Scholtyssek

Analysis leicht gemacht!

Teil 2: Integralrechnung der ganzrationalen Funktion

- mit über 100 Aufgaben
- mit über 100 durchgerechneten Lösungen
- fit für die Fachhochschulreife

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:
Hanspeter Scholtyssek

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen.

Coverbild: © Andres Rodriguez – Fotolia.com

* * * * *

1. Auflage 2014

Gesamtherstellung:

MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-**1074-0**

1. Was man zuvor wissen sollte

GTR: Alle screenshots sowie Tastenkombinationen beziehen sich auf den Sharp 9900. Bei der Fertigstellung dieses Arbeitsheftes erschien der Sharp 9950 – ein GTR in neuem Gewand, aber fast identisch mit dem Sharp 9900 SII. Sein Erscheinungsbild ist schwarz – weiß mit progressiv wirkender Tastatur. Im CALC – Menü ist der Menüpunkt 8 $\int$ dx neu hinzugekommen. Durch Eingabe einer unteren und einer oberen Grenze wird das zu berechnende Flächenstück dunkel ausgefüllt. Weiterhin ist wie beim 9900 SII die PRGM–Taste mit diversen Integralmodi bestückt – sie sind selbsterklärend. Da bei der Drucklegung noch kein PC – Link – Kabel für screenshots vorlag, sind diese neuen features hier nicht dokumentiert. Sie sind, wie oben erwähnt, selbsterklärend. Ansonsten sind alle Bildschirmmasken und Tastaturbelegungen identisch geblieben.

Exakte Zahlen: Siehe Teil 1, Seite 7

Geraden: Siehe Teil 1, Seite 18 – 25. Besonders wichtig sind die senkrechten Geraden von der Form x = a. Sie verlaufen parallel zur y-Achse im Abstand a.

Flächeneinheiten (FE) werden im allgemeinen nicht angegeben. Da das Koordinatensystem in Zentimeter unterteilt ist, ergibt sich als Maßeinheit für Flächen praktisch immer cm^2.

Ergebnisse werden in der Regel mit 4 Nachkommastellen angegeben. Ausnahme: Prozentrechnung.

Überhaupt sollte Kapitel 1 von Teil1 verstanden worden sein.

1.1 Prozentrechnen

Mit der Integralrechnung werden Flächen berechnet. Fragen wie diese müssen beantwortet werden:

Um wieviel Prozent ist die Fläche A größer als die Fläche B?

Oder umgekehrt:

Um wieviel Prozent ist die Fläche B kleiner als die Fläche A?

Formeln: G sei die große Fläche, k sei die kleine Fläche.

Formel für „größer“:

$$p = \frac{G - k}{k} \cdot 100$$

Formel für „kleiner“:

$$p = \frac{k - G}{G} \cdot 100$$

Beispiel 1:

Große Fläche A = 5; kleine Fläche B = 3.

also $p = \frac{5 - 3}{3} \cdot 100 = 66{,}67\%$ bzw. $p = \frac{3 - 5}{5} \cdot 100 = -40\%$

Das Minuszeichen zeigt an, dass nach einer Verkleinerung gefragt wurde.

Dann ist A um 66,67% größer als B bzw. B ist um 40% kleiner als A.

Beispiel 2:

Große Fläche A = 200; kleine Fläche B = 50.

$p = \frac{200 - 50}{50} \cdot 100 = 300$ $p = \frac{50 - 200}{200} \cdot 100 = -75$

A ist um 300% größer als B, A ist das 4fache von B.

B ist um 75% kleiner als A, B ist $\frac{1}{4}$ von A.

Aus einer Autozeitung. Bestätige die Richtigkeit der folgenden Prozentzahlen.

Modell	Zulassungen 2012	Zulassungen 2013	Veränderung
A	27 995	22 242	- 20,6%
B	14 801	16 015	+ 8,2%
C	4 175	10 896	+ 161,0%
D	1 798	1 786	- 0,7%
E	4 772	7 012	+ 46,9%
F	2 058	1 646	- 20,0%
G	705	2 035	+ 188,7%
H	714	930	+ 30,3%
J	937	862	- 8,0%
K	3 204	1 801	- 43,8%
L	1 429	1 019	- 28,7%
M	1 526	9 058	+ 493,6%
N	1 800	1 244	- 30,9%
O	333	2 299	+ 590,4%

Beachte: 100% sind das Doppelte

200% sind das Dreifache

300% das Vierfache.

Somit haben sich die Zulassungszahlen beim Modell O von ungefähr 600% fast versiebenfacht. Probe: $333 \cdot 7 = 2\,331 \approx 2\,299$

$20\% = \frac{1}{5}$. Somit sind die Zulassungen beim Modell F um $\frac{1}{5}$ zurückgegangen. Probe:

$\frac{1}{5}$ von 2 058 = 412; 2 058 – 1 646 = 412

2. Stammfunktionen

Mit Stammfunktionen werden Integrale berechnet. Stammfunktionen werden mit großen Buchstaben bezeichnet wie F(x), G(x) usw. Sie werden durch das sogenannte **Aufleiten** gebildet. Die abgeleitete Stammfunktion ergibt wieder die Ausgangsfunktion. Jede Funktion hat unendlich viele Stammfunktionen, die sich nur durch eine additive Konstante C unterscheiden.

Für **ganzrationale Funktionen** gilt $(n \in \mathbb{Z})$:

Funktion:	Stammfunktion:	Probe:
$\mathbf{f(x) = x^n}$	$\mathbf{F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ \ n \neq -1}$	$\mathbf{F'(x) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n = f(x)}$ Die additive Konstante fällt beim Ableiten weg.

Beispiele:

$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$	$F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$
$f(x) = 5x^4 - 8x^3$	$F(x) = 5 \cdot \frac{x^5}{5} - 8 \cdot \frac{x^4}{4} + C$ $= x^5 - 2x^4 + C$	$F'(x) = 5x^4 - 8x^3$
$f(x) = 6 = 6x^0$	$F(x) = 6 \cdot \frac{x^1}{1} + C = 6x + C$	$F'(x) = 6$

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{3}x - 2$ $\qquad F(x) = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{6} - 2x + C$

$F'(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{3}x - 2$

$f(x) = -x^{-3} - x^{-2}$	$F(x) = \frac{x^{-2}}{2} + x^{-1} + C$	$F'(x) = -x^{-3} - x^{-2}$

Aufgabe 2a

Ermittle für die folgenden Funktionen eine Stammfunktion. Überprüfe diese durch Ableiten!

a) $f(x) = 2x - 3$ F(x) =

denn F´(x) =

b) $f(x) = 3x^2 + 2x$ F(x) =

denn F´(x) =

c) $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$ F(x) =

denn F´(x) =

d) $f(x) = 4x^5 - 8x^3 + 2$ F(x) =

denn F´(x) =

e) $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{7}x^3$ F(x) =

denn F´(x) =

f) $f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^2$ F(x) =

denn F´(x) =

g) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x$ F(x) =

denn F´(x) =

h) $f(x) = -x^4 + 4x^2$ F(x) =

denn F´(x) =

Aufgabe 2b

Beispiel 1: Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x - 3$. Welche Stammfunktion $F(x)$ verläuft durch $P(1| - 2)$?

$F(x) = x^2 - 3x + C$ beschreibt unendlich viele Stammfunktionen der Funktion $f(x)$, die sich nur durch die additive Konstante C unterscheiden, z.B.

$F(x) = x^2 - 3x + 17$ oder $F(x) = x^2 - 3x - 13$ oder $F(x) = x^2 - 3x + \sqrt{7}$.

Es gibt aber **genau eine**, die durch den Punkt $P(1| - 2)$ geht:

x – Wert 1 und y – Wert -2 in die allgemeine Stammfunktion $F(x) = x^2 - 3x + C$ einsetzen:

$-2 = 1^2 - 3 \cdot 1 + C$

$-2 = -2 + C$

$C = 0$

Die Stammfunktion $F(x) = x^2 - 3x$ geht durch den Punkt $P(1| - 2)$.

Beispiel 2: Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x - 3$. Welche Stammfunktion $F(x)$ verläuft durch $P(2 | 4)$?

$F(x) = x^2 - 3x + C$

$4 = 4 - 6 + C$

$4 = -2 + C$

$C = 6$

Die Stammfunktion $F(x) = x^2 - 3x + 6$ geht durch den Punkt $P(2 | 4)$.

a) $f(x) = 2x - 3$ Welche Stammfunktion $F(x)$ verläuft durch $P(3 | 6)$?

b) $f(x) = 3x^2 + 2x$ Welche Stammfunktion F(x) verläuft durch P(2 | - 5)?

c) $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$ Welche Stammfunktion F(x) verläuft durch P(1 | 12)?

d) $f(x) = 4x^5 - 8x^3 + 2$ Welche Stammfunktion F(x) verläuft durch P(0 | - 3)?

e) $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{7}x^3$ Welche Stammfunktion F(x) verläuft durch P(0 | 2)?

f) $f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^2$ Welche Stammfunktion F(x) verläuft durch P(- 3 | 32)?

g) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x$ Welche Stammfunktion F(x) verläuft durch P(- 2 | - 6)?

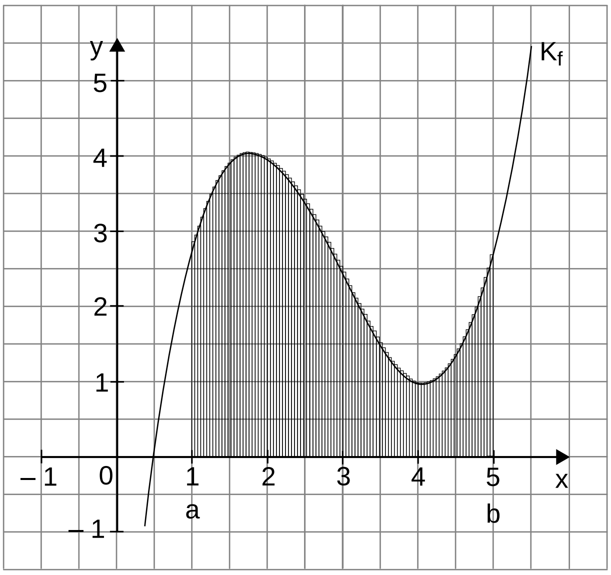
h) $f(x) = -x^4 + 4x^2$ Welche Stammfunktion F(x) verläuft durch P(3 | - 9,6)?

3. Integralrechnung

Ziel der Integralrechnung ist es, krummlinig begrenzte Flächen zu berechnen.

3.1 Fläche zwischen Kurve und x-Achse

Gegeben ist eine Funktion f(x), ihr Schaubild sei K_f.



Es soll die Fläche A zwischen x = a und x = b berechnet werden. Dies geschieht über das Integral:

$A = \int_a^b f(x)dx$

Dabei bedeutet:

a ist der linke Rand der zu berechnenden Fläche (auch **untere Grenze** genannt)

b ist der rechte Rand der zu berechnenden Fläche (auch **obere Grenze** genannt)

Das **Integralzeichen** $\int$ summiert eine unendliche Anzahl hauchdünner Rechtecke der Höhe f(x) und der Minimalbreite dx auf.

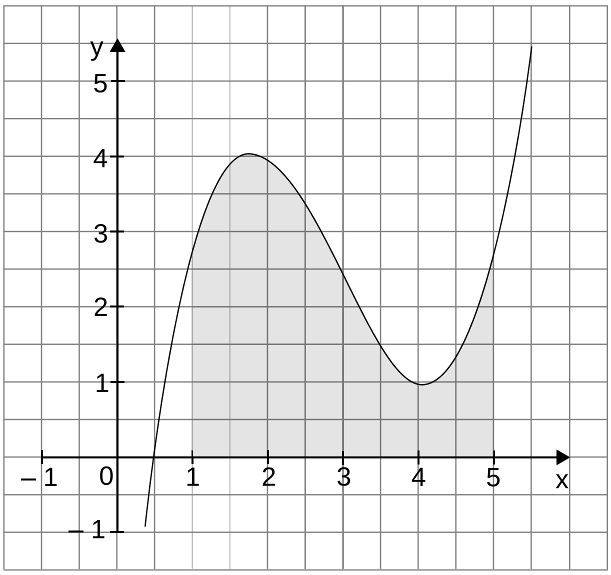
Die eigentliche Rechnung geschieht über die **Stammfunktion F(x)**. Zuerst wird die Variable x durch die obere Grenze b ersetzt, anschließend durch die untere Grenze a. Dann werden beide Ausdrücke subtrahiert:

$A = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, wobei $F'(x) = f(x)$.

Dies ist der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (HDI). Der mathematische Hintergrund wird im **Anhang B** erklärt.

Beispiel:

Gegeben ist die **Funktion** $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{23}{2}x - 5$.



Sie hat als **Stammfunktion** $F(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{23}{4}x^2 - 5x + C$

Es soll die Fläche A zwischen Kurve und x-Achse von x = 1 bis x = 5 berechnet werden:

$$A = \int_1^5 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{23}{2}x - 5\right) dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{23}{4}x^2 - 5x + C\right]_1^5$$

$$= \left(\frac{1}{8}\cdot 5^4 - \frac{3}{2}\cdot 5^3 + \frac{23}{4}\cdot 5^2 - 5\cdot 5 + C\right) - \left(\frac{1}{8}\cdot 1^4 - \frac{3}{2}\cdot 1^3 + \frac{23}{4}\cdot 1^2 - 5\cdot 1 + C\right)$$

$$= \left(9\tfrac{3}{8} + C\right) - \left(- \frac{5}{8} + C\right) = 9\tfrac{3}{8} + \frac{5}{8} = 10 \text{ (FE)}$$

Anmerkung: Wie man sofort sieht, hebt sich die additive Konstante C auf. Deswegen wird sie weggelassen:

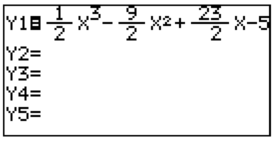
$$A = \int_1^5 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{23}{2}x - 5 \right) dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{23}{4}x^2 - 5x \right]_1^5$$

$$= \left(\frac{1}{8}\cdot 5^4 - \frac{3}{2}\cdot 5^3 + \frac{23}{4}\cdot 5^2 - 5\cdot 5\right) - \left(\frac{1}{8}\cdot 1^4 - \frac{3}{2}\cdot 1^3 + \frac{23}{4}\cdot 1^2 - 5\cdot 1\right)$$

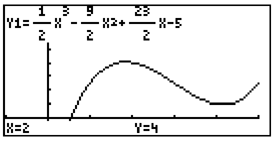
$$= 9\frac{3}{8} - \left(-\frac{5}{8}\right) = 9\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 10 \text{ (FE)}$$

Berechnung mit dem GTR:

Funktion eingeben

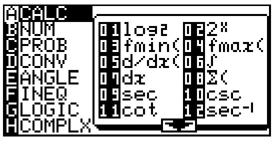


ggf. Schaubild betrachten

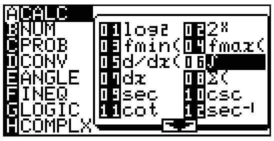


Rechenfeld 

drücken

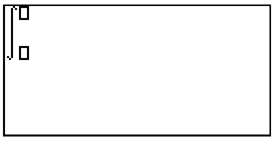


Integral anwählen

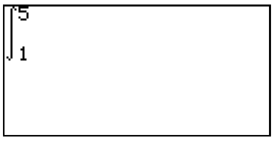


Mit 

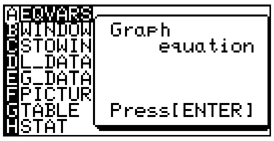
übernehmen



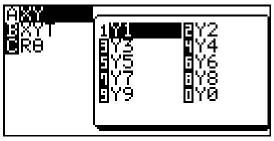
Grenzen eingeben

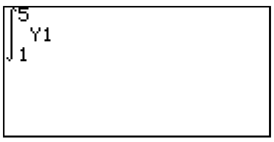


Mit 

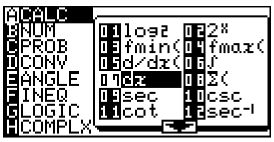


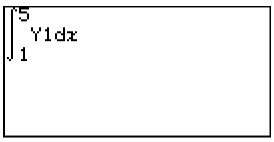
Funktion anwählen

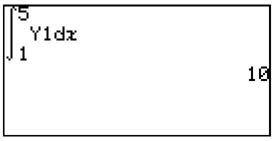




dx anwählen







… und das Ergebnis steht: A = 10.

Aufgabe 3

Gegeben sind die Schaubilder einer Funktion f und ihrer Stammfunktion F.

1. $f(x) = 3x^2 + 1$

$F(x) = x^3 + x + C$

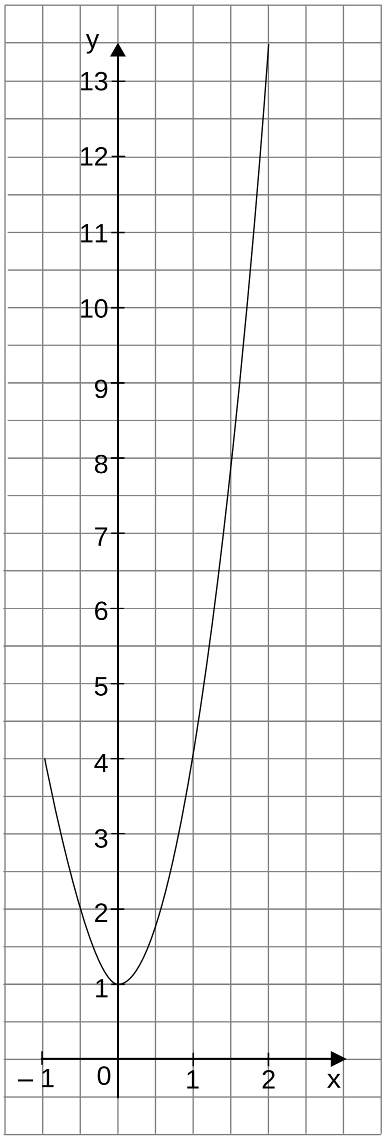


Schaubild von f(x)

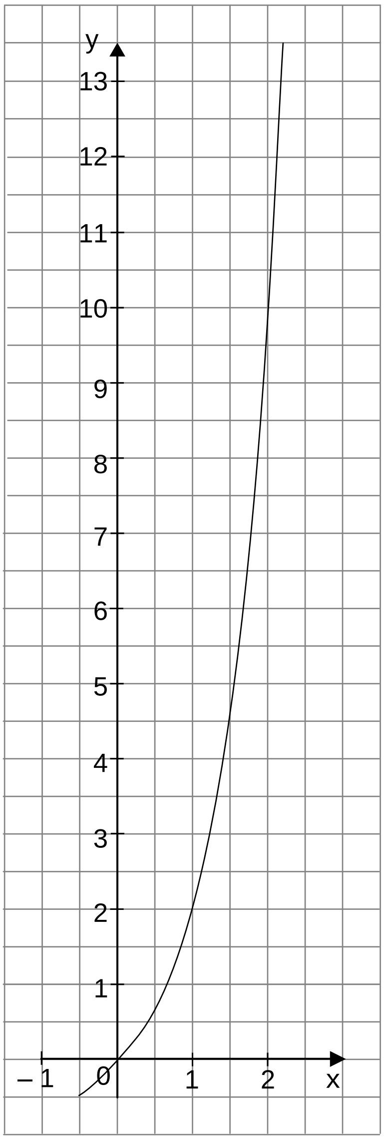


Schaubild von F(x)