Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik am BSW Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

* * * * * * * * * *

1. Auflage 2016

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de
ISBN 978-3-8120-**0639**-2

Karl möchte die gleichen Artikel einkaufen wie Herbert, nur braucht er andere Stückzahlen: Mengenvektor $\vec{a} = (7\ \ 5\ \ 2)$.
Er führt auch einen Preisvergleich zwischen der Juniorenfirma und dem Schreibwarenladen durch. Der Gesamtpreis, den Herbert und Karl bezahlen müssten, kann wieder mit dem **Falk'schen Schema** berechnet werden.

$$\begin{array}{l c|c l}
 & & \text{Jufi}\quad\text{Laden} & \\
 & & \begin{pmatrix}1{,}10 & 1{,}20\\ 0{,}60 & 0{,}50\\ 0{,}40 & 0{,}45\end{pmatrix} & \text{Stückpreismatrix}\\ \hline
\begin{matrix}\text{Herbert:}\\ \text{Karl:}\end{matrix} & \begin{pmatrix}4 & 3 & 5\\ 7 & 5 & 2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}8{,}20 & 8{,}55\\ 11{,}50 & 11{,}80\end{pmatrix} & \\
 & \text{Mengenmatrix} & \textbf{Gesamtpreismatrix} &
\end{array}$$

Matrix A mal Matrix B ergibt eine Matrix:

$$\begin{array}{c|l}
 & B \\ \hline
A & A \cdot B\ \ \text{Matrix}
\end{array}$$

Z. B.: $7 \cdot 1{,}20 + 5 \cdot 0{,}50 + 2 \cdot 0{,}45 = 11{,}80$

Definition der Matrizenmultiplikation

Das Produkt zweier Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{rs})$ wird nach folgendem Schema berechnet.

$$\begin{array}{c|l}
 & B \\ \hline
A & A \cdot B
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\ell} & \dots & b_{1p}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\ell} & \dots & b_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n\ell} & \dots & b_{np}\end{pmatrix} = B \\ \hline
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1\ell} & \dots & c_{1p}\\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2\ell} & \dots & c_{2p}\\ & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \boxed{c_{k\ell}} & & \vdots\\ & & & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{m\ell} & \dots & c_{mp}\end{pmatrix} = A \cdot B
\end{array}$$

Berechnung des Elementes $c_{k\ell}$: $c_{k\ell} = a_{k1} \cdot b_{1\ell} + a_{k2} \cdot b_{2\ell} + \dots + a_{kn} \cdot b_{n\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot b_{j\ell}$

Hinweis: $A \cdot B$ kann nur berechnet werden, wenn die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmt. $A_{(m;\, n)} \cdot B_{(n;\, p)} = C_{(m;\, p)}$.
Beispiel: $A_{(2;\, 3)} \cdot B_{(3;\, 4)} = C_{(2;\, 4)}$

Beispiel

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.
Berechnen Sie $A \cdot B$ und $A \cdot A$.

Lösung

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2\\ 1 & -5\end{pmatrix}$

Schema von Falk

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} 2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\\ \hline
\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2\\ 1 & -5\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|l}
 & \mathbf{B}\\ \hline
\mathbf{A} & \mathbf{A \cdot B}
\end{array}$$

$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2\\ 6 & -3\end{pmatrix}$

$A \cdot A = A^2$ Matrixpotenz

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} 2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\\ \hline
\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2\\ 6 & -3\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|l}
 & \mathbf{A}\\ \hline
\mathbf{A} & \mathbf{A \cdot A = A^2}
\end{array}$$

Beispiel

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ und $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie.

a) $A \cdot B$ und $B \cdot A$

b) $A \cdot E$ und $E \cdot A$

Lösung

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 14 \\ -3 & 11 & 37 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

Berechnung im Schema:

	B
A	A·B

$B \cdot A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 7 \\ 10 & -3 & -7 \\ -18 & 11 & 15 \end{pmatrix}$

Berechnung im Schema:

	A
B	B·A

Beachten Sie:

$A \cdot B \neq B \cdot A$ (im Allgemeinen) Die Matrizenmultiplikation ist **nicht kommutativ**.

b) $A \cdot E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$; $E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

Beachten Sie:

$A \cdot E = E \cdot A = A$ E steht für **Einheitsmatrix.**

E ist eine quadratische Matrix mit $e_{ij} = 1$ für $i = j$ und $e_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die (2; 2) Einheitsmatrix; $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die (3; 3) Einheitsmatrix.

Beispiel

Gegeben sind die Rohstoff-Zwischenprodukt-Tabelle und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Tabelle. Die zugehörigen Matrizen werden mit A bzw. B bezeichnet.

	Z_1	Z_2
R_1	4	2
R_2	3	5

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	5
Z_2	7	4	7

Berechnen Sie $A \cdot B = C$ und interpretieren Sie das Element c_{13}.

Lösung

Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C erhält man durch Multiplikation: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 12 & 34 \\ 41 & 23 & 50 \end{pmatrix} = C$

Bedeutung des Elements $c_{13} = 34$:

Für eine ME E_3 braucht man $4 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 34$ Rohstoffe R_1. Für die Produktion von 1 ME E_3 benötigt man 34 ME R_1 (und 50 ME R_2).

Hinweis: C beschreibt, wie viel ME der einzelnen Rohstoffe für je eine ME der Endprodukte benötigt werden.

Beispiel

Ein Betrieb produziert aus den drei Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Produkte P_1 und P_2. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist der Tabelle (Stückliste) zu entnehmen.
Ein Kunde erteilt einen Auftrag über 20 ME von P_1 und 15 ME von P_2. Berechnen Sie, wie viele ME der Rohstoffe von jeder Sorte benötigt werden.

	P_1	P_1
R_1	4	6
R_2	0	8
R_3	5	3

Lösung

Aus der Tabelle erhält man die Produktionsmatrix $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Die **1. Spalte** der Matrix gibt an, wie viel ME der einzelnen Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 für die Herstellung von **1 ME P_1** benötigt werden: 4 ME R_1 und 5 ME R_3.
Die **1. Zeile** der Matrix gibt an, wie viel ME des Rohstoffes R_1 für die Herstellung von 1 **ME von P_1 bzw. P_2** benötigt werden.

Berechnung des **Rohstoffbedarfs** am Beispiel von R_1:

			P_1	20
	P_1	P_2	P_2	15
R_1	4	6		$4 \cdot 20 + 6 \cdot 15 = 170$

$$(4 \quad 6) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix} = 170$$

Für die Herstellung von 20 ME von P_1 und 15 ME von P_2 braucht man 170 ME R_1.

Berechnung des Rohstoffbedarfs am Beispiel von R_2:

			P_1	20
	P_1	P_2	P_2	15
R_2	0	8		$0 \cdot 20 + 8 \cdot 15 = 120$

$$(0 \quad 8) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix} = 120$$

Für die Herstellung von 20 ME von P_1 und 15 ME von P_2 braucht man 120 ME R_2.
Multiplikation mit dem Produktionsvektor (als Spaltenvektor) ergibt die benötigte Menge an Rohstoffen.

$$\underset{C}{\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\vec{x}}{\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}} = \underset{\vec{r}}{\begin{pmatrix} 170 \\ 120 \\ 145 \end{pmatrix}}$$

$$C \cdot \vec{x} = \vec{r}$$

Für die Herstellung von 20 ME von P_1 und 15 ME von P_2 braucht man 170 ME von R_1, 120 ME von R_2 und 145 ME von R_3.

Was man wissen sollte … über das Rechnen mit Matrizen

Addition von Matrizen: $A + B$

Es können nur Matrizen vom **gleichen Typ** addiert werden.

$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

Eigenschaften

$A + O = O + A = A$	**O: Nullmatrix**
$A + B = B + A$	**Kommutativgesetz**
$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$	**Assoziativgesetz**

Skalare Multiplikation: $k \cdot A$

Multiplikation einer Zahl $k \in \mathbb{R}$ (Skalar) mit einer Matrix.

$k \cdot A = k \cdot (a_{ij}) = (k \cdot a_{ij})$; $k \in \mathbb{R}$

Eigenschaften ($k \in \mathbb{R}$)

$k \cdot A = A \cdot k$

$k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

Multiplikation zweier Matrizen: $A \cdot B$

Die Spaltenzahl der Matrix A muss mit der Zeilenzahl der Matrix B übereinstimmen.

Ist A eine (m; n)- und B eine (n; p)-Matrix, dann gilt für das Format der Ergebnismatrix: **(m; n) · (n; p) ⟶ (m; p)**

Die Matrizenmultiplikation ist **nicht kommutativ**, d.h., $A \cdot B \neq B \cdot A$ (im Allg.)

Eigenschaften ($k \in \mathbb{R}$)

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$	**Assoziativgesetz**
$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$	**Distributivgesetz**
$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	
$A \cdot O = O \cdot A = O$	**O: Nullmatrix**
$A \cdot E = E \cdot A = A$	**E: Einheitsmatrix**

$k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B) = (A \cdot B) \cdot k$

$(k \cdot A)^2 = k^2 \cdot A^2$ mit $A^2 = A \cdot A$

Skalarprodukt

Multiplikation eines **Zeilenvektors** mit einem **Spaltenvektor** ergibt eine **Zahl (Skalar)**.

Hinweis: Die Division zweier Matrizen ist nicht definiert.

Aufgaben

1 Gegeben sind die Matrizen A und B und die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = (2 \;\; 3 \;\; -4)$. Berechnen Sie.

a) $A \cdot B$ **b)** $B \cdot \vec{a}$ **c)** B^2 **d)** $(A + E) \cdot B$

e) $\frac{1}{20} \cdot A \cdot \vec{a}$ **f)** $\vec{b} \cdot A$ **g)** $\vec{b} \cdot B \cdot A$ **h)** $\vec{b} \cdot \vec{a}$

2 Gegeben sind die Matrizen A, B und C durch $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie.

a) $(2A + C) \cdot B$ **b)** $2B \cdot C$ **c)** $A \cdot B - B \cdot A$

Welche Folgerungen ergeben sich aus dem Ergebnis von c)?

3 Gegeben sind die Matrizen A und B durch $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B^3 - 2B$.

4 Berechnen Sie x, sodass $(2{,}5 \;\; 0{,}75 \;\; 0{,}5 \;\; 0{,}25)\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} + (12 \;\; 15 \;\; 16 \;\; 20)\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} + 50 = 251$ ergibt.

5 Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -8 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & 4 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$. Vergleichen Sie.

6 Gegeben sind die Vektoren $\vec{k} = (2 \;\; 1 \;\; 3)$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und die Matrix $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie $\vec{k} \cdot \vec{p}$ und $\vec{k} \cdot C \cdot \vec{p}$.

7 Gegeben sind die Matrizen A und B durch $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 & 5 \\ 2 & 10 & -4 & -1 \\ -5 & 9 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Elemente c_{31} und c_{42} des Matrizenproduktes $C = A \cdot B$.

b) Das Element a_{31} der Matrix A wird geändert zu 2,5; das Element b_{22} der Matrix B wird geändert zu 1,5. Berechnen Sie nun das neue Element c_{32} des Matrizenproduktes $C = A \cdot B$.

8 Die Brauerei Harle kann ihre Rohstoffe von zwei Lieferanten beziehen. Die Lieferanten können wochenweise gewechselt werden.

Preis in GE/ME	Hopfen AG Süd	Westmalz AG
Hopfen	40	45
Malz	133	127
Wasser	80	76

Harle	Hopfen	Malz	Wasser
Woche 1	8	5	13
Woche 2	10	7	6
Woche 3	7	9	6
Woche 4	11	8	10

Welchen Lieferanten empfehlen Sie der Brauerei?

9 Das Aktienpaket von Frau Honess umfasst 30 Aktien der Firma Hut, 40 Aktien der Firma Geha und 55 Aktien der Firma Schmal. Die Aktienkurse liegen heute bei 38,40 €, 105,25 € bzw. 455,80 €. Frau Honess werden 55 000 € für das Aktienpaket angeboten.
Beraten Sie Frau Honess, indem Sie eine Matrizenrechnung durchführen.

2 Verflechtungsmatrizen

In einem zweistufigen Produktionsprozess werden z. B. aus zwei **Rohstoffen** R_1 und R_2 die **Zwischenprodukte** Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die **Endprodukte** E_1, E_2 und E_3 gefertigt.

Beispiel

Die Herstellung von je 1 ME von Zwischenprodukt Z_1 erfordert 2 ME des Rohstoffs R_1 und 1 ME des Rohstoffs R_2. Die Produktion von je 1 ME von Zwischenprodukt Z_2 erfordert 3 ME des Rohstoffs R_1 und 2 ME von R_2. Für je 1 ME von Z_3 benötigt man 4 ME des Rohstoffs R_1 und 6 ME des Rohstoffs R_2. Für die Fertigstellung von je 1 ME des Endproduktes E_1 sind 2 ME von Zwischenprodukt Z_1, 1 ME von Z_2 und 5 ME von Z_3 erforderlich. Aus 1 ME Z_1, 0 ME Z_2 und 1 ME von Z_3 wird 1 ME von E_2 erzeugt. Für die Produktion von E_3 sind pro ME jeweils 1 ME Z_1, 2 ME Z_2 und 3 ME von Z_3 erforderlich.

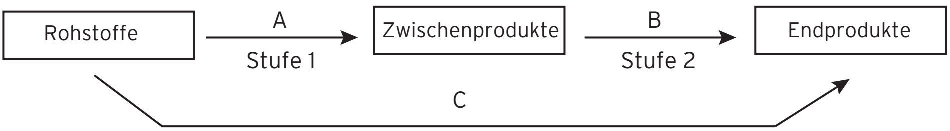
a) Stellen Sie die zugehörigen Stücklisten und die Verflechtungsmatrizen auf.

b) Wie viel ME der Rohstoffe werden für je eine ME der Endprodukte benötigt?

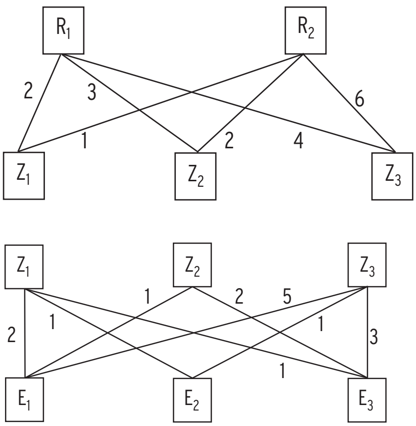
Lösung

a) Darstellung der Verflechtung in **Diagrammen**.

Als **Fertigungsschema**



Als **Verflechtungsdiagramm**



Als **Stückliste (Verflechtungstabelle):**

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	3	4
R_2	1	2	6

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	1
Z_2	1	0	2
Z_3	5	1	3

Aus den **Stücklisten** werden **Verflechtungsmatrizen** gebildet.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\quad$ **Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix**

$\mathbf{A = A_{RZ}}$ $\quad$ $\mathbf{B = B_{ZE}}$

Beachten Sie:

Die Matrix **A** enthält den **Rohstoffeinsatz** für die **Zwischenprodukte,**
die Matrix **B** enthält den **Zwischenprodukteinsatz** für die **Endprodukte.**

b) Berechnung der **Rohstoff-Endprodukt-Matrix C**

Für die Produktion von je einer ME E_1 braucht man

2 ME Z_1; für je 1 ME Z_1 braucht man 2 ME R_1, also insgesamt	4 ME R_1
und 1 ME Z_2; für je 1 ME Z_2 braucht man 3 ME R_1, also insgesamt	3 ME R_1
und 5 ME Z_3; für je 1 ME Z_3 braucht man 4 ME R_1, also insgesamt	20 ME R_1.
Für die Produktion von **je einer ME E_1** braucht man insgesamt	27 ME R_1.

Für die Produktion von je einer ME E_1 braucht man

2 ME Z_1; für je 1 ME Z_1 braucht man 1 ME R_2, also insgesamt	2 ME R_2
und 1 ME Z_2; für je 1 ME Z_2 braucht man 2 ME R_2, also insgesamt	2 ME R_2
und 5 ME Z_3; für je 1 ME Z_3 braucht man 6 ME R_2, also insgesamt	30 ME R_2.
Für die Produktion von **je einer ME E_1** braucht man insgesamt	34 ME R_2.

Multiplikation der **Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix** A mit der 1. Spalte der **Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix** B ergibt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Zur Herstellung je 1 ME des Endproduktes E_1 braucht man 27 ME von Rohstoff R_1 und 34 ME von R_2.

Multiplikation der **Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix** A mit der **Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B** ergibt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 6 & 20 \\ 34 & 7 & 23 \end{pmatrix}$$

Rohstoff-Endprodukt-Matrix C

$$\mathbf{A \cdot B = C}$$

Zur Herstellung je 1 ME
des Endproduktes E_2 braucht man 6 ME von Rohstoff R_1 und 7 ME von R_2,
des Endproduktes E_3 braucht man 20 ME von Rohstoff R_1 und 23 ME von R_2.

Beachten Sie

Die Matrix C enthält den **Rohstoffeinsatz** für die **Endprodukte.**

Beispiel

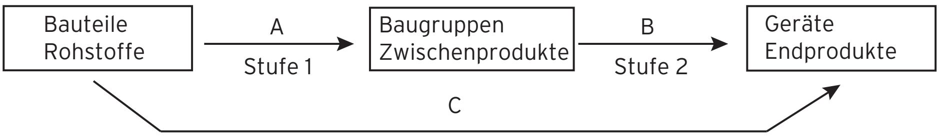
Ein Unternehmen fertigt aus den Baugruppen B_1, B_2 und B_3 drei Typen von Geräten G_1, G_2 und G_3. Für die Herstellung dieser Baugruppen werden die Bauteile T_1, T_2 und T_3 benötigt. Die Matrix A beschreibt den Bedarf an Bauteilen für die Baugruppen, die Matrix C beschreibt den Bedarf an Bauteilen für die Gerätetypen.

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 20 \\ 13 & 17 & 21 \\ 15 & 18 & 23 \end{pmatrix}$

Zeigen Sie: Die Matrix, die den Bedarf an Baugruppen für die verschiedenen Geräte angibt, ist $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Lösung

Fertigungsschema



Gegeben: $A = A_{RZ}$; $C = C_{RE}$

Gesucht ist die Matrix $B = B_{ZE}$.

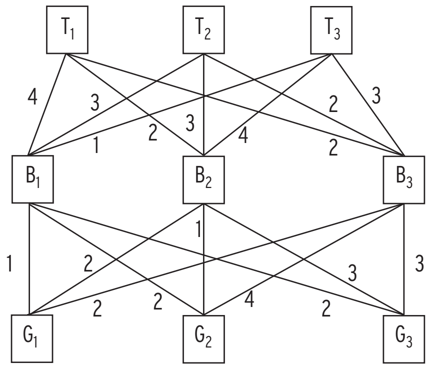
Zusammenhang: $A \cdot B = C$

Multiplikation ergibt

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 20 \\ 13 & 17 & 21 \\ 15 & 18 & 23 \end{pmatrix}$$

Damit ist gezeigt: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Verflechtungsdiagramm:



Hinweise:

1) B lässt sich aus $A \cdot B = C$ berechnen:
   $B = A^{-1} \cdot C$
   (sofern die Inverse von A existiert).

2) **Bedeutung** des Elements $b_{32} = 4$ der Baugruppen-Geräte-Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$:
   Zur Herstellung **eines Geräts vom Typ G_2** benötigt man 4 Baugruppen B_3.

3) B ist die Matrix, die den Bedarf an Baugruppen für die verschiedenen Geräte angibt. Für **ein** Gerät, z. B. G_2, benötigt man zwei Baugruppen B_1, eine Baugruppe B_2 und vier Baugruppen B_3.

Was man wissen sollte … über einen zweistufigen Produktionsprozess

Darstellung eines zweistufigen Produktionsprozesses

- durch **Stücklisten**:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1			
R_2			

	E_1	E_2	E_3
Z_1			
Z_2			
Z_3			

	E_1	E_2	E_3
R_1			
R_2			

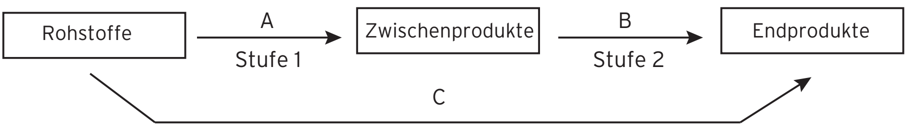
- durch **Verflechtungsmatrizen**:

$A = A_{RZ}$ Rohstoff-Zwischen-produkt-Matrix

$B = B_{ZE}$ Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix

$C = C_{RE}$ Rohstoff-Endprodukt-Matrix

- durch ein **Fertigungsschema**:



Beachten Sie

Die Matrix A beschreibt, wie viel ME der einzelnen Rohstoffe für je eine ME der Zwischenprodukte benötigt werden.
Die Matrix B beschreibt, wie viel ME der einzelnen Zwischenprodukte für je eine ME der Endprodukte benötigt werden.
Die Matrix C beschreibt, wie viel ME der einzelnen Rohstoffe für je eine ME der Endprodukte benötigt werden.

Bemerkung: Die **Zeilenzahl von B** muss mit der **Spaltenzahl von A** übereinstimmen.
Die **Zeilenzahl von C** muss mit der **Zeilenzahl von A** übereinstimmen.

Beachten Sie

Zwischen den Verflechtungsmatrizen gilt der Zusammenhang:

$$A \cdot B = C$$

Merkregel: (RZ) · (ZE) = (RE)

Hinweis: Es wird unterstellt, dass die Rohstoffe **nur** über die Produktion der Zwischenprodukte in die Endprodukte eingehen.

Beispiel

➲ Ein Produktionsprozess, bei dem aus den Rohstoffen R_1 und R_2 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und aus diesen die Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt werden, wird beschrieben durch die Matrizen $A = A_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $C = C_{RE} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$.

Wie viele ME der beiden Zwischenprodukte braucht man für je eine ME der Endprodukte?

Lösung

Die Matrix $B = B_{ZE}$ gibt an, wie viele Zwischenprodukte man für je eine ME der Endprodukte braucht.

Es gilt: $A \cdot B = C$

und daraus folgt für B: $B = A^{-1} \cdot C$

Berechnung der Inversen von A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot(-2)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ |\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} |\ :2 \\ |\ :2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1{,}5 & -2 \\ 0 & 1 & -0{,}5 & 1 \end{array}\right)$$

Gesuchte Matrix A^{-1}: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -2 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$

daraus folgt für B: $B = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -2 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Ergebnis: Für 1 ME E_1 braucht man 1 ME Z_1 und 2 ME Z_2.
Für 1 ME E_2 braucht man 1 ME Z_1 und 3 ME Z_2.

Hinweis: Zwischen den Verflechtungsmatrizen $A = A_{RZ}$, $B = B_{ZE}$ und $C = C_{RE}$ gilt der Zusammenhang: $A \cdot B = C$.
Folgerungen für quadratische Matrizen (falls die Inversen existieren):
$A = C \cdot B^{-1}$ bzw. $B = A^{-1} \cdot C$.

Aufgaben

1 Ein Betrieb produziert in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3. Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sind wie folgt gegeben (alle Angaben in Mengeneinheiten (ME)):

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Wie viel ME der einzelnen Rohstoffe werden für je eine ME der Endprodukte benötigt?

2 Ein Produktionsprozess, bei dem aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und aus diesen die Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt werden, wird beschrieben durch die folgenden Tabellen:

	E_1	E_2
Z_1	1	2
Z_2	2	2

	E_1	E_2
R_1	4	6
R_2	3	4
R_3	5	8

Wie viele ME der drei Rohstoffe braucht man für je eine ME der Zwischenprodukte?

3 Die Spielzeugfirma Leroy stellt aus drei Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 Steckteile (Frontteile Z_1, Mittelteile Z_2 und Heckteile Z_3) für Spielzeugautos her. Der Hersteller verkauft als Endprodukte E_1, E_2, E_3 und E_4 Packungen mit Steckteilen. Für ein Frontteil benötigt man jeweils 1 ME R_1 und R_3 und 2 ME R_2, für ein Mittelteil jeweils 2 ME R_1 und R_2 und 1 ME R_3, für ein Heckteil 3 ME R_1, 5 ME R_2 und 2 ME R_3.
Die Tabelle gibt an, wie viele Steckteile in die einzelnen Endprodukte eingehen. Wie viele Rohstoffe gehen in die einzelnen Endprodukte ein?

	E_1	E_2	E_3	E_4
Z_1	1	1	1	2
Z_2	0	1	3	4
Z_3	1	1	1	2

4 Ein Unternehmen stellt aus den Rohstoffen R_1 und R_2 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und daraus die Endprodukte E_1 und E_2 her.
Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist den Tabellen zu entnehmen.

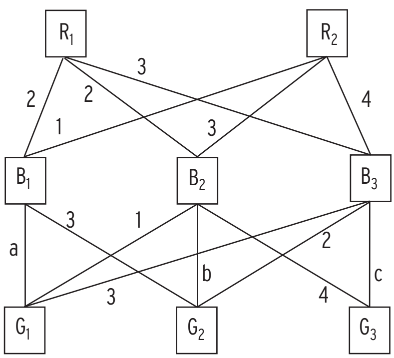
	Z_1	Z_2
R_1	2	1
R_2	3	1

	E_1	E_2
Z_1	a	c
Z_2	b	4

	E_1	E_2
R_1	12	10
R_2	14	d

Berechnen Sie die Werte a, b, c und d. Zeichnen Sie ein Verflechtungsdiagramm.

5 Ein Fertiggaragenhersteller produziert aus zwei Rohstoffen R_1 und R_2 drei Baugruppen B_1, B_2 und B_3 und daraus drei Typen von Fertiggaragen G_1, G_2 und G_3. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist dem Diagramm und der Tabelle zu entnehmen.



	G_1	G_2	G_3
R_1	15	18	20
R_2	17	20	28

Bestimmen Sie die Matrix, die den Bedarf an Baugruppen je Fertiggaragentyp angibt.

3 Produktions- und Verbrauchsvektoren

Beispiel

Ein Unternehmen stellt aus drei Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 Zwischenprodukte und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 her. Die nebenstehende Stückliste gibt den Bedarf an Rohstoffen für je 1 ME der Endprodukte an.

	E_1	E_2	E_3
R_1	3	1	2
R_2	2	1	4
R_3	1	2	5

a) Wie viele Rohstoffe werden benötigt, um 2 ME von E_1, 5 ME von E_2 und 3 ME von E_3 herzustellen?

b) Wie viele Endprodukte können aus 27 ME von R_1, 35 ME von R_2 und 40 ME von R_3 hergestellt werden?

Lösung

Für die Produktion von **je einer ME** E_1 braucht man 3 ME R_1,
je einer ME E_2 braucht man 1 ME R_1,
je einer ME E_3 braucht man 2 ME R_1.

a) Für die Produktion von **2** ME von E_1, **5** ME von E_2 und **3** ME von E_3

- braucht man $(3 \cdot \mathbf{2} + 1 \cdot \mathbf{5} + 2 \cdot \mathbf{3})$ ME R_1, also **17 ME** R_1.
- braucht man $(2 \cdot \mathbf{2} + 1 \cdot \mathbf{5} + 4 \cdot \mathbf{3})$ ME R_2, also **21 ME** R_2.
- braucht man $(1 \cdot \mathbf{2} + 2 \cdot \mathbf{5} + 5 \cdot \mathbf{3})$ ME R_3, also **27 ME** R_3.

Ergebnis: Für die Herstellung von 2 ME von E_1, 5 ME von E_2 und 3 ME von E_3 werden 17 ME von R_1, 21 ME von R_2 und 27 ME von R_3 benötigt.

In Matrixschreibweise: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = C_{RE} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ 21 \\ 27 \end{pmatrix}$

b) Aus den Rohstoffen werden x_1 ME von E_1, x_2 ME von E_2 und x_3 ME von E_3 produziert.

Dann gilt für 27 ME R_1: $3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 27$
für 35 ME R_2: $2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 35$
und für 40 ME R_3: $1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 40$

Das lineare Gleichungssystems für x_1, x_2, x_3: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 27 \\ 2 & 1 & 4 & 35 \\ 1 & 2 & 5 & 40 \end{array}\right)$

Auflösung des linearen Gleichungssystems (Zeile 3 und Zeile 1 werden getauscht):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 40 \\ 2 & 1 & 4 & 35 \\ 3 & 1 & 2 & 27 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 40 \\ 0 & 3 & 6 & 45 \\ 0 & -5 & -13 & -93 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 40 \\ 0 & 3 & 6 & 45 \\ 0 & 0 & -9 & -54 \end{array}\right)$$

Lösung: $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$.

Ergebnis: Es können 4 ME von E_1, 3 ME von E_2 und 6 ME von E_3 hergestellt werden.

Produktionsvektor für die Endprodukte: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

LGS in Matrixschreibweise: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_{RE} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 27 \\ 35 \\ 40 \end{pmatrix}$

Man unterscheidet folgende Vektoren:

Verbrauchsvektor für die Rohstoffe: $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$

Produktionsvektor bzw. Verbrauchsvektor für die **Zwischenprodukte**: $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

Produktionsvektor für die **Endprodukte**: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Beachten Sie:

Verbrauchsvektoren besagen, wie viel ME an Rohstoffen bzw. Zwischenprodukten benötigt werden.
Produktionsvektoren besagen, wie viel ME an Zwischenprodukten bzw. Endprodukten hergestellt werden.

Beispiel

Ein Betrieb fertigt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3. Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sind gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Wie viele Zwischenprodukte werden benötigt, um 6 ME von E_1, 7 ME von E_2 und 5 ME von E_3 herzustellen?

b) Wie viel Endprodukte können aus 34 ME Z_1, 26 ME von Z_2 und 30 ME von Z_3 hergestellt werden?

c) Wie viel Rohstoffe braucht man zur Herstellung von 12 ME von E_1, 10 ME von E_2 und 12 ME von E_3?

Lösung

a) Die Matrix B gibt an, wie viel ME an Zwischenprodukten für die Herstellung von je einer ME der Endprodukte gebraucht werden.
Für die Produktion von **je einer ME E_1** braucht man 2 ME Z_1,
je einer ME E_2 braucht man 1 ME Z_1,
je einer ME E_3 braucht man 1 ME Z_1.
Für die Produktion von 6 ME von E_1, 7 ME von E_2 und 5 ME von E_3 braucht man $(2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 5)$ ME Z_1, also **24 ME** Z_1.
Für die Produktion von 6 ME von E_1, 7 ME von E_2 und 5 ME von E_3 braucht man $(1 \cdot 6 + 0 \cdot 7 + 2 \cdot 5)$ ME Z_2, also **16 ME** Z_2.
Für die Produktion von 6 ME von E_1, 7 ME von E_2 und 5 ME von E_3 braucht man $(0 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 3 \cdot 5)$ ME Z_3, also **22 ME** Z_3.
Ergebnis: Es werden 24 ME von Z_1, 16 ME von Z_2 und 22 ME von Z_3 benötigt.
D. h., die Multiplikation von B mit dem Produktionsvektor für die Endprodukte $\vec{x}$ ergibt den Verbrauchsvektor für die Zwischenprodukte $\vec{z}$.
In Matrixschreibweise: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix}$ bzw. $B \cdot \vec{x} = \vec{z}$.

b) Für die Produktion von **je einer ME E_1** braucht man 2 ME Z_1,
je einer ME E_2 braucht man 1 ME Z_1,
je einer ME E_3 braucht man 1 ME Z_1.

Für die Produktion von x_1 ME von E_1, x_2 ME von E_2 und x_3 ME von E_3
braucht man $2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3$ (in ME) Z_1, insgesamt 34 ME Z_1,
und $1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3$ (in ME) Z_2, insgesamt 26 ME Z_2,
und $0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3$ (in ME) Z_3, insgesamt 30 ME Z_3.

Mit $\mathbf{B} \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{z}}$ erhält man ein lineares Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3.

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= 34 \\ 1 \cdot x_1 + \phantom{1 \cdot x_2 +{}} 2 \cdot x_3 &= 26 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &= 30 \end{aligned}$$

In Matrixform $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 34 \\ 1 & 0 & 2 & 26 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \end{array}\right)$

Auflösung $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 34 \\ 0 & 1 & -3 & -18 \\ 0 & 1 & 3 & 30 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 34 \\ 0 & 1 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & -6 & -48 \end{array}\right)$

Lösung des linearen Gleichungssystems: $x_1 = 10,\ x_2 = 6,\ x_3 = 8$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$
(Produktionsvektor)

Ergebnis: Es können 10 ME von E_1, 6 ME von E_2 und 8 ME von E_3 hergestellt werden.

c) Die Matrix A gibt an, wie viel ME an Rohstoffen für die Herstellung von je einer ME der Zwischenprodukte gebraucht werden.
Die Matrix A · B (= C; Rohstoff-Endprodukt-Matrix) gibt an, wie viel ME an Rohstoffen für die Herstellung von je einer ME der Endprodukte gebraucht werden.

Berechnung des Rohstoffvektors $\vec{r}$ für den Produktionsvektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 17 \\ 5 & 4 & 10 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 338 \\ 220 \\ 128 \end{pmatrix}$$

Man braucht 338 ME R_1, 220 ME R_2 und 128 ME R_3.
Alternative: Berechnung über die Zwischenprodukte

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ 36 \\ 46 \end{pmatrix}$$

Man braucht 46 ME Z_1, 36 ME Z_2 und 46 ME Z_3.

und dafür $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 46 \\ 36 \\ 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 338 \\ 220 \\ 128 \end{pmatrix}$.

Man braucht 338 ME R_1, 220 ME R_2 und 128 ME R_3.

2 Stochastische Übergangsprozesse

2.1 Stochastische Matrix

Eine **stochastische Matrix** als Übergangsmatrix beschreibt die Wahrscheinlichkeiten, mit denen sich ein bestehender Zustand verändert.
Dadurch lassen sich künftige Entwicklungen vorausberechnen.

Beispiel

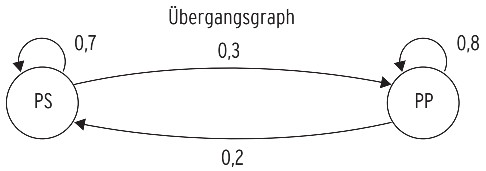
➲ In einem Zweiparteienstaat mit den Parteien PS und PP haben langfristige Beobachtungen des Verhaltens der Bürger bei einer Wahl ergeben, dass 70 % der Wähler von Partei PS und 80 % der Wähler von Partei PP ihrer Partei treu bleiben. Die Wähler von Partei PS wechseln zu 30 % zur Partei PP, während sich umgekehrt 20 % der Wähler von Partei PP bei der folgenden Wahl für die Partei PS entscheiden.

a) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix an.

b) Bei der letzten Wahl erhielt die Partei PS 25 % und Partei PP 75 % aller Stimmen. Bestimmen Sie die zu erwartende Stimmenverteilung nach der nächsten und der übernächsten Wahl.

Lösung

a) **Übergangsgraph:**



Übergangstabelle:

zu \ von	PS	PP
PS	0,7	0,2
PP	0,3	0,8

0,7; 0,3; ... lassen sich als Wahrscheinlichkeiten interpretieren.

Übergangsmatrix:

$A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

stochastische Matrix

Hinweis: Die 1. Spalte bedeutet: 70 % der Wähler von PS wählen wieder PS.
30 % der Wähler von PS wechseln zur Partei PP.

Die Elemente der Hauptdiagonalen von A geben die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Wähler bei der nächsten Wahl wieder die gleiche Partei wählt.
Dieser **Übergangsprozess** ist ein **stochastischer Prozess.**

Beachten Sie:

Eine **stochastische Matrix** A ist **quadratisch** und hat nur **nichtnegative** Elemente.
Die **Summe der Elemente in jeder Spalte** ist 1.

b) Für die Stimmverteilung nach der **nächsten** Wahl gilt:

Für Partei PS: $0{,}7 \cdot 0{,}25 + 0{,}2 \cdot 0{,}75 = 0{,}325$

und für PP: $0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}8 \cdot 0{,}75 = 0{,}675$

Hinweis: Der Startvektor beschreibt die **Anfangsverteilung,** den **Anfangszustand.**

Mit dem Startvektor (Anfangsverteilung) $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}$

erhält man: $A \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}325 \\ 0{,}675 \end{pmatrix} = \vec{x}_1$

Nach der nächsten Wahl hat die Partei PS voraussichtlich 32,5 %, die Partei PP 67,5 % aller Stimmen.

Stimmverteilung nach der **übernächsten** Wahl:

Mit dem Verteilungsvektor $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}325 \\ 0{,}675 \end{pmatrix}$

erhält man: $A \cdot \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}325 \\ 0{,}675 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3625 \\ 0{,}6375 \end{pmatrix} = \vec{x}_2$

Nach der übernächsten Wahl hat die Partei PS voraussichtlich 36,25 %, die Partei PP 63,75 % aller Stimmen.

$$\underset{\vec{x}_0}{\boxed{\text{Anfangszustand}}} \xrightarrow[A \cdot \vec{x}_0]{A} \underset{\vec{x}_1}{\boxed{\text{Zustand 1}}} \xrightarrow[A \cdot \vec{x}_1]{A} \underset{\vec{x}_2}{\boxed{\text{Zustand 2}}}$$

Oder:

Mit dem Startvektor $\vec{x}_0$ erhält man $\vec{x}_2 = A \cdot \vec{x}_1 = A \cdot A \cdot \vec{x}_0$

Mit $A \cdot A = A^2$: $\vec{x}_2 = A^2\, \vec{x}_0$

Berechnung von A^2: $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

Hinweis: Die 1. Spalte bedeutet für die übernächste Wahl: 55 % der Wähler von PS wählen wieder PS. 45 % der Wähler von PS wechseln zur Partei PP.

Mit dem Startvektor: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}$

erhält man $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3625 \\ 0{,}6375 \end{pmatrix}.$

Bei der übernächsten Wahl wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 36,25 % die Partei PS, mit einer Wahrscheinlichkeit von 63,75 % die Partei PP gewählt.

Allgemein gilt:

$$\boxed{\text{Zustand } \vec{x}} \xrightarrow{A} \boxed{\text{Zustand } \vec{y}}$$

Aus Zustand $\vec{x}$ wird mithilfe der Matrix A der Zustand $\vec{y}$: $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$.

Beispiel

➲ In einer Stadt mit den Theatern S und T stellt man durch Befragung folgendes fest: 70 % der Besucher von S kommen beim nächsten Mal wieder, der Rest besucht das Theater T. 60 % der Besucher von T kommen beim nächsten Mal wieder, der Rest geht ins Theater S.

a) Stellen Sie die Übergangsmatrix für diesen Prozess auf.

b) Im Theater S sind heute 100 Besucher, im Theater T 120 Besucher. Bestimmen Sie die voraussichtlichen Besucherzahlen bei der nächsten und der übernächsten Aufführung.

Lösung

Übergangsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

Für die Verteilung beim **nächsten Besuch** gilt

in Theater S: $0{,}7 \cdot 100 + 0{,}4 \cdot 120 = 118$

und in Theater T: $0{,}3 \cdot 100 + 0{,}6 \cdot 120 = 102$

In Matrixschreibweise: $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 118 \\ 102 \end{pmatrix}$

Bei der nächsten Aufführung sind im Theater S 118 und im Theater T 102 Besucher. Die **Gesamtzahl der Besucher** bleibt gleich, da in der Übergangsmatrix jeweils die **Spaltensumme 1** ist.

Besucherzahlen beim zweimaligen Wechsel: $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 118 \\ 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123{,}4 \\ 96{,}6 \end{pmatrix}$

Beim zweimaligen Wechsel sind im Theater S 123 und im Theater T 97 Besucher.

Oder:

Verteilung beim zweimaligen Wechsel:

Aus $\vec{x}_2 = A \cdot \vec{x}_1 = A \cdot A \cdot \vec{x}_0$ ergibt sich $\vec{x}_2 = A^2\, \vec{x}_0$.

Berechnung von A^2: $A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}61 & 0{,}52 \\ 0{,}39 & 0{,}48 \end{pmatrix}$

und damit $\begin{pmatrix} 0{,}61 & 0{,}52 \\ 0{,}39 & 0{,}48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123{,}4 \\ 96{,}6 \end{pmatrix}$.

Erläuterung: 0,39 ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Besucher von S bei seinem übernächsten Theaterbesuch das Theater T aufsucht.

Hinweis: Da man für diesen Austauschprozess immer die gleiche Übergangsmatrix verwendet, bezeichnet man die Zustandsfolge $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix}$; $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 118 \\ 102 \end{pmatrix}$; $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 123{,}4 \\ 96{,}6 \end{pmatrix}$; … als **Markowkette**.

Beispiel

➡ In der Nähe von zwei Supermärkten S_1 und S_2 wird ein neuer Supermarkt S_3 eröffnet. Bisher waren die beiden Supermärkte S_1 und S_2 die einzigen großen Einkaufsmärkte in der Umgebung.
S_1 hatte einen Marktanteil von 60 %, S_2 einen Marktanteil von 40 %.
Die Marktforschung rechnet mit folgenden wöchentlichen Kundenwanderungen:
In jeder Woche werden 20 % der bisherigen Kunden von S_1 zu S_3 und 30 % der Kunden von S_2 zu S_3 wechseln. Außerdem werden 10 % der Kunden von S_3 wieder zu S_1 und 10 % zu S_2 wechseln.

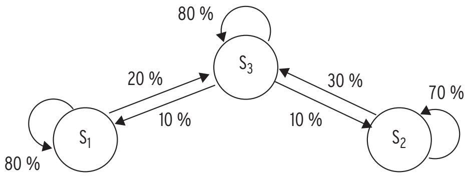
a) Stellen Sie die Kundenwanderung in einem Übergangsgraphen dar.
Erstellen Sie die Übergangsmatrix A, die die Kundenwanderung beschreibt.

b) Berechnen Sie den Marktanteil für jeden der drei Märkte aufgrund der ermittelten Kundenwanderung nach zwei Wochen.

Lösung

a) Unter der **Kundenwanderung** versteht man den Anteil der Kunden, die pro Woche von einem Markt zu einem anderen wechseln.
Der untersuchte Kundenkreis kauft entweder bei S_1 oder S_2 oder S_3 ein.

Das **Übergangsverhalten** lässt sich mithilfe eines Diagramms darstellen:
Übergangsgraph:



Übergangstabelle:

von / nach	S_1	S_2	S_3
S_1	0,8	0	0,1
S_2	0	0,7	0,1
S_3	0,2	0,3	0,8

Übergangsmatrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Erläuterung:
Die 1. Spalte der Matrix A bedeutet, dass 80 % der Kunden von S_1 dem Supermarkt S_1 treu bleiben, niemand von S_1 zu S_2 und 20 % der Kunden von S_1 zu S_3 wechseln.
Die 2. Zeile von A bedeutet, dass kein Kunde von S_1 zu S_2 wechselt, 70 % der Kunden von S_2 weiterhin in ihrem Markt S_2 einkaufen und 10 % von S_3 zum Markt S_2 wechseln.

b) S_1 hatte einen Marktanteil von 60 % und S_2 einen Marktanteil von 40 %, d. h., die **Anfangsverteilung** ist $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Startvektor).

Berechnung der **Verteilung nach der 1. Woche** durch Multiplikation von A mit der Anfangsverteilung:

$$A \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}48 \\ 0{,}28 \\ 0{,}24 \end{pmatrix} = \vec{x}_1$$

Marktanteil für jeden der drei Märkte nach einer Woche:
48 % für Markt S_1, 28 % für Markt S_2 und 24 % für Markt S_3.

Für die **Marktanteile nach der 2. Woche** gilt:

$$A \cdot \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}48 \\ 0{,}28 \\ 0{,}24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}408 \\ 0{,}22 \\ 0{,}372 \end{pmatrix} = \vec{x}_2$$

Marktanteil für jeden der drei Märkte nach zwei Wochen:
40,8 % für Markt S_1, 22 % für Markt S_2 und 37,2 % für Markt S_3.
Die Kundenverteilung der aktuellen Woche erhält man, indem man die Kundenverteilung der Vorwoche mit der Übergangsmatrix A multipliziert:

$$\vec{x}_1 = A \cdot \vec{x}_0$$
$$\vec{x}_2 = A \cdot \vec{x}_1 = A \cdot A \cdot \vec{x}_0 = A^2 \cdot \vec{x}_0$$
$$\vec{x}_3 = A \cdot \vec{x}_2 = A^3 \cdot \vec{x}_0; \ldots$$

d. h., mithilfe von A^2 lässt sich die **Kundenverteilung nach 2 Wochen** berechnen bzw. mithilfe von A^3 lässt sich die **Kundenverteilung nach 3 Wochen** berechnen.

Beispiel (mit Hilfsmittel):

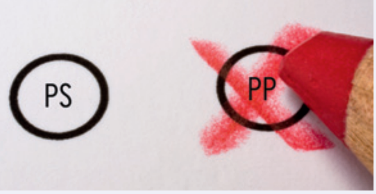
$$\vec{x}_2 = A \cdot \vec{x}_1 = A^2 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}66 & 0{,}03 & 0{,}16 \\ 0{,}02 & 0{,}52 & 0{,}15 \\ 0{,}32 & 0{,}45 & 0{,}69 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}408 \\ 0{,}22 \\ 0{,}372 \end{pmatrix}$$

$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}408 \\ 0{,}22 \\ 0{,}372 \end{pmatrix}$ ist die Verteilung nach zwei Wochen.

Erläuterungen zu A^2:
Die 1. Spalte der Matrix A^2 bedeutet für die Kundenwanderung in der 2. Woche:
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde von S_1 seinen übernächsten Einkauf
- wieder in S_1 tätigt, beträgt 66 %;
- in S_2 tätigt, beträgt 2 %;
- in S_3 tätigt, beträgt 32 %;
- nicht in S_1 tätigt, beträgt $1 - 0{,}66 = 0{,}34$.

Beispiel



In einem Staat mit den Parteien PS und PP (vgl. S. 87) beschreibt die Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ das Wählerverhalten. Bei der letzten Wahl erhielt die Partei PS 25 % und Partei PP 75 % aller Stimmen.

a) Berechnen Sie A^2 und interpretieren Sie die 2. Spalte.

b) Gibt es eine Stimmenverteilung, die sich reproduziert?

c) Ermitteln Sie, wie viele der Wähler von Partei PS ihrer Partei die Treue halten müssten, wenn Partei PS bei der nächsten Wahl ihren jetzigen Stimmenanteil auf 40 % steigern möchte.

d) Gegeben sind $A^{10} = \begin{pmatrix} 0{,}4006 & 0{,}3996 \\ 0{,}5994 & 0{,}6004 \end{pmatrix}$ und $A^{20} = \begin{pmatrix} 0{,}4000 & 0{,}4000 \\ 0{,}6000 & 0{,}6000 \end{pmatrix}$ (gerundet auf 4 Dezimalen). Interpretieren Sie.

Lösung

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}30 \\ 0{,}45 & 0{,}70 \end{pmatrix}$

0,30 bedeutet: Bei der übernächsten Wahl wählen die Anhänger von PP die Partei PS mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 %.
0,70 bedeutet: Bei der übernächsten Wahl wählen die Anhänger von PP wieder die Partei PP mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %.

b) Für eine Stimmverteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1 + x_2 = 1$, die sich **reproduziert,**

muss gelten: $\vec{x} = A \cdot \vec{x}$

Bedingungen für x_1 und x_2: $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Mit $x_1 + x_2 = 1$, bzw. $x_2 = 1 - x_1$

erhält man: $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix}$

Die Gleichung $0{,}5x_1 + 0{,}2 = x_1$
oder die Gleichung $-0{,}5x_1 + 0{,}8 = 1 - x_1$
hat jeweils die Lösung $x_1 = 0{,}4$.
Einsetzen ergibt: $x_2 = 1 - x_1 = 0{,}6$

Hat die Partei PS 40 % und die Partei PP 60 % aller Stimmen, ändert sich die Stimmenverteilung bei einer Wahl (Übergangsmatrix A) nicht mehr.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$ heißt **Stabilitätsvektor (stationärer Zustand).**

Probe:

$A \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$

c) Der Anteil der Wähler von PS, die ihrer Partei treu bleiben, sei a.
Der Anteil der Wähler von PS, die zur Partei PC wechseln, ist dann $1 - a$.

Stimmenverteilung nach der nächsten Wahl: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$

Mit dem Startvektor $\begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}$ muss gelten: $\begin{pmatrix} a & 0{,}2 \\ 1-a & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$

Ausmultiplizieren ergibt: $0{,}25a + 0{,}15 = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

$0{,}25 - 0{,}25a + 0{,}6 = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

Nur wenn alle Wähler der Partei PS wieder PS wählen, gelingt es Partei PS, bei der nächsten Wahl ihren jetzigen Stimmenanteil auf 40 % zu steigern.

d) Die Matrixpotenzen A^n streben für $n \to \infty$ gegen die Matrix $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Bemerkung: Die **Übergangsmatrix A^n stabilisiert sich** für $n \to \infty$ zur **Grenzmatrix** $G = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.
Diese Matrix beschreibt die **Grenzverteilung** $\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$ (langfristige Verteilung).

Dies bedeutet, dass sich die Wähler zu 40 % für Partei PS und zu 60 % für Partei PP entscheiden. Es gilt also: $\lim\limits_{n \to \infty} A^n = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Die Spaltenvektoren sind alle **gleich** und entsprechen der **stationären Verteilung.**

Beispiele für verschiedene Startvektoren:

$\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$

Hinweis: Jede beliebige Verteilung strebt gegen die stationäre (stabile) Verteilung (siehe Teilaufgabe b)).

Beachten Sie:

Gilt für eine stochastische Matrix A $\lim\limits_{n \to \infty} A^n = G$, so besteht die Matrix G aus lauter

gleichen Spalten: $G = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_n & \cdots & x_n \end{pmatrix}$.

G heißt **Grenzmatrix.**

Der Spaltenvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist ein **Stabilitätsvektor.**

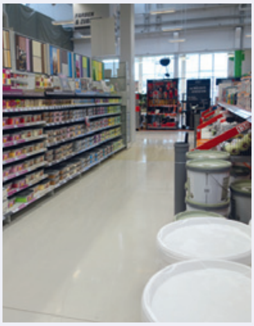
Die stationäre (stabile)Verteilung und die Grenzverteilung stimmen überein.

Berechnung des Stabilitätsvektors

Fixpunktgleichung
$\vec{x} = A \cdot \vec{x}$

Matrixpotenz A^n
$\lim\limits_{n \to \infty} A^n = G$

Beispiel



In der Stadt Wangen gibt es drei Baumärkte B_1, B_2 und B_3 (vgl. S. 92).

Die Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}20 & 0{,}22 \\ 0{,}28 & 0{,}35 & 0{,}32 \\ 0{,}39 & 0{,}45 & 0{,}46 \end{pmatrix}$ beschreibt den Anteil der Kunden, die jeden Monat von Baumarkt B_j zu Baumarkt B_i wechseln.

a) Berechnen Sie eine Verteilung, die sich aufgrund der oben genannten Kundenströme nicht mehr ändert. Wie lautet die zugehörige Grenzmatrix G?

b) Bestimmen Sie die langfristige Verteilung für 5000 Kunden. Ändert sich diese Verteilung, wenn zu Beginn alle Kunden bei B_1 einkaufen?

Lösung

a) Gesucht ist also die Verteilung, die sich durch Multiplikation mit A nicht mehr ändert, die stationäre Verteilung. Der Stabilitätsvektor $\vec{x}$ mit den Eigenschaften $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ und $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ beschreibt diese stabile (stationäre) Verteilung.

Der Ansatz $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ führt mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 - x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

auf $\begin{pmatrix} 0{,}33 & 0{,}20 & 0{,}22 \\ 0{,}28 & 0{,}35 & 0{,}32 \\ 0{,}39 & 0{,}45 & 0{,}46 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 - x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 - x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

Daraus folgt das LGS

$$0{,}33x_1 + 0{,}20x_2 + 0{,}22(1 - x_1 - x_2) = x_1$$
$$0{,}28x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}32(1 - x_1 - x_2) = x_2$$
$$0{,}39x_1 + 0{,}45x_2 + 0{,}46(1 - x_1 - x_2) = 1 - x_1 - x_2$$

Vereinfachung ergibt

$$89x_1 + 2x_2 = 22 \quad (1)$$
$$4x_1 + 97x_2 = 32 \quad (2)$$
$$93x_1 + 99x_2 = 54 \quad (3)$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich $x_1 = 0{,}24$ und $x_2 = 0{,}32$.

Probe in der Gleichung (3) und Einsetzen in $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ergibt $x_3 = 0{,}44$.

Stabilitätsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}24 \\ 0{,}32 \\ 0{,}44 \end{pmatrix}$

Die Verteilung: 24 % aller Kunden kaufen im Baumarkt B_1, 32 % in B_2 und 44 % in B_3, ist die **stationäre Verteilung.**

Die stationäre Verteilung stimmt mit der langfristigen Verteilung überein.
Die Spalten der **Grenzmatrix** stimmen überein und entsprechen der langfristigen Verteilung (dem Stabilitätsvektor) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}24 \\ 0{,}32 \\ 0{,}44 \end{pmatrix}$: $G = \begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}24 & 0{,}24 \\ 0{,}32 & 0{,}32 & 0{,}32 \\ 0{,}44 & 0{,}44 & 0{,}44 \end{pmatrix}$,

3 Zyklische Verteilungen

Beispiel

Bei einer Insektenart vollzieht sich die Entwicklung in einem 3-monatigen Zyklus. Insekten legen durchschnittlich 25 Eier und sterben danach. Aus den Eiern entwickeln sich innerhalb eines Monats 10 % zu Larven. Nur 40 % der Larven überleben den folgenden Monat und entwickeln sich zu Insekten, die wiederum 25 Eier legen.

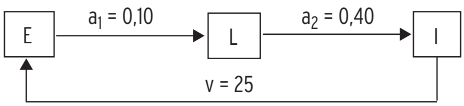
a) Zeichnen Sie ein Entwicklungsdiagramm und geben Sie die Übergangsmatrix an.

b) Wie entwickelt sich eine Startpopulation von 1000 Eiern, 240 Larven und 30 Insekten im Laufe eines Zyklus?

c) Wie entwickelt sich die Population aus b), wenn die Überlebensraten gleich bleiben und
- sich die Vermehrungsrate durch ein günstiges Klima auf 50 erhöht bzw.
- die Vermehrungsrate auf 20 sinkt?

Lösung

a) Entwicklungsdiagramm (Ablaufplan für einen Entwicklungszyklus):



Hinweis: a_1 und a_2 sind **Überlebensraten**, v ist die **Vermehrungsrate.**

Darstellung des Übergangsverhaltens in Tabellenform:

zu \ von	E	L	I
E	0	0	25
L	0,10	0	0
I	0	0,40	0

Erläuterung: Aus Eiern (E) entwickeln sich nur Larven (L), aus L nur Insekten (I), aus I nur E.

Aus der Tabelle erhält man die

Übergangsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 \\ 0{,}10 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}40 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Mit der Startpopulation $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 240 \\ 30 \end{pmatrix}$ erhält man die Population $\vec{x}_1$ **nach einem Monat:**

$$\vec{x}_1 = A \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 \\ 0{,}10 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}40 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 240 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 750 \\ 100 \\ 96 \end{pmatrix}$$

Aus 1000 E entwickeln sich $0{,}10 \cdot 1000 = 100$ L, aus 240 L entwickeln sich $0{,}40 \cdot 240 = 96$ I, 30 I legen $25 \cdot 30 = 750$ E.

Population $\vec{x}_2$ nach **2 Monaten:** $\vec{x}_2 = A \cdot \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2400 \\ 75 \\ 40 \end{pmatrix}$

Population $\vec{x}_3$ nach **3 Monaten:** $\vec{x}_3 = A \cdot \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 240 \\ 30 \end{pmatrix} = \vec{x}_0$

Die Population entwickelt sich **zyklisch.** In einem **Zyklus** von 3 Monaten stellt sich die Startpopulation wieder ein. Ist das Produkt aus Überlebensraten und Vermehrungsrate gleich 1 ($a_1 \cdot a_2 \cdot v = 0{,}10 \cdot 0{,}40 \cdot 25 = 1$), so entwickelt sich die Population zyklisch.

Hinweis: 100 E $\xrightarrow{0{,}10}$ 10 L $\xrightarrow{0{,}40}$ 4 I $\xrightarrow{25}$ 100 E

Erläuterungen: Aus $\vec{x}_2 = A \cdot \vec{x}_1$ folgt mit $\vec{x}_1 = A \cdot \vec{x}_0$: $\vec{x}_2 = A \cdot A \cdot \vec{x}_0 = A^2 \cdot \vec{x}_0$.

Ebenso gilt $\vec{x}_3 = A^3 \cdot \vec{x}_0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 \\ 0{,}10 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}40 & 0 \end{pmatrix};\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}5 \\ 0{,}04 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Bei einem **dreimonatigen** Zyklus gilt $A^3 = E$ (Einheitsmatrix) wegen $a_1 \cdot a_2 \cdot v = 1$.
Das **Produkt aus Überlebensraten und Vermehrungsrate** ist gleich 1.
Daher gilt: $\vec{x}_3 = A^3 \cdot \vec{x}_0 = E \cdot \vec{x}_0 = \vec{x}_0$.

Hinweis: Gilt $A^3 = E$, so reproduziert sich **jede** Population mit der Übergangsmatrix A nach 3 Monaten. A ist eine **zyklische** Matrix.

Jede (Start-) Population, z. B. $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 240 \\ 30 \end{pmatrix}$ oder auch $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 750 \\ 100 \\ 96 \end{pmatrix}$, **reproduziert sich nach drei Monaten.**

c) Mit der neuen Übergangsmatrix **A*** $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}10 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}40 & 0 \end{pmatrix}$ folgt für $\mathbf{A^{*3}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Für die **Population nach 3 Monaten** erhält man $\vec{x}_3 = A^{*3} \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2000 \\ 480 \\ 60 \end{pmatrix}$.

Die Ausgangspopulation verdoppelt sich alle 3 Monate.
Das Wachstum ist **unbegrenzt.**
$a_1 \cdot a_2 \cdot v = 2$ bedeutet eine Vermehrung um 100 %.

Mit der neuen Übergangsmatrix **A**** $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}10 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}40 & 0 \end{pmatrix}$ folgt für $\mathbf{A^{**3}} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Für die **Population nach 3 Monaten** erhält man $\vec{x}_3 = A^{**3} \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 800 \\ 192 \\ 24 \end{pmatrix}$.

Die **Ausgangspopulation** hat sich in 3 Monaten auf 80 % **verringert.**
Die Population **stirbt aus.**
$a_1 \cdot a_2 \cdot v = 0{,}8$ bedeutet eine Abnahme um 20 % in 3 Monaten.

Beachten Sie:

Eine Matrix A heißt **zyklisch,** wenn $A^n = E$ für $n > 1$ ist.
Eine **Populationsentwicklung** wird durch die Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Dabei sind a_1 und a_2 die **Überlebensraten** und v die **Vermehrungsrate.**

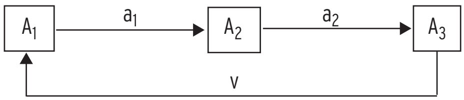
$$\text{Gilt } \begin{cases} a_1 \cdot a_2 \cdot v < 1, & \text{stirbt die Population aus.} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot v = 1, & \text{entwickelt sich die Population zyklisch (Zykluslänge n = 3).} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot v > 1, & \text{nimmt die Population zu.} \end{cases}$$

4 Die Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 \\ 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ beschreibt die jährliche Änderung einer Population.

a) Wie entwickelt sich für b = 0,2 ein Anfangsbestand von $\begin{pmatrix} 300 \\ 250 \\ 40 \end{pmatrix}$ im Laufe von drei Jahren? Interpretieren Sie die Entwicklung.

b) Für welches b reproduziert sich eine beliebige Startpopulation nach 3 Jahren? Für welches b nimmt eine beliebige Startpopulation nach 3 Jahren um 20 % zu?

5 Bei einer Tierart werden drei Altersstufen (Jungtiere A_1, ausgewachsene Tiere A_2 und Alttiere A_3) unterschieden. Das Prozessdiagramm beschreibt die jährlichen Veränderungen einer Population dieser Tierart.



a) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix A für $a_1 = 0{,}5$, $a_2 = 0{,}1$ und $v = 20$. Zeigen Sie, dass A zyklisch ist für n = 3.

b) Bestimmen Sie eine Altersverteilung von insgesamt 310 Tieren, die sich jährlich reproduziert.

c) Die jährliche Entwicklung lässt sich durch die Übergangsmatrix $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 10 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$ beschreiben. Beschreiben Sie den Unterschied zu **a)**.

6 Fischzüchter haben sich über die Entwicklung der Fische informiert und Folgendes in Erfahrung gebracht: Nur die Altfische (A) legen Eier, aus denen sich ein Teil im ersten Jahr zu Jungfischen (J) entwickelt. Jeder Altfisch erzeugt auf diesem Wege im Durchschnitt 45 Jungfische. Aus 10 % der Jungfische werden im zweiten Jahr Fische mittleren Alters (M), der Rest verstirbt oder wird gefressen. Die Überlebensrate der Fische mittleren Alters beträgt 20 %. Diese werden im darauf folgenden Jahr Altfische, die nach der Eiablage abgefischt werden. Die Übergangsmatrix hat die Form $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeichnen Sie ein Übergangsdiagramm mit den entsprechenden Zahlenwerten.

b) Die Züchter setzen im ersten Jahr 5000 Jungfische und 1000 Fische mittleren Alters aus. Bestätigen Sie, dass der Bestand nach drei Jahren aus 4500 Jungfischen, 900 Fischen mittleren Alters und 0 Altfischen besteht.

c) Dieser Bestand (4500 J, 900 M, 0 A) soll als Startpopulation gelten. Ermitteln Sie A^3 für die Fischpopulation und bestimmen Sie mit deren Hilfe den Bestand nach 3 und nach 6 Jahren. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der langfristigen Entwicklung der Population.

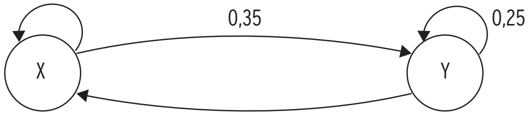
d) Nach einigen Jahren befinden sich 3870 Jungfische, 215 Fische mittleren Alters und 86 Altfische im Teich. Ermitteln Sie die Vorjahrespopulation.

e) Die Vermehrungsrate v der Altfische soll gesteigert werden. Ermitteln Sie, bei welcher Vermehrungsrate v die Startpopulation im 3-Jahres-Zyklus stabil bleiben würde.

f) Die Übergangsmatrix hat sich geändert zu $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 45 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. Erläutern Sie.

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

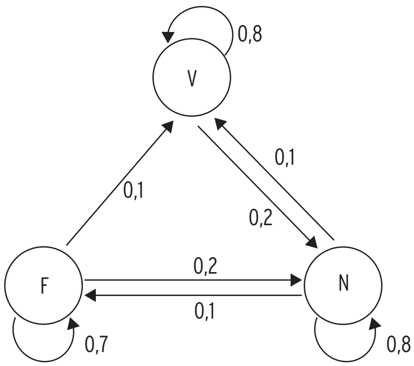
1 Vervollständigen Sie das Diagramm. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix.



2 Gegeben ist die Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

Zeichnen Sie einen Übergangsgraph. Bestimmen Sie die Verteilung $\vec{x}_1$ für den Startvektor $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 200 \end{pmatrix}$.

3 Die Bewohner einer Stadt können zwischen drei Frisörsalons F, N und V wählen. Der nebenstehende Graph gibt das Wahlverhalten der Bewohner von einem Besuch zum nächsten an.
Es soll davon ausgegangen werden, dass die Gesamtanzahl der Frisörbesuche konstant bleibt.



a) Geben Sie die in der zugehörigen Übergangsmatrix A fehlenden Werte an:

$$A = \begin{pmatrix} \square & 0{,}1 & \square \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ \square & 0{,}1 & \square \end{pmatrix}$$

b) Geben Sie den Wert d der Matrix $A^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ an.
Interpretieren Sie diesen Wert.

4 Die Populationsentwicklung einer Tierart wird durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben.

a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und beschreiben Sie diesen Graphen aus biologischer Sicht.

b) Zeigen Sie, dass es eine Population gibt, die sich jährlich wiederholt.
Bestimmen Sie die Altersverteilung in dieser stationären Population, wenn sie insgesamt 2600 Tiere umfasst.

ANHANG

Musteraufgaben für das Abitur

Teil 1 (ohne Hilfsmittel) Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Hinweis: Teil 1 (ohne Hilfsmittel) Aufgabe 4 umfasst 5 bis 8 Punkte.

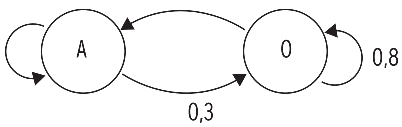
Beispiel 1 Punkte

4.1 Anna, Biggi und Chris schicken sich öfter SMS-Nachrichten. In der letzten Woche schrieb Anna an Biggi 58 und an Chris 42 SMS, Biggi schrieb 62 an Anna und 38 an Chris. Chris schrieb an Anna und Biggi jeweils 50 SMS. 4
Stellen Sie die SMS-Kontakte grafisch dar.
Begründen Sie, dass in der Hauptdiagonale der Matrix, die die Häufigkeit der SMS-Kontakte wiedergibt, stets 0 steht.

4.2 A, B und X sind 3×3-Matrizen. Bei welchen der folgenden Terme kann X ausgeklammert werden? 4
(1) $A \cdot X + X$
(2) $X \cdot A + B \cdot X$
In manchen Fällen kann man die Gleichung $A \cdot X + 2X = B$ nicht nach X umstellen. Geben Sie dafür eine mögliche Matrix A an.

Beispiel 2 Punkte

4.1 Die Kunden eines Getränkemarktes kaufen wöchentlich eine der beiden Fruchtsaftspezialitäten Apfelsaft (A) oder Orangensaft (O). Das Übergangsdiagramm beschreibt das Kaufverhalten der Kunden von einer Woche zur folgenden Woche. 4



Man nimmt an, dass sich das Kaufverhalten auf Dauer nicht verändert.

Geben Sie die vollständige Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} \square & \square \\ 0{,}3 & \square \end{pmatrix}$ an.
Erläutern Sie die Bedeutung der Elemente der Hauptdiagonale von M^2.

4.2 Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$. 3
Lösen Sie die Matrizengleichung $(E - A)\vec{x} = \vec{0}$.
E ist hierbei die zugehörige Einheitsmatrix.