt $h'(0) = 0$. Zudem weist h' zwei weitere Vorzeichenwechsel und damit zwei weitere Stellen mit waagerechter Tangente auf:

$h'(-1) < 0 \wedge h'(-0{,}5) > 0$; $h'(0{,}5) < 0 \wedge h'(1) > 0$.

h' ist vom Grad 3 und kann keine weiteren Nullstellen mehr aufweisen.

1.3 Analytische Geometrie

a) Jeder Punkt auf E auf die x-Koordinate 1 (unabhängig von r und s), also kann A nicht in E liegen.

b) Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$ M(1|0|0)

M liegt in E: M gehört zu r = s = 0; M ist der Aufpunkt von E

c) Richtungsvektor der Geraden g: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist kollinear zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Der Richtungsvektor von g steht auf den Spannvektoren von E senkrecht.

III Zentrale schriftliche Abiturprüfung gA

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2022

Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau – Grundkurs

Aufgabenvorschlag **Teil 1** **für Prüflinge**

Hilfsmittel: Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

nicht für Aufgabenstellung 1

Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist.

Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen

Gesamtbearbeitungszeit: 285 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: hilfsmittelfreier Teil

Hinweis: Hier gibt es keine Wahlmöglichkeiten.
Die Aufgabenstellung und die Lösung zum hilfsmittelfreien Teil werden nach 75 Minuten abgegeben. Mit der Bearbeitung der weiteren Aufgabenstellungen bereits zuvor begonnen werden.
In jedem Fall können die zugelassenen Hilfsmittel erst nach Ablauf der 75 Minuten verwendet werden.

Beachten Sie für die Abiturprüfung 2022:

SuS erhält entweder Aufgaben aus Stochastik oder aus Analytischer Geometrie nach Auswahl durch die Lehrkraft.

Aufgabenvorschlag Teil 2

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Aufgabenstellung 4

Thema/Inhalt: Stochastik

Beachten Sie für die Abiturprüfung 2022:

SuS erhält **eine** Aufgabe aus Aufgabenstellung 3 bzw. Aufgabenstellung 4 nach Auswahl durch die Lehrkraft. SuS hat keine Wahlmöglichkeit.

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau – Grundkurs

Aufgabenvorschlag Teil 1

Hilfsmittel: Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

Aufgabenstellung 1

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis 1

Eine Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -5x^4 - 3x^2 + x;\ x \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f'. Geben Sie die Gleichung einer Stammfunktion F von f an.

b) Der Graph von f hat ein Maximum an der Stelle x_{Max}.

Geben Sie ein Intervall der Länge 1 an, in dem die Stelle x_{Max} liegen muss.

Begründen Sie Ihre Angabe.

1.2 Analysis 2

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen g mit $g(x) = x^2 - 3$ und h mit $h(x) = -x^2 + 2x + 1$.

a) Zeigen Sie, dass sich die Graphen von g und h nur für $x = -1$ und $x = 2$ schneiden.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Graphen von g und h einschließen.

1.3 Geometrie

Gegeben ist eine Gerade g durch die Gleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$.

a)
- Geben Sie eine Gleichung einer Geraden p an, die echt parallel zu g verläuft.
- Geben Sie eine Gleichung einer Geraden s an, die g senkrecht schneidet.

b) Entscheiden Sie begründet, ob jede mögliche Gerade s auch die Gerade p schneidet.

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (Fortsetzung)

1.4 Stochastik

Ein Chor besteht aus zwölf Frauen und neun Männern; eine der Frauen leitet den Chor. An einer Preisverleihung dürfen zwei Mitglieder des Chors teilnehmen.

a) Zunächst geht man davon aus, dass die Leiterin des Chors an der Preisverleihung teilnimmt und das zweite Mitglied zufällig ausgewählt wird.
Geben Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das zweite Mitglied eine Frau ist.

Da die Leiterin an der Preisverleihung nicht teilnehmen kann, werden zwei der anderen Mitglieder zufällig ausgewählt.

b) Begründen Sie ohne zu rechnen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Frauen ausgewählt werden, größer ist als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Männer ausgewählt werden.

c) Geben Sie einen Term an für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau und ein Mann ausgewählt werden.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben										
Teilgebiet	1.1 Analysis 1		1.2 Analysis 2		1.3 Geometrie		1.4 Stochastik			
Teilaufgabe	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	c)	Summe
BE	2	3	2	3	3	2	1	1	3	20

Hinweis für das Abitur 2022:
Die Abiturientinnen und Abiturienten erhalten aus Aufgabenstellung 1 (hilfsmittelfreier Teil) **entweder** die Aufgaben aus Stochastik oder aus Analytischer Geometrie.
Aus Aufgabenstellung 3 bzw. Aufgabenstellung 4 erhalten sie nur **eine** Aufgabe.
Die Auswahl trifft jeweils die Lehrkraft.
Um allen Prüflingen die Möglichkeit zum Üben zu geben, haben die Autoren den Umfang belassen.

Aufgabenvorschlag Teil 2

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.1 Kiri-Bäume

Die Kiri-Bäume wachsen außergewöhnlich schnell. Die Holzmasse eines Kiri-Baums nimmt ca. 10-mal so schnell zu wie die einer Eiche. Ursprünglich kommt der Kiri-Baum aus Südost-Asien, aber er wird auch in Europa zur Holzproduktion gepflanzt. Zurzeit wird untersucht, unter welchen Bedingungen Kiri-Bäume besonders gut wachsen.

Das Wachstum eines Baums A kann für $t \geq 0$ bis zum Erreichen der maximalen Höhe näherungsweise durch die Funktion h mit $h(t) = -0{,}1 \cdot t^4 + 20 \cdot t^2$ beschrieben werden. Dabei gibt t die Zeit in Jahren und h(t) die Höhe in cm an.

a) Bestimmen Sie die Höhe des Baums A nach 2 Jahren und nach 8 Jahren.
   Berechnen Sie die maximale Höhe des Baums A.
   Geben Sie an, wie viele Jahre der Baum A wächst.

b) Berechnen Sie die höchste Wachstumsgeschwindigkeit des Baums A in cm/Jahr.
   Es genügt die Bearbeitung mit dem notwendigen Kriterium.

Das Wachstum eines anderen Baums B kann für $t \geq 0$ bis zum Erreichen der maximalen Höhe näherungsweise durch die Funktion g mit $g(t) = at^3 + bt^2$ beschrieben werden. Dabei gibt t die Zeit in Jahren und g(t) die Höhe in cm an.

c) Der Baum B ist nach 5 Jahren 500 cm hoch und seine Wachstumsgeschwindigkeit beträgt zu diesem Zeitpunkt 150 cm/Jahr.
   Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Funktion g.
   [Kontrollergebnis: $g(t) = -2t^3 + 30t^2$]

d) Die Bäume A und B beginnen gleichzeitig mit ihrem Wachstum (bei $t = 0$).
   Geben Sie die Höhe der Bäume A und B zum Beobachtungsbeginn an.
   Berechnen Sie, zu welchen Zeiten der Baum A und der Baum B die gleichen Wachstumsgeschwindigkeiten besitzen.

e) Untersuchen Sie, zu welchen Zeiten die Wachstumsgeschwindigkeiten der Bäume A und B am stärksten voneinander abweichen.
   Die Anwendung einer hinreichenden Bedingung wird nicht gefordert.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019 Grundkurs Lösungen

Aufgabenstellung 1 Lösungen

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis 1

$f(x) = -5x^4 - 3x^2 + x;\ x \in \mathbb{R}$

a) Ableitungsfunktion f′: $f'(x) = -20x^3 - 6x + 1$

Stammfunktion F von f: $F(x) = -x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2$ (Kontrolle durch Ableiten: $F'(x) = f(x)$)

b) Es ist z. B. $f'(0) = 1$ und $f'(1) = -25$. Die Werte fallen von + nach −.

Daher liegt die Maximalstelle zwischen 0 und 1, also z. B. im Intervall [0; 1].

1.2 Analysis 2

g: $g(x) = x^2 - 3$; h: $h(x) = -x^2 + 2x + 1$.

a) $g(x) = h(x)$ $x^2 - 3 = -x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$

Eine quadratische Gleichung hat höchstens zwei Lösungen.

$g(-1) = h(-1) = -2;\ g(2) = h(2) = 1$

b) Grenzen: − 1; 2

$$\int_{-1}^{2}(g(x) - h(x))dx = \int_{-1}^{2}(2x^2 - 2x - 4)dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x\right]_{-1}^{2} = \frac{16}{3} - 4 - 8 - \left(-\frac{2}{3} - 1 + 4\right) = -9$$

Inhalt der Fläche, die die Graphen von g und h einschließen: A = 9 FE

Hinweis: $\int_{-1}^{2}(h(x) - g(x))dx = 9$

1.3 Geometrie

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

a) • Angabe einer Geradengleichung mit einem Richtungsvektor, der kollinear zum Richtungsvektor der Geraden g liegt und einem Stützvektor, dessen Endpunkt nicht auf der Geraden g liegt: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix}$; $(4 \mid 3 \mid 6) \notin g$

• Angabe einer Geradengleichung mit einem Richtungsvektor, der orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden g verläuft und z.B. mit dem Stützvektor der Geraden g.

$\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix} = 0$

b) Die Geraden p und g legen eine Ebene fest. Man kann die Gerade s so wählen, dass s nicht in dieser Ebene liegt (und trotzdem die Gerade g im rechten Winkel schneidet). Dann hat sie keinen Schnittpunkt mit der Geraden p. Also schneidet nicht jede mögliche Gerade s auch die Gerade p.

Aufgabenstellung 1 Lösungen

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.4 – Stochastik

Chor aus zwölf Frauen inclusive Chorleiterin und neun Männern

a) Chorleiterin nimmt teil: 11 Frauen aus 20 Mitgliedern

Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das zweite Mitglied eine Frau ist: $p = \frac{11}{20}$

b) Die Anzahl der Frauen unter den anderen Mitgliedern ist größer als die der Männer.

(11 Frauen zu 9 Männer)

c) Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau und ein Mann ausgewählt werden

(Ziehen ohne Zurücklegen): $p = \frac{\binom{11}{1} \cdot \binom{9}{1}}{\binom{20}{2}}$ oder $p = 2 \cdot \frac{11}{20} \cdot \frac{9}{19}$

Aufgabenstellung 2 Lösungen

Aufgabe 2.1 Kiri-Bäume

Wachstum eines Baums A: $h(t) = -0{,}1 \cdot t^4 + 20 \cdot t^2$; $t \geq 0$

a) Höhe des Baums A nach 2 Jahren: $h(2) = 78{,}4h$; nach 8 Jahren: $h(8) = 870{,}4$

Nach 2 Jahren ist der Baum A ca. 78 cm hoch und nach 8 Jahren ca. 870 cm hoch.

Maximale Höhe des Baums A:

Ansatz: $h'(t) = 0$ und $h''(t) < 0$

$h'(t) = -0{,}4 \cdot t^3 + 40 \cdot t$, $h''(t) = -1{,}2 \cdot t^2 + 40$

$h'(t) = 0$ $\quad t(-0{,}4 \cdot t^2 + 40) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee -0{,}4 \cdot t^2 + 40 = 0$

Nullstellen von h': $\quad t_1 = 0$; $t_2 = 10$; $t_3 = -10$ (< 0 entfällt)

$h''(0) = 40 > 0$: lokales Minimum in $t_1 = 0$

$h''(10) = -80 < 0$: lokales Maximum in $t_2 = 10$

$h(10) = 1000$: Der Baum A wird maximal 1000 cm hoch.

Die Wachstumsphase des Baums A beträgt 10 Jahre (von t = 0 bis t = 10).

b) Höchste Wachstumsgeschwindigkeit des Baums A in cm/Jahr (Maximum von h')

Ansatz: $h''(t) = 0$ $\quad -1{,}2 \cdot t^2 + 40 = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{100}{3} \Leftrightarrow t_1 \approx 5{,}8$; $t_2 = -5{,}8 < 0$

$h'(5{,}8) \approx 154$ oder auch $h'\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) \approx 154$

höchste Wachstumsgeschwindigkeit: 154 cm/Jahr.

Wachstum eines anderen Baums B: $g(t) = at^3 + bt^2$; $t \geq 0$

c) B ist nach 5 Jahren 500 cm hoch: $g(5) = 500$ $\quad$ (I) $125a + 25b = 500$

Wachstumsgeschwindigkeit 150 cm/Jahr: $g'(5) = 150$ $\quad$ (II) $75a + 10b = 150$

Lösung des LGS: $a = -2$; $b = 30$

Funktionsgleichung der Funktion g: $g(t) = -2t^3 + 30t^2$

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2021

Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau – Grundkurs

Aufgabenvorschlag Teil 1

Hilfsmittel: Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

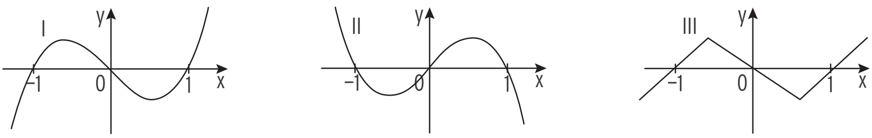
Aufgabenstellung 1

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis 1

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x^3 - x$.

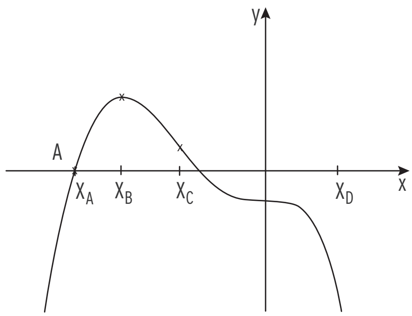
a Einer der folgenden Graphen I, II und III stellt f dar. Geben Sie die Graphen an, die dafür nicht infrage kommen, und begründen Sie Ihre Angabe. 2



b Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f und die x-Achse einschließen. 3

1.2 Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f. Die Punkte A, B, C und D liegen auf dem Graphen von f.



a Geben Sie an, ob die Funktionswerte der Ableitungsfunktion f′ an den angegebenen Stellen positiv, negativ oder null sind. 3

	x_A	x_B	x_C
$f'(x)$			

b Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr ist. 2

Für die bestimmten Integrale $I_1 = \int_{x_A}^{x_C} f(x)\,dx$ und $I_2 = \int_{x_C}^{x_D} f(x)\,dx$ gilt: $I_1 < I_2$.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2021

Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau – Grundkurs

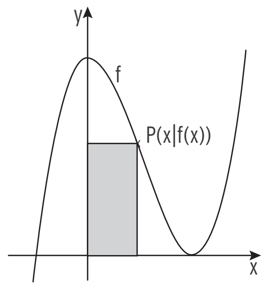
Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (Fortsetzung)

1.3 Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

a Zeigen Sie, dass $x_E = 2$ eine der beiden Extremstellen der Funktion f ist. 2

b Jeder Punkt $P\,(x \mid f(x))$ mit $0 < x < 2$ legt ein achsenparalleles Rechteck fest (siehe Abbildung). Für genau einen x-Wert x_{max} wird der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal.



Weisen Sie nach, dass gilt: $x_{max} \neq 1$. 3

1.4 Analytische Geometrie

Zwei sich schneidende Ebenen sind gegeben durch ihre Gleichungen:

$E: 2x + y + 4z = 6$ und $F: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$

a Geben Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform an. 1

b Die Gerade $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ liegt in der Ebene F.

Weisen Sie nach, dass die Gerade s auch in der Ebene E liegt. 2

c Ermitteln Sie eine Gleichung einer Ebene H, die zu den beiden Ebenen E und F senkrecht verläuft. 2

1.5 Analytische Geometrie

Gegeben ist der Punkt P(4|6|4) und die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $s, t \in \mathbb{R}$.

a Weisen Sie nach, dass der Punkt P in der Ebene E liegt. 2

b Die Gerade g 3

- liegt in der Ebene E,
- geht durch den Punkt P und
- hat keinen Schnittpunkt mit der xy-Ebene.

Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an.

25

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2021

Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau — Grundkurs

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (Fortsetzung)

1.4 Stochastik

Bei einem Spiel wird gleichzeitig mit einem roten und einem blauen Laplace-Würfel gewürfelt. Die Seiten beider Würfel sind mit den Augenzahlen von 1 bis 6 beschriftet.

a Die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl des blauen Würfels größer ist als die des roten Würfels, beträgt $\frac{15}{36}$. 3

Begründen Sie, dass diese Aussage wahr ist.

b Die Zufallsgröße X ist wie folgt definiert: 2

$X = 0$, wenn die Augenzahl des roten Würfels kleiner ist als die des blauen Würfels.

$X = 1$, wenn die Augenzahl beider Würfel gleich ist.

$X = 2$, wenn die Augenzahl des roten Würfels größer ist als die des blauen Würfels.

Ermitteln Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X.

1.5 Stochastik

In einer Urne befinden sich 6 weiße und 4 schwarze Kugeln.

Bei einem Auswahlverfahren ziehen 10 Bewerber nacheinander ohne Zurücklegen eine Kugel aus dieser Urne. Jeder Bewerber, der eine weiße Kugel zieht, ist ausgewählt.

a Der zweite Bewerber wird ausgewählt. 2

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür 60 % beträgt.

b Entscheiden Sie, ob der erste oder der dritte Bewerber die größere Chance hat, ausgewählt zu werden. Begründen Sie Ihre Entscheidung. 3

25

Hinweis für die Abiturprüfung 2021 und auch 2022:

SuS erhält die Aufgaben 1.4 und 1.5 nach Auswahl durch die Lehrkraft

(Entweder Analytische Geometrie oder Stochastik).

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2021

Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau – Grundkurs

Aufgabenvorschlag Teil 2

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.1: Turbinenschaufel — BE

Gegeben sind die Funktionen f und p mit den Funktionsgleichungen

$f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x;\ x \in \mathbb{R}$ und $p(x) = -x^2 + 3{,}8x - 1{,}36;\ x \in \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion f ist G_f und der Graph der Funktion p ist die Parabel G_p.

a Zeigen Sie, dass die Parabel G_p die x-Achse an den Stellen $x_1 = 0{,}4$ und $x_2 = 3{,}4$ schneidet. — 2

b Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f. — 3

c Weisen Sie nach, dass der Punkt $H(2 \mid \frac{8}{3})$ ein Hochpunkt des Graphen G_f ist. — 4

d Untersuchen Sie, ob der Graph G_f einen Wendepunkt besitzt. — 3

e Die Gerade g mit $g(x) = \frac{8}{3}$ und der Graph G_f haben zwei gemeinsame Punkte. — 5

Zeigen Sie, dass diese Punkte an den Stellen $x_3 = 2$ und $x_4 = 8$ liegen.

Bestimmen Sie die Größe der Fläche, die von der Geraden g und dem Graphen G_f begrenzt ist.

Hinweis: Ohne Nachweis können Sie verwenden, dass es keine weiteren Schnittpunkte zwischen der Geraden g und dem Graphen G_f gibt.

f Ohne Nachweis können Sie verwenden, dass der Scheitelpunkt der Parabel p ein Hochpunkt ist. — 4

Zeigen Sie, dass der Abstand der Hochpunkte der Graphen G_f und G_p größer als $\frac{5}{12}$ ist.

g Für $0{,}4 \leq x \leq 3{,}4$ verlaufen die beiden Graphen G_f und G_p im 1. Quadranten und der Graph G_f verläuft oberhalb des Graphen G_p. — 6

Die Funktion $d(x) = f(x) - p(x)$ beschreibt den senkrechten Abstand der beiden Graphen im Intervall $0{,}4 \leq x \leq 3{,}4$.

Ermitteln Sie, in welchem Intervall der Graph von d steigend und in welchem Intervall der Graph von d fallend ist. Geben Sie den Wertebereich von d an.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2021

Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau – Grundkurs

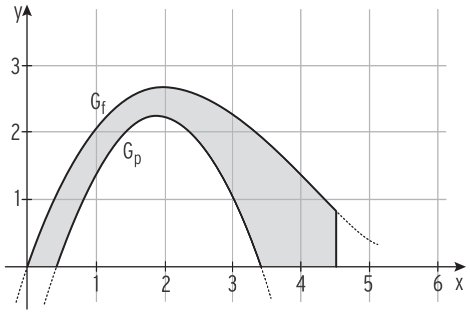
Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.1 Turbinenschaufel (Fortsetzung)

In Wasserkraftwerken wird ein Turbinenrad von einem Wasserstrahl angetrieben.

Dazu sind auf dem Rand des Turbinenrades viele einzelne Schaufeln angebracht.

Abbildung 1



Die Abbildung zeigt die Querschnittsfläche einer Turbinenschaufel. Sie ist eingeschlossen von den Graphen G_f und G_p, der x-Achse und der Geraden $x = 4{,}5$. (1 LE = 10 cm.)

h Berechnen Sie den Flächeninhalt der Querschnittsfläche der Turbinenschaufel. 6

i Weisen Sie nach, dass gilt: $p'(0{,}4) = f'(0)$. 3

Erläutern Sie, welche anschauliche Bedeutung diese Eigenschaft im Sachzusammenhang hat.

j Bei Materialuntersuchungen bricht eine Turbinenschaufel. Die Bruchlinie liegt auf einer Geraden h mit $h(x) = \frac{4}{3}x - \frac{7}{4}$. 5

Zeigen Sie, dass die Gerade h den Graphen G_f im Punkt $P(3 \mid f(3))$ schneidet.

Zeichnen Sie die Gerade h in die Abbildung 1 ein.

Ermitteln Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden h und dem Graphen G_f im Punkt P.

k Es wird vorgeschlagen, die Form der Turbinenschaufel zu ändern. Als untere Begrenzung soll anstelle der Parabel p eine Parabel q verwendet werden, die folgende Eigenschaften hat. 4

- $q(0) = 0$
- $H_q(2 \mid 2{,}2)$ ist der Hochpunkt von q.

Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von q. $\overline{45}$