Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik am BSW Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

* * * * * * * * * *

1. Auflage 2022

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0339-01-DS

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band „Mathematik für berufliche Gymnasien – Jahrgangsstufen 1 und 2“ ist ein Lehr- und Arbeitsbuch für alle beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg für das grundlegende Anforderungsniveau (gA).
Das Lehrbuch richtet sich exakt nach dem neuen Bildungsplan für die gymnasiale Oberstufe, Mathematik, in Baden-Württemberg, der am 01. 08. 2021 in Kraft getreten ist.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam sowohl die im Lehrplan geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen (modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

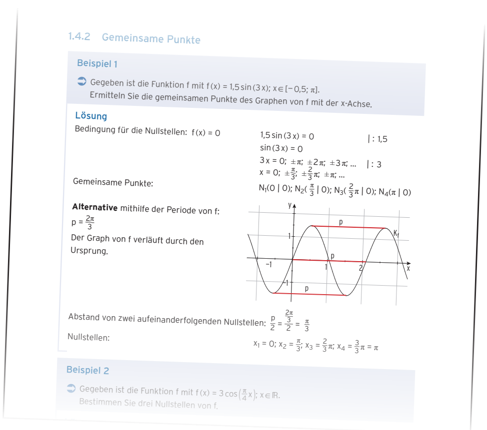
Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die im Bildungsplan aufgeführten Kompetenzen und Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.


1.4.2 Gemeinsame Punkte

Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1{,}5\sin(3x)$; $x \in [-0{,}5; \pi]$.
Ermitteln Sie die gemeinsamen Punkte des Graphen von f mit der x-Achse.

Lösung

Bedingung für die Nullstellen: $f(x) = 0$

$1{,}5\sin(3x) = 0 \quad |:1{,}5$
$\sin(3x) = 0$
$3x = 0;\ \pm\pi;\ \pm 2\pi;\ \pm 3\pi;\ \ldots \quad |:3$
$x = 0;\ \pm\frac{\pi}{3};\ \pm\frac{2}{3}\pi;\ \pm\pi;\ \ldots$

Gemeinsame Punkte: $N_1(0 \mid 0)$; $N_2(\frac{\pi}{3} \mid 0)$; $N_3(\frac{2}{3}\pi \mid 0)$; $N_4(\pi \mid 0)$

Alternative mithilfe der Periode von f:
$p = \frac{2\pi}{3}$
Der Graph von f verläuft durch den Ursprung.

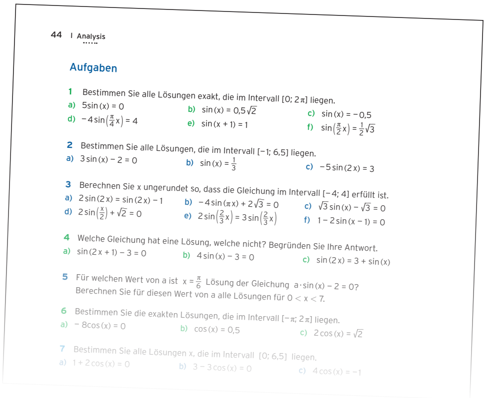
Abstand von zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen: $\frac{p}{2} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{\pi}{3}$; $x_3 = \frac{2}{3}\pi$; $x_4 = \frac{3}{3}\pi = \pi$

Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$; $x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie drei Nullstellen von f.

Jede Lerneinheit schließt mit einer ausreichenden Anzahl von **Aufgaben** ab. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Aufgaben aus dem Alltag, aus der Wirtschaft und der Technik stellen einen praktischen Bezug her. Eine Differenzierung der Aufgaben ist durch Farben gegeben:
grün: Lösung ohne Hilfsmittel
blau: keine Vorgabe zur Lösung


44 I Analysis

Aufgaben

1 Bestimmen Sie alle Lösungen exakt, die im Intervall $[0; 2\pi]$ liegen.
a) $5\sin(x) = 0$ b) $\sin(x) = 0{,}5\sqrt{2}$ c) $\sin(x) = -0{,}5$
d) $-4\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 4$ e) $\sin(x+1) = 1$ f) $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

2 Bestimmen Sie alle Lösungen, die im Intervall $[-1; 6{,}5]$ liegen.
a) $3\sin(x) - 2 = 0$ b) $\sin(x) = \frac{1}{3}$ c) $-5\sin(2x) = 3$

3 Berechnen Sie x ungerundet so, dass die Gleichung im Intervall $[-4; 4]$ erfüllt ist.
a) $2\sin(2x) = \sin(2x) - 1$ b) $-4\sin(\pi x) + 2\sqrt{3} = 0$ c) $\sqrt{3}\sin(x) - \sqrt{3} = 0$
d) $2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{2} = 0$ e) $2\sin\left(\frac{2}{3}x\right) = 3\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$ f) $1 - 2\sin(x-1) = 0$

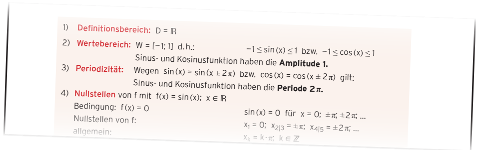
4 Welche Gleichung hat eine Lösung, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.
a) $\sin(2x+1) - 3 = 0$ b) $4\sin(x) - 3 = 0$ c) $\sin(2x) = 3 + \sin(x)$

5 Für welchen Wert von a ist $x = \frac{\pi}{6}$ Lösung der Gleichung $a \cdot \sin(x) - 2 = 0$?
Berechnen Sie für diesen Wert von a alle Lösungen für $0 < x < 7$.

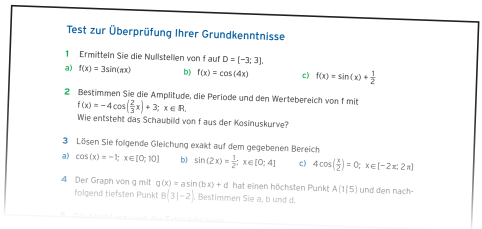
6 Bestimmen Sie die exakten Lösungen, die im Intervall $[-\pi; 2\pi]$ liegen.
a) $-8\cos(x) = 0$ b) $\cos(x) = 0{,}5$ c) $2\cos(x) = \sqrt{2}$

7 Bestimmen Sie alle Lösungen x, die im Intervall $[0; 6{,}5]$ liegen.
a) $1 + 2\cos(x) = 0$ b) $3 - 3\cos(x) = 0$ c) $4\cos(x) = -1$

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.


1) Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
2) Wertebereich: $W = [-1; 1]$ d.h.: $-1 \le \sin(x) \le 1$ bzw. $-1 \le \cos(x) \le 1$
Sinus- und Kosinusfunktion haben die **Amplitude 1.**
3) Periodizität: Wegen $\sin(x) = \sin(x \pm 2\pi)$ bzw. $\cos(x) = \cos(x \pm 2\pi)$ gilt:
Sinus- und Kosinusfunktion haben die **Periode 2π.**
4) Nullstellen von f mit $f(x) = \sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$
Bedingung: $f(x) = 0$ $\sin(x) = 0$ für $x = 0; \pm\pi; \pm 2\pi; \ldots$
Nullstellen von f: $x_1 = 0$; $x_{2|3} = \pm\pi$; $x_{4|5} = \pm 2\pi$; …
allgemein: $x_k = k \cdot \pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Die Aufgaben **„Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse“** sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Sie werden im Anhang ausführlich gelöst.


Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

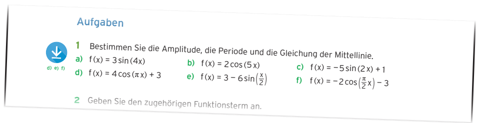
1 Ermitteln Sie die Nullstellen von f auf $D = [-3; 3]$.
a) $f(x) = 3\sin(\pi x)$ b) $f(x) = \cos(4x)$ c) $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}$

2 Bestimmen Sie die Amplitude, die Periode und den Wertebereich von f mit
$f(x) = -4\cos\left(\frac{2}{3}x\right) + 3$; $x \in \mathbb{R}$.
Wie entsteht das Schaubild von f aus der Kosinuskurve?

3 Lösen Sie folgende Gleichung exakt auf dem gegebenen Bereich
a) $\cos(x) = -1$; $x \in [0; 10]$ b) $\sin(2x) = \frac{1}{2}$; $x \in [0; 4]$ c) $4\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$; $x \in [-2\pi; 2\pi]$

4 Der Graph von g mit $g(x) = a\sin(bx) + d$ hat einen höchsten Punkt $A(1|5)$ und den nachfolgend tiefsten Punkt $B(3|-2)$. Bestimmen Sie a, b und d.

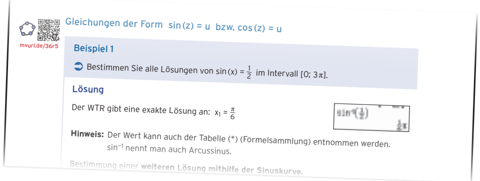
Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Webseite https://www. merkur-verlag.de.


Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Amplitude, die Periode und die Gleichung der Mittellinie.
a) $f(x) = 3\sin(4x)$ b) $f(x) = 2\cos(5x)$ c) $f(x) = -5\sin(2x) + 1$
d) $f(x) = 4\cos(\pi x) + 3$ e) $f(x) = 3 - 6\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ f) $f(x) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 3$

2 Geben Sie den zugehörigen Funktionsterm an.

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Im Buch wird **Geogebra** in vielfältiger Weise, zur Erarbeitung von mathematischen Inhalten und zur Lösung von Aufgaben eingesetzt.


Gleichungen der Form $\sin(z) = u$ bzw. $\cos(z) = u$

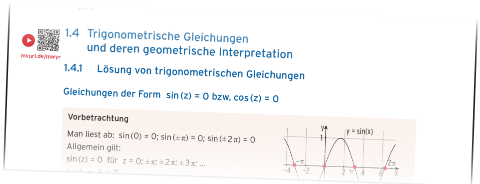
Beispiel 1
Bestimmen Sie alle Lösungen von $\sin(x) = \frac{1}{2}$ im Intervall $[0; 3\pi]$.

Lösung
Der WTR gibt eine exakte Lösung an: $x_1 = \frac{\pi}{6}$

Hinweis: Der Wert kann auch der Tabelle (*) (Formelsammlung) entnommen werden.
$\sin^{-1}$ nennt man auch Arcussinus.

Bestimmung einer weiteren Lösung mithilfe der Sinuskurve

Videos dienen der Veranschaulichung von Problemen und Erläuterung von Lösungswegen. Sie unterstützen die Lernenden beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge.


1.4 Trigonometrische Gleichungen
und deren geometrische Interpretation

1.4.1 Lösung von trigonometrischen Gleichungen

Gleichungen der Form $\sin(z) = 0$ bzw. $\cos(z) = 0$

Vorbetrachtung
Man liest ab: $\sin(0) = 0$; $\sin(\pm\pi) = 0$; $\sin(\pm 2\pi) = 0$
Allgemein gilt:
$\sin(z) = 0$ für $z = 0; \pm\pi; \pm 2\pi; \pm 3\pi; \ldots$

Inhaltsverzeichnis