Mit zugelassener Merkhilfe

Bohner
Ott
Deusch

Formelsammlung für berufliche Gymnasien *Mathematik*

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Umschlag: © frhuynh – Fotolia.com, kleines Bild oben: © Picture-Factory – Fotolia.com, kleines Bild unten: Africa Studio – Fotolia.com

5. Auflage 2016
© 2014 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-**1338-3**

Merkur
Verlag Rinteln

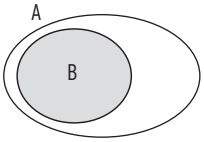
Mengen

$x \in A$: x ist ein **Element** der Menge A

$x \notin A$: x ist kein Element der Menge A

$B \subseteq A$: B ist **Teilmenge** von A:

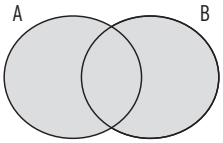
Jedes Element von B ist auch Element von A.



Mengenverknüpfungen

Vereinigungsmenge:

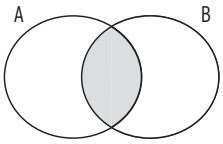
$A \cup B$ (A vereinigt B)



$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$

Schnittmenge:

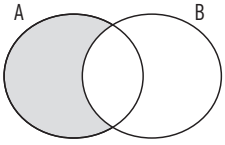
$A \cap B$ (A geschnitten B)



$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$

Differenzmenge:

$A \backslash B$ (A ohne B)



$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$

Zahlenmengen / Intervalle

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}^* = \{1; 2; ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen ohne Null; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \backslash \{0\}$

* ohne Null

$\mathbb{Z} = \{...; -1; 0; 1; 2; ...\}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{N}^*\right\}$ Menge der rationalen Zahlen (Menge der Bruchzahlen)

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{R}^*$ Menge der reellen Zahlen ohne Null ($x \neq 0$); $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

$\mathbb{R}_+$ Menge der nicht negativen reellen Zahlen ($x \geq 0$): $\mathbb{R}_+ = [0; \infty[$

$\mathbb{R}_-$ Menge der nicht positiven reellen Zahlen ($x \leq 0$): $\mathbb{R}_- =]-\infty; 0]$

$\mathbb{R}_-^*$ Menge der negativen reellen Zahlen ($x < 0$): $\mathbb{R}_-^* =]-\infty; 0[= \mathbb{R}_- \backslash \{0\}$

$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ Menge der irrationalen Zahlen: π; $\sqrt{2}$; e; ...

Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Geschlossenes Intervall: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Offenes Intervall: $]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Halboffenes Intervall: $[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

* * * * * * * * * * *

Rechnen mit Brüchen

Erweitern: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ Zähler a und Nenner b ($b \neq 0$) mit der gleichen Zahl $\neq 0$ multiplizieren

Kürzen: $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$ durch die gleiche Zahl $\neq 0$ dividieren.

Addition: Bei **gleichem** Nenner: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$

Zähler addieren, Nenner beibehalten

Bei **verschiedenen** Nennern: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad + cb}{bd}$

Zuerst die Brüche durch Erweitern auf den **gleichen Nenner** bringen.

Multiplikation: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$

Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizieren.

Division: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ $\frac{\frac{a}{b}}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{d}{1}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{d} = \frac{a}{bd}$

Multiplikation mit dem Kehrbruch

Kehrbruch: $\frac{a}{b}$ ist der Kehrbruch von $\frac{b}{a}$ für $a, b \neq 0$.

Terme und Termumformungen

Assoziativgesetz der Addition $a + (b + c) = (a + b) + c$ der Multiplikation $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Distributivgesetz: $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$

$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d)$

Klammern werden von innen nach außen aufgelöst.

Potenzrechnung vor **Punktrechnung** (· ; :) vor **Strichrechnung** (+; −)

Binomische Formeln

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Prozentrechnung

Prozentwert = Grundwert · Prozentsatz $P = G \cdot p\,\%$

P Prozentwert; G Grundwert; Prozentsatz $p\,\% = \frac{p}{100}$

Zinsformel für Tageszinsen: $Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$; Kapital K; Zinssatz $\frac{p}{100}$; Anzahl der Tage t

Zinseszinsformel: $K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

K_0: Anfangskapital; K_n: Kapital nach n Jahren

Promille: $1\,‰ = \frac{1}{1000}$

Potenzen und Logarithmen

Potenz $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ **(n Faktoren a; $n \in \mathbb{N}^*$)** $a^1 = a$

a: Basis (Grundzahl) **n: Exponent (Hochzahl)**

Dabei gilt **für $a \neq 0$:** $a^0 = 1$ $\quad a^{-1} = \frac{1}{a}$ $\quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Wurzeln $(a, b > 0)$

Quadratwurzel:

$$\sqrt[2]{a} = b \Rightarrow a = b^2$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$$

Schreibweise

$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Bemerkung: $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$

Kubikwurzel: $\sqrt[3]{a} = b \Rightarrow b^3 = a$

n-te Wurzel: $\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ mit } n \in \mathbb{N}^*;\ m \in \mathbb{Z}$$

Schreibweise

$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Potenzgesetze $(a, b > 0)$:

Gleiche Basis $\quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Gleiche Hochzahl: $\quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Potenzieren: $\quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Potenzsätze für Wurzeln: $\quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ $\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$$

Potenzsätze für e-Potenzen: $\quad e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ $\quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ $\quad (e^x)^k = e^{kx}$

Logarithmus zur **Basis a** $> 0;\ a \neq 1;\ b > 0$: $\quad a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b)$

zur **Basis e:** $\quad e^x = b \Leftrightarrow x = \ln(b)$

Logarithmengesetze:

Für $a, x, y > 0;\ a \neq 1$ gilt: $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^k) = k \cdot \log_a(x)$$

Sonderfall: $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

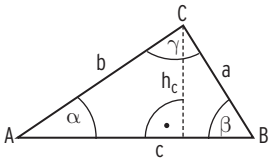
$\ln(x^k) = k \cdot \ln(x)$

Bemerkung: $\log_a(x + y) \neq \log_a(x) + \log_a(y)$ (im Allg.)

Berechnung von beliebigen Logarithmen: $\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$

Dreiecke

Bezeichnungen:



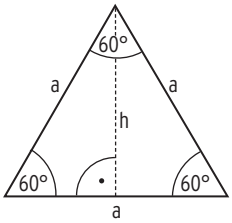
Dreieck:

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{c \cdot h_c}{2}$

Umfang: $U = a + b + c$

Winkelsumme 180°: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

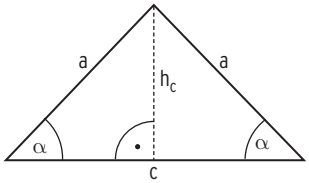
Gleichseitiges Dreieck:



Höhe: $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

Flächeninhalt: $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

Gleichschenkliges Dreieck:

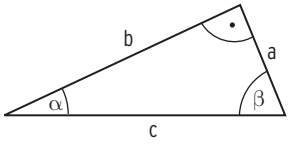


Höhe: $h_c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

Rechtwinkliges Dreieck:

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} a \cdot b$

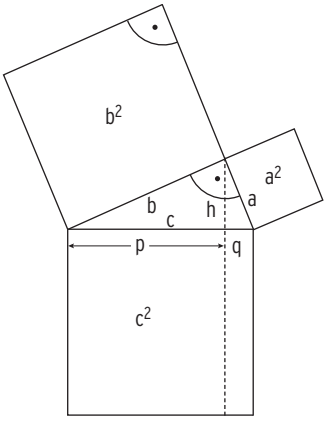


$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$

$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$

$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{a}{b}$

Die Winkelsumme beträgt 180°: $\alpha + \beta = 90°$



Im **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

Satz von Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

Kathetensatz: $a^2 = c \cdot q$

$b^2 = c \cdot p$

Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$