Patyna

Mathematik

für das Berufliche Gymnasium in Niedersachsen
Kerncurriculum und Bildungsstandards

Qualifikationsphase – Schwerpunkt Wirtschaft – Analysis

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasserin:

Marion Patyna

Umschlag: Hintergrund: ECE, Ernst-August-Galerie, Hannover,
Kreis rechts oben: Candy Box – Fotolia.com, Kreis Mitte: Colourbox.de,
Kreis links: Syda Productions – Colourbox.de, Grafik: Colourbox.de

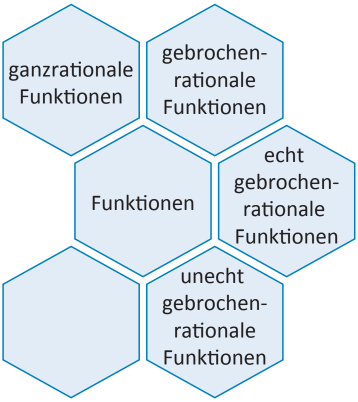
* * * * *

2. Auflage 2021

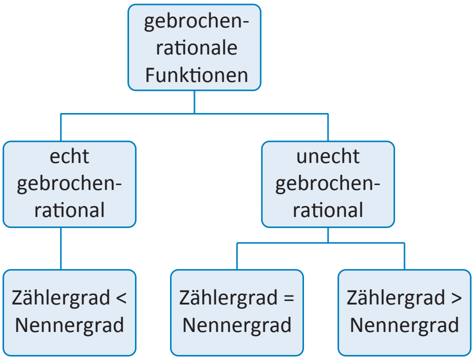
Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0686-02-DS

3.3 Ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen



Bei der Untersuchung der Kosten-, Erlös- und Gewinnsituation eines Unternehmens sind nicht mehr nur **ganzrationale Funktionen**[1], sondern auch **gebrochenrationale Funktionen**[2] $f\colon f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ von Bedeutung. Es handelt sich bei den Stückkosten-, Stückerlös- und Stückgewinnfunktionen um gebrochenrationale Funktionen, deren Nennerfunktion $N(x) = x$ entspricht $f(x) = \frac{Z(x)}{x}$, wobei die Zählerfunktion gemäß ihrer wirtschaftlichen Bedeutung eine ganzrationale Funktion ersten bis dritten Grades sein kann und so echt gebrochenrationale oder unecht gebrochenrationale Funktionen entstehen.
Die Funktionsklasse der gebrochenrationalen Funktionen wird anhand des Grades der ganzrationalen Zähler- bzw. Nennerfunktion untergliedert.



Beispiel 1

Das Unternehmen *Werkzeug GmbH* stellt zukünftig auch *Steckschlüssel für Linkshänder* her und gilt für dieses Produkt als Monopolist. Aufgrund der Produktionsanpassung können die Gesamtkosten für diese Produktion durch die Funktion K mit $K(x) = 0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x + 50$ modelliert werden, dabei wird x in Mengeneinheiten (ME) und $K(x)$ in Geldeinheiten (GE) angegeben.
Die Controlling-Abteilung möchte vor der Preisfestsetzung einige Analysen durchführen:

1 Nachzulesen im Buch für die Einführungsphase, Kapitel 4 ab S. 60 oder in der Formelsammlung.
2 Klassifikation nachzulesen im Buch für die Einführungsphase, S. 84 oder in der Formelsammlung.

- Bestimmen der Produktionsmenge mit den geringsten Grenzkosten.
- Ermitteln des **Betriebsoptimums (BO)** und der **langfristigen Preisuntergrenze (lPu)**.
- Ermitteln des **Betriebsminimums (BM)** und der **kurzfristigen Preisuntergrenze (kPu)**.

Übernehmen Sie die rechnerische und grafische Analyse und interpretieren Sie die Ergebnisse im Hinblick auf die Preisfestsetzung.

Lösung

Aufstellen der benötigten Funktionsgleichungen und Bestimmen der zugehörigen Definitionsbereiche

$K(x) = 0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x + 50$ mit $D_{ök} = [0; \infty)$

- Grenzkostenfunktion K'
  $K'(x) = 0{,}12x^2 - 3x + 22$ mit $D_{ök} = [0; \infty)$
- Stückkostenfunktion k
  $k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x + 50}{x} = 0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22 + \frac{50}{x}$ mit $D_{ök} = (0; \infty)$, weil nicht durch null dividiert werden darf, wird die null aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen.
- Funktion der variablen Stückkosten k_v
  $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x}{x} = 0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22$ mit $D_{ök} = (0; \infty)$, weil nicht durch null dividiert werden darf, wird die null aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen.

Bestimmen des Tiefpunktes der Grenzkostenfunktion

Hinreichende Bedingung $K''(x) = 0$ und $K'''(x) > 0$

GTR/CAS $T(12{,}5\,|\,3{,}25)$

BO und lPu ermitteln

$k'(x) = 0$ und $k''(x) > 0$, alternativ kann auch der Ansatz $K'(x) = k(x)$ gewählt werden.

GTR/CAS $T(20{,}27\,|\,10{,}5)$

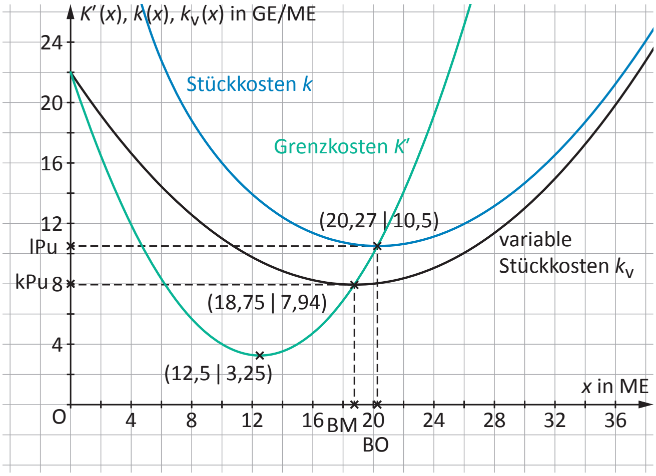
BM und kPu ermitteln

$k_v'(x) = 0$ und $k_v''(x) > 0$, alternativ kann auch der Ansatz $K'(x) = k_v(x)$ gewählt werden.

GTR/CAS $T(18{,}75\,|\,7{,}94)$

Fortsetzung

Grafik



Interpretation

Bei einer Produktion von 12,5 ME entstehen die geringsten Grenzkosten, d. h., der momentane Gesamtkostenanstieg ist am kleinsten. Die Kosten für die Produktion einer zusätzlichen kleinen Einheit betragen 3,25 GE/ME.

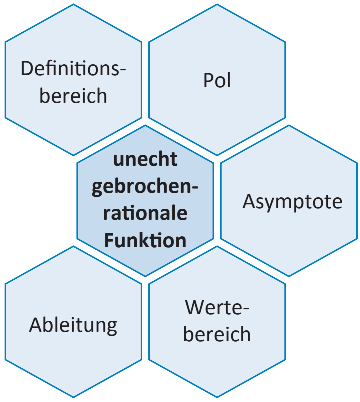
Wenn 18,85 ME des Steckschlüsselsatzes für Linkshänder produziert und vollständig für einen Preis in Höhe von 7,94 GE/ME am Markt verkauft werden, dann realisiert die *Werkzeug GmbH* Verluste in Höhe der Fixkosten, also in Höhe von 50 GE. Wenn die *Werkzeug GmbH* hingegen 20,27 ME zum Preis von 10,5 GE/ME produziert und verkauft, dann entstehen weder Verluste noch Gewinn. Die Gewinnschwelle ist erreicht.

Um Gewinn zu erzielen, muss der Preis pro ME Steckschlüsselsatz höher sein als 10,5 GE/ME und/oder es müssen mehr als 20,27 ME verkauft werden. Jede zusätzlich produzierte kleine Mengeneinheit führt zu steigenden Grenzkosten, denn 20,27 ME sind größer als 12,5 ME (Tiefstelle der Grenzkostenfunktion) und der Graph der Grenzkostenfunktion verläuft nach dem Tiefpunkt progressiv steigend. Sollen die Grenzkosten nicht steigen, muss der Preis und nicht die Menge erhöht werden, um Gewinn zu erzielen.

4.3 Gebrochenrationale Funktionen

Im Rahmen der Kombination von Produktionsfaktoren werden die Isoquanten mithilfe von **unecht gebrochenrationalen Funktionen** modelliert. Hierbei sind Zähler- und Nennergrad gleich groß, da beide Funktionen lineare Funktionen sind.

$$f(x) = \frac{a}{x-b} + c = \frac{a}{x-b} + \frac{c(x-b)}{x-b} = \frac{a + cx - bc}{x-b} = \frac{cx + a - bc}{x-b}$$



Beispiel 1

Die Traubenernte ist im Herbst für jeden Winzer eine zeitaufwendige Arbeit. Die Trauben können mithilfe von zwei verschiedenen Produktionsfaktoren geerntet werden: entweder mit Maschinen, sogenannten Traubenvollerntern, oder per Hand. Das Unternehmen *Weingut Hansen* plant die diesjährige Ernte. Aus dem letzten Jahr ist bekannt, dass die beiden Produktionsfaktoren wie folgt kombiniert werden können.

Erntemaschine x in Maschinenstunden (ME)	2	3	5
Ernte per Hand y in Arbeitsstunden (ME)	9	7	6

Die zugehörige Isoquantenfunktion I_{Output} ist eine unecht gebrochenrationale Funktion des Typs: $I_{\text{Output}}(x) = \frac{a}{x-b} + c$.

Eine Maschinenstunde kostet 40 Geldeinheiten (GE/ME) und eine Einheit der Arbeitsstunden 10 GE. Die Geschäftsführung des *Weingutes Hansen* geht davon aus, dass das Kostenbudget des letzten Jahres in Höhe von 150 GE nicht ausreichen wird, weil ein zusätzlicher Weinberg bepflanzt wurde und dieses Jahr abgeerntet werden muss.
Die Geschäftsführung geht davon aus, dass sie das Budget auf 250 GE erhöhen muss.
Überprüfen Sie rechnerisch und grafisch, ob die Geschäftsführung mit ihrer Prognose richtig liegt.
Geben Sie die Anzahl der mindestens benötigten Maschinenstunden und der mindestens benötigten Arbeitsstunden an.

Lösung

Funktionsterm der Isoquante bestimmen

LGS durch Einsetzen der gegebenen Werte aufstellen

$$\left|\begin{array}{l} \frac{a}{2-b}+c=9 \\ \frac{a}{3-b}+c=7 \\ \frac{a}{5-b}+c=6 \end{array}\right| \quad \text{| Multiplizieren mit dem jeweiligen Nenner}$$

$$\left|\begin{array}{l} a+c(2-b)=9(2-b) \\ a+c(3-b)=7(3-b) \\ a+c(5-b)=6(5-b) \end{array}\right| \quad \text{| Klammern auflösen}$$

$$\left|\begin{array}{l} a+2c-bc=18-9b \\ a+3c-bc=21-7b \\ a+5c-bc=30-6b \end{array}\right| \quad \text{| Subtraktion I – II und I – III}$$

$$\left|\begin{array}{r} a+2c-bc=18-9b \\ -c=-3-2b \\ -3c=-12-3b \end{array}\right| \quad \text{| · 3 und dann II – III}$$

$$\left|\begin{array}{r} a+2c-bc=18-9b \\ -c=-3-2b \\ 0=3-3b \end{array}\right| \quad \text{| Umformen der letzten Zeile} \Rightarrow b=1 \text{ einsetzen in die beiden anderen Zeilen}$$

$$\left|\begin{array}{r} a+2c-c=18-9 \\ -c=-3-2 \\ b=1 \end{array}\right| \quad \text{| Umformen der mittleren Zeile} \Rightarrow c=5 \text{ einsetzen in die obere Zeile}$$

$$\left|\begin{array}{r} a+2\cdot 5-5=18-9 \\ c=5 \\ b=1 \end{array}\right| \quad \text{| Umformen der ersten Zeile} \Rightarrow a=4$$

$$I_{\text{Output}}(x)=\frac{4}{x-1}+5$$

Definitions- und Wertebereich

$D_{math} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $D_{ök} = (1; \infty)$

$\Rightarrow$ Der Traubenvollernter muss mehr als eine ME in Maschinenstunden eingesetzt werden.

Der ganzrationale Teil des Funktionsterms entspricht der Asymptote:

$g(x) = 5 \Rightarrow W_{ök} = (5; \infty)$

$\Rightarrow$ Mehr als fünf ME Arbeitsstunden werden für die Ernte benötigt.

Fortsetzung

Prüfen des Kostenbudgets

$K = p_x \cdot x + p_y \cdot y \;\Rightarrow\; K = 40\,x + 10\,y$

$I_{150}(x) = -4x + 15$

$I_{150}(x) = I_{Output}(x)$

$-4\,x + 15 = \frac{4}{x-1} + 5 \;\Rightarrow\;$ GTR/CAS: keine Lösung

Das Budget ist zu gering, d. h., die Geschäftsführung hat mit diesem Teil ihrer Prognose Recht.

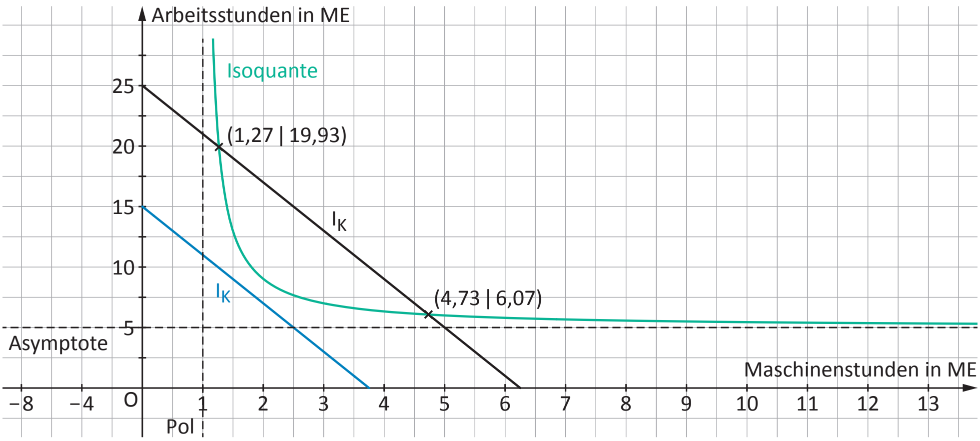
$I_{250}(x) = I_{Output}(x)$

$-4\,x + 25 = \frac{4}{x-1} + 5 \;\Rightarrow\;$ GTR/CAS: $x_1 \approx 1{,}27 \;\vee\; x_2 \approx 4{,}73$

$y_1 = I_{Output}(x_1) \approx 19{,}93 \;\vee\; y_2 = I_{Output}(x_2) \approx 6{,}07$

Das Budget von 250 GE reicht für die Ernte aus. Das *Weingut Hansen* hat zwei Möglichkeiten, um die Weintrauben zu ernten, weil die Isokostengerade als Sekante verläuft und die Isoquante zweimal schneidet.
1,27 ME Maschinenstunden des Traubenvollernters und 19,93 ME Arbeitsstunden **oder** 4,73 ME Maschinenstunden und 6,07 ME Arbeitsstunden.
Die Geschäftsführung hat mit diesem Teil der Prognose nicht Recht, weil das Kostenbudget niedriger sein könnte, da nicht die **Minimalkostenkombination** vorliegt. Eine Parallelverschiebung der Isokostengerade nach links unten ist möglich; dadurch verringert sich das benötigte Kostenbudget.

Grafische Darstellung



Definitions- und Wertebereich für $I_{Output}(x) = \frac{a}{x-b} + c$

		Interpretation
Pol	$N(x) = 0 \Rightarrow x = b$ $Z(b) \neq 0$	Bei $x = b$ liegt ein Pol mit VZW von – zu +.
Asymptote	$g(x) = c$	Es handelt sich um eine unecht gebrochenrationale Funktion, bei der der Zählergrad genau so groß ist wie der Nennergrad: $I_{Output}(x) = \frac{a}{x-b} + c = \frac{a + c(x-b)}{x-b} = \frac{cx + a - bc}{1x - b}$. Die Asymptote entspricht dem ganzrationalen Teil des Funktionsterms bzw. dem Quotienten aus den Koeffizienten von x.
mathematisch	$D_{math} = \mathbb{R}\backslash\{b\}$ $W_{math} = \mathbb{R}\backslash\{c\}$	Zum mathematischen Definitionsbereich gehören alle reellen Zahlen außer der Definitionslücke, die bei b liegt. Zum mathematischen Wertebereich gehören alle reellen Zahlen außer c; das ist die Zahl, bei der die Asymptote liegt.
ökonomisch	$D_{ök} = (b; \infty)$ $W_{ök} = (c; \infty)$	Von dem Produktionsfaktor x müssen mehr als b Einheiten eingesetzt werden, um den geplanten Output zu erzielen. Von dem Produktionsfaktor y müssen mehr als c Einheiten eingesetzt werden, um den geplanten Output zu erzielen.

Beispiel 2

Die Geschäftsführung des *Weingutes Hansen* benötigt für die genaue Budgetplanung der kommenden Saison die Minimalkosten für die vollständige Ernte der Weintrauben.
Bestimmen Sie unter den gegebenen Bedingungen (Beispiel 1) die minimale Höhe des Kostenbudgets und geben Sie die Minimalkostenkombination der Produktionsfaktoren an.

Lösung

Gegeben

$I_{Output}(x) = \frac{4}{x-1} + 5$

$K = p_x \cdot x + p_y \cdot y \;\Rightarrow\; K = 40x + 10y$

$I_K(x) = -4x + \frac{K}{10}$

Die Isokostengerade muss die Isoquante in einem Punkt berühren. Die Koordinaten des Berührpunktes geben die Minimalkostenkombination der Produktionsfaktoren an.

Fortsetzung

Berechnung des Berührpunktes

$I'_{\text{Output}}(x) = I'_{K}(x)$

Ableitungen bestimmen

Anwenden der Kettenregel für die Ableitung der unecht gebrochenrationalen Funktion $f(x) = u\,[v(x)]$.

$$I_{\text{Output}}(x) = \underbrace{4 \cdot (\underbrace{x - b}_{\text{innere Funktion}})^{-1}}_{\text{äußere Funktion}} + c$$

Äußere Funktion: $u(x) = 4\,x^{-1} \;\Rightarrow\; u'(x) = -1 \cdot 4 \cdot x^{-1-1} = -4\,x^{-2}$

Innere Funktion: $v(x) = x - b \;\Rightarrow\; v'(x) = 1$

Die Ableitung wird gebildet, indem die Ableitung der äußeren Funktion unter Beibehaltung der inneren Funktion mit der Ableitung der inneren Funktion multipliziert wird: $f'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x)$

$$I'_{\text{Output}}(x) = \underbrace{-1 \cdot 4 \cdot (x - b)^{-1-1}}_{\substack{\text{äußere Ableitung}\\ \text{unter Beibehaltung}\\ \text{der inneren Funktion}}} \cdot \underbrace{1}_{\text{innere Ableitung}} = -4\,(x - b)^{-2}$$

Ableitung der linearen Funktion mithilfe der Potenz- und Summenregel[1]

$I_K(x) = -4\,x + \frac{K}{10} \;\Rightarrow\; I'_K(x) = -4$

Gleichsetzen der beiden Ableitungen

$-\frac{4}{(x-1)^2} = -4 \;\Rightarrow\; -4 = -4\,(x-1)^2 \;\Rightarrow\; 1 = (x-1)^2$

$\pm 1 = x - 1 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \notin D_{\text{ök}} \;\vee\; x_2 = 2$

Funktionswert ermitteln

$I_{\text{Output}}(2) = \frac{4}{2-1} + 5 = 9 \;\Rightarrow\;$ Berührpunkt (2 | 9)

Kostenbudget bestimmen

$K = 40\,x + 10\,y = 40 \cdot 2 + 10 \cdot 9 = 170$

Minimalkostenkombination

Der geplante Output, also die Ernte der gesamten Trauben, kann durch den Einsatz von 2 ME des Traubenvollernters und 9 ME Arbeitsstunden erzielt werden. Dafür entstehen Kosten in Höhe von 170 GE; dies sind die Minimalkosten.

1 Nachzulesen im Buch der Einführungsphase, S. 174.

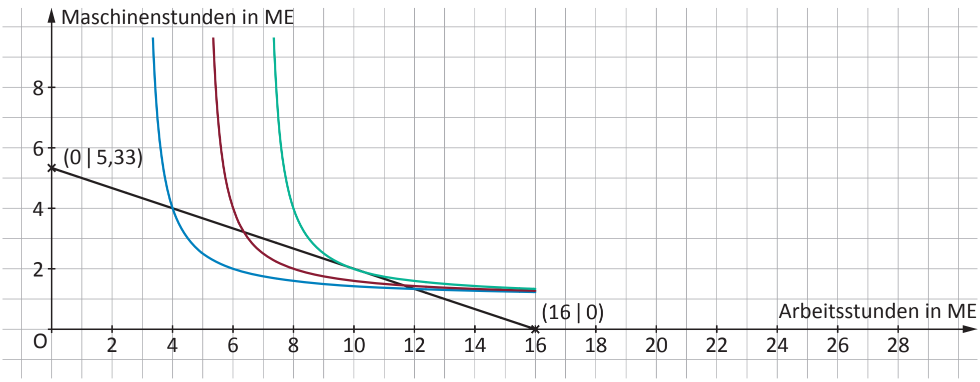
Bei **verketteten Funktionen** sind die Funktionsterme miteinander verknüpft und werden hintereinander ausgeführt: $f(x) = u[v(x)]$. Zur Bestimmung des Funktionswertes wird erst die innere Funktion v und dann die äußere Funktion u ausgeführt. Mithilfe der **Kettenregel** werden verkettete Funktionen abgeleitet: $f'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x)$

Verkettete Funktion (Beispiel)	Äußere Funktion	Innere Funktion	Ableitung
$f(x) = (x-2)^2$	$u(x) = x^2$	$v(x) = x - 2$	$f'(x) = 2(x-2) \cdot 1 = 2(x-2)$
$f(x) = \sqrt{2x+4}$	$u(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$v(x) = 2x + 4$	$f'(x) = \frac{1}{2}(2x+4)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (2) = \frac{2}{2\sqrt{(2x+4)}} = \frac{1}{\sqrt{(2x+4)}}$
$f(x) = e^{3x}$	$u(x) = e^x$	$v(x) = 3x$	$f'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$
$f(x) = \sin(2\pi x + 3)$	$u(x) = \sin x$	$v(x) = 2\pi x + 3$	$f'(x) = (\cos(2\pi x + 3)) \cdot 2\pi$

Beispiel 3

Das *Weingut Hansen* baut an einem Hang auch Hopfen an, der für ein Edel-Bier verwendet wird, das in Champagnerflaschen abgefüllt wird.
Für die Hopfenernte werden Menschen und Maschinen benötigt.
Nachfolgende Grafik verdeutlicht die möglichen Kombinationen der Produktionsfaktoren und die Isokostengerade.
Die zugrundeliegende **Funktionenschar**

$I_{\text{Output},\,b}$ mit $I_{\text{Output},\,b}(x) = \frac{3}{x-b} + 1$ modelliert die möglichen Isoquanten mit $b \in \{3; 5; 7\}$. Mit steigendem b wird ein größerer Output erzielt, sodass das *Weingut Hansen* eine größere Hopfenmenge ernten kann. $I_K(x) = -\frac{p_x}{p_y}x + \frac{K}{p_y}$ modelliert die Isokostengerade.



Bestimmen Sie für die Geschäftsführung des Weingutes die kostengünstigste Kombination der Produktionsfaktoren.
Erläutern und interpretieren Sie Ihre Zwischenlösungen.

Fortsetzung

Lösung

Bestimmen der Isokostenfunktion und Interpretation des Funktionsterms

$I_K(x) = -\frac{p_x}{p_y}x + \frac{K}{p_y}$ mit $P_1\left(0 \,\middle|\, \frac{16}{3}\right)$ und $P_2(16 \mid 0)$

$I_K(0) = -\frac{p_x}{p_y} \cdot 0 + \frac{K}{p_y} = \frac{16}{3} \;\Rightarrow\; \frac{K}{p_y} = \frac{16}{3}$

$I_K(16) = -\frac{p_x}{p_y} \cdot 16 + \frac{16}{3} = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{p_x}{p_y} = -\frac{1}{3}$

$I_K(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{16}{3}$

$\Rightarrow\; K = 16,\; p_x = 1,\; p_y = 3$

Das Kostenbudget liegt bei 16 GE, der Preis für eine ME Arbeit bei 1 GE/ME und der Preis für den Einsatz einer ME Maschinen bei 3 GE/ME.

Bestimmen der Minimalkostenkombination

Isoquante auswählen und b bestimmen

Die Isokostengerade schneidet die blaue und die rote Isoquante, d. h., hier liegt nicht die Minimalkostenkombination vor. Für die grüne Isoquante liegt der Pol bei $x = 7$, d. h., es müssen mehr als 7 ME Arbeit zur Hopfenernte eingesetzt werden.

$\Rightarrow\; I_{\text{Output},\, b}(x) = \frac{3}{x-7} + 1$

$I_K(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{16}{3}$

Schnittpunkt ermitteln (algebraisch oder GTR/CAS)

$\frac{3}{x-7} + 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{16}{3}$ | $\cdot (x-7)$

$\Rightarrow\; 3 + (x-7) = -\frac{1}{3}x(x-7) + \frac{16}{3}(x-7)$ | Klammern auflösen und zusammenfassen

$\Rightarrow\; 0 = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{20}{3}x - \frac{100}{3}$ | Nach x auflösen (pq-Formel, quadratische Ergänzung)

$\Rightarrow\; x_{1,2} = 10$

$\Rightarrow$ d. h., hier liegt ein Berührpunkt vor.

$I_{\text{Output},\, b}(10) = \frac{3}{10-7} + 1 = 2$

Berührpunkt bei (10 | 2)

Die optimale Kombination der Produktionsfaktoren für die Hopfenernte liegt bei einem Einsatz von 10 ME Arbeit und 2 ME Maschinen. Auf diese Weise kann das Kostenbudget von 16 GE eingehalten werden. Außerdem wird so der größte Output erzielt, d. h., die Erntemenge ist am größten, weil die Isoquante im Vergleich zu der blauen und roten weiter oben rechts liegt.

Bestimmen des Funktionsterms für eine Isoquantenfunktion $I_{Output}(x) = \frac{a}{x-b} + c$

Drei Punkte, die auf der Isoquante liegen, sind bekannt

- Im Text werden drei Kombinationsmöglichkeiten der Produktionsfaktoren angegeben.
- Die Koordinaten der drei Punkte werden in die Funktionsgleichung eingesetzt und ein Gleichungssystem aufgestellt.
- Das Gleichungssystem wird mit GTR/CAS oder mithilfe des Gauß- Algorithmus gelöst, sodass a, b und c bestimmt werden.

Ein Punkt und zwei wirtschaftliche Angaben sind gegeben

- Im Text ist die Angabe enthalten „Mehr als … Einheiten werden vom Produktionsfaktor x benötigt.“
  Der angegebene Wert wird für b eingesetzt.
- Im Text ist die Angabe enthalten „Mehr als … Einheiten werden vom Produktionsfaktor y benötigt.“
  Der angegebene Wert wird für c eingesetzt.
- Im Text wird eine Kombinationsmöglichkeit der Produktionsfaktoren angegeben. Die Koordinaten des Punktes werden in die Funktionsgleichung eingesetzt, in der schon die Werte für b und c eingesetzt wurden, sodass nur noch a bestimmt werden muss. Die Gleichung wird nach a aufgelöst.

Bestimmen der Minimalkostenkombination, wenn das Kostenbudget nicht bekannt ist

Ableitungen der Isokostengerade und der Isoquantenfunktion bestimmen	$I'_K(x) = -\frac{p_x}{p_y}$ und $I'_{Output}(x) = -\frac{a}{(x-b)^2}$
Ableitungsterme gleichsetzen	$I'_K(x) = I'_{Output}(x)$ $-\frac{p_x}{p_y} = -\frac{a}{(x-b)^2}$
Gleichung nach x auflösen	Termumformungen GTR/CAS
Den für x berechneten Wert x_{MKK} in die Funktionsgleichung der Isoquante einsetzen, um y_{MKK} zu ermitteln	$I_{Output}(x_{MKK}) = \frac{a}{x_{MKK} - b} + c = y_{MKK}$
Minimalkosten berechnen	$K = p_x \cdot x_{MKK} + p_y \cdot y_{MKK}$

Bestimmen der Minimalkostenkombination, wenn das Kostenbudget bekannt ist

Funktionsterme der Isokostenfunktion und der Isoquantenfunktion gleichsetzen	$I_K(x) = I_{Output}(x)$ $-\frac{p_x}{p_y}x + \frac{K}{p_y} = \frac{a}{x-b} + c$
Gleichung nach x auflösen	Termumformungen GTR/CAS Da es sich um einen Berührpunkt handelt, existiert nur eine Lösung für die Gleichung: $x_{1,2} = x_{MKK}$
Den für x berechneten Wert x_{MKK} in die Funktionsgleichung der Isoquante einsetzen, um y_{MKK} zu ermitteln	$I_{Output}(x_{MKK}) = \frac{a}{x_{MKK} - b} + c = y_{MKK}$

Beispiel 4

Die Geschäftsführung des *Weingutes Hansen* benötigt eine Analyse der **Grenzrate der Substitution** in Bezug auf die Minimalkostenkombination bei der Hopfenernte (Beispiel 3).

$I_{Output}(x) = \frac{3}{x-7} + 1$ und MKK(10 | 2)

Lösung

Grenzrate der Substitution

$$I'_{Output}(x) = -\frac{3}{(x-7)^2}$$

$$I'_{Output}(10) = -\frac{3}{(10-7)^2} = -\frac{1}{3} = \frac{dy}{dx} = \frac{\text{d Maschinenstunden}}{\text{d Arbeitsstunden}}$$

Eine Einheit des Maschineneinsatzes kann durch drei Einheiten Arbeit ersetzt werden.