Bohner
Ott
Rosner
Deusch

Arbeitsheft
Mathematik für berufliche Gymnasien

Jahrgangsstufen 1 und 2
Analysis und Stochastik

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Ronald Deusch
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

* * * * * * *

2. Auflage 2017

Gesamtherstellung:
Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Lösungen zu: ISBN 978-3-8120-**1339-0**

I Analysis

1 Differenzialrechnung

1.1 Differenzialquotient und Ableitung

1. Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate auf [a; b].

$f(x) = (x+1)^2$; [0; 2]	$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{9 - 1}{2} = 4$
$f(x) = 6x - 2x^3$; [1; 3]	
$f(x) = 3e^{\frac{1}{2}x}$; [− 1; 2]	
$f(x) = 2\sin(2x)$; [0; $\frac{\pi}{4}$]	
$f(x) = 9$; [− 5; 3]	
$f(x) = x^4 - x^2$; [− 2; 0]	

2. Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate in x_0.

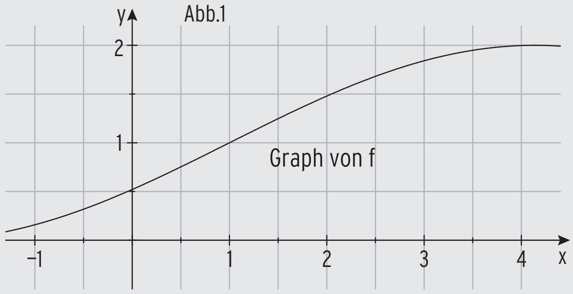
$f(x) = x^2 + 2;\ x_0 = 2$	$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 + 2 - 6}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$ $h + 4 \rightarrow 4$ für $h \rightarrow 0$ $m_t = f'(2) = 4$
$f(x) = 6x^2 - 2$; $x_0 = 1$	
$f(x) = x^2 - x$; $x_0 = 0$	

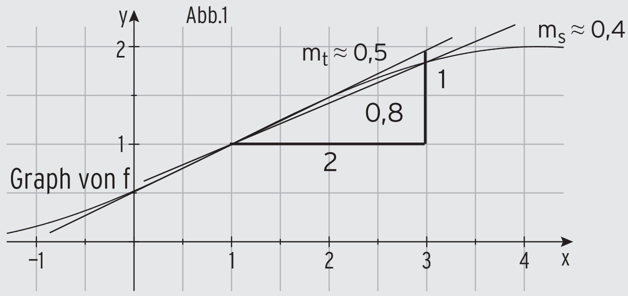
3. Für eine Funktion f gilt folgende Bedingung. Welche Aussagen lassen sich daraus für das Schaubild K von f treffen?

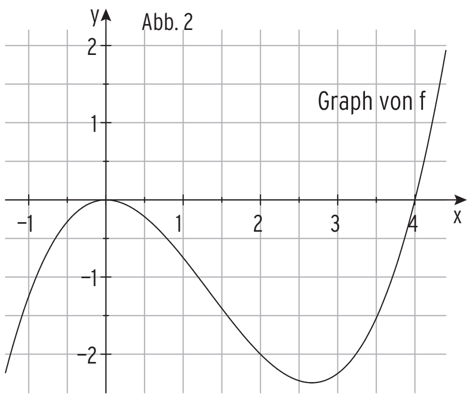
$f'(2) = -3$	K hat in x = 2 die Steigung − 3.
$f'(4) = 0$	
$f'(x) > 0;\ x \in \mathbb{R}$	
$f(-1) = 0$	
$f(4) < 0$	
$f'(-2) = -1$	
$f(3) = 4 \underset{\text{und}}{\wedge} f'(3) = 0$	
$f'(x) = 1$	

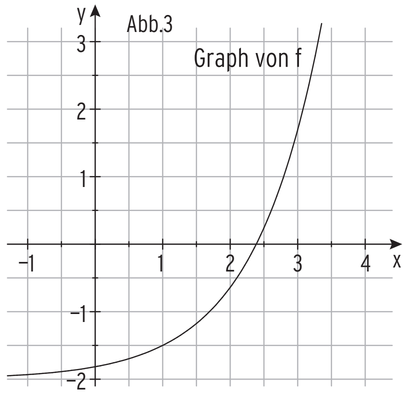
4. Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate von f auf [1; 3] und die momentane Änderungsrate in $x_0 = 1$ mithilfe der Abbildung.

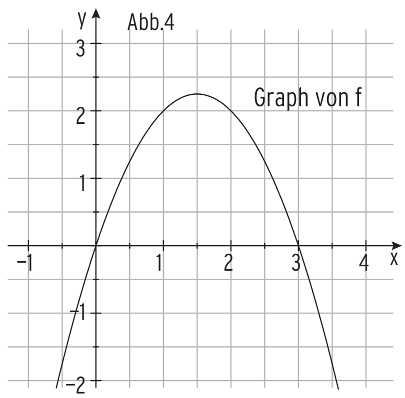
Lösung:





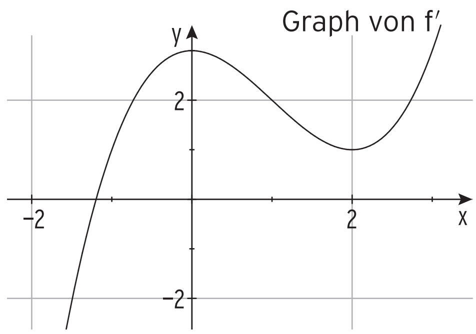


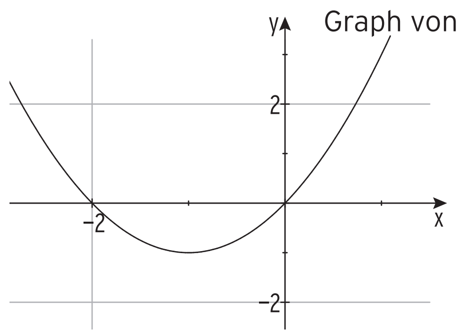




$m_s =$	$m_s =$	$m_s =$
$m_t =$	$m_t =$	$m_t =$

5. Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion einer Funktion f. Beantworten Sie folgende Fragen über das Schaubild K von f.
   a) An welchen Stellen hat K eine waagrechte Tangente?
   b) An welchen Stellen hat K die Steigung 2?





Lösung: a) b)	Lösung: a) b)

6. Bilden Sie die erste Ableitung.

$f(x) = 2\cos(x) + 1$	$f'(x) = -2\sin(x)$
$f(x) = -3\sin(x) - x$	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^4 + 3$	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{1}{32}x^3 + x^2 + x - 4$	$f'(x) =$
$f(x) = 5e^x + 2x - 1$	$f'(x) =$
$f(x) = ae^x + b$	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{3}{x}$	$f'(x) =$
$f(x) = -4\sqrt{x}$	$f'(x) =$

7. Bilden Sie die erste Ableitung mithilfe der Kettenregel.

$f(x) = 2\sin(3x)$	$f'(x) = 3 \cdot 2\cos(3x) = 6\cos(3x)$
$f(x) = \frac{5}{2}e^{4x} + 5x$	$f'(x) =$
$f(x) = 0{,}25e^{x-1} + 2$	$f'(x) =$
$f(x) = (2x - 4)^3$	$f'(x) =$
$f(x) = -1{,}2e^{2-3x} + x^3$	$f'(x) =$
$f(x) = 2ae^{bx+c}$	$f'(x) =$
$f(x) = -\pi\cos(0{,}5x)$	$f'(x) =$
$f(x) = x - \sin(0{,}3\pi x)$	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{9}{5}e^{x^2+1} + 2$	$f'(x) =$
$f(x) = 4\sin(3 + 2x) + 1$	$f'(x) =$
$f(x) = \pi - 2\cos(2(x+1))$	$f'(x) =$
$f(x) = 4\cos(\frac{x}{\pi})$	$f'(x) =$

8. Bestimmen Sie die 1. Ableitung mithilfe der Produktregel.

$f(x) = (x-8)e^x$	$f(x) = (2-6x)e^x$	$f(x) = x \cdot \sin(x)$
$u(x) = x - 8 \Rightarrow u'(x) = 1$ $v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$ $f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-8)e^x$ $f'(x) = e^x \cdot (1 + x - 8)$ $f'(x) = (x-7)e^x$		

9. Bestimmen Sie die 1. Ableitung.

$f(x) = 4xe^{-3x}$	$f(x) = x^2\, e^{-\frac{1}{2}x}$	$f(x) = \sin(2x) \cdot e^{-x}$

10. Kreuzen Sie die richtige Ableitung an.

$f(x) = (x-3)e^x$	☐ $f'(x) = (x-2)e^x$	☐ $f'(x) = (x-2)e^{2x}$
$f(x) = 4x - e^{2x}$	☐ $f'(x) = 4 - 2e^x$	☐ $f'(x) = 4 - 2e^{2x}$
$f(x) = -3\sin(2x-1)$	☐ $f'(x) = 6\cos(2x-1)$	☐ $f'(x) = -6\cos(2x-1)$
$f(x) = \frac{1}{7}x^4 + \frac{3}{7}x^3 + 2$	☐ $f'(x) = \frac{4}{7}x^3 + \frac{9}{7}x^2 + 2$	☐ $f'(x) = \frac{1}{7}(4x^3 + 9x^2)$

11. Bilden Sie die erste und die zweite Ableitung.

$f(x) = 2\cos(4x) + 2x$	$f'(x) = -8\sin(4x) + 2$	$f''(x) = -32\cos(4x)$
$f(x) = 3x - e^{2x} - 1$	$f'(x) =$	$f''(x) =$
$f(x) = \frac{1}{4}x^5 + x^4 + 3x^2$	$f'(x) =$	$f''(x) =$
$f(x) = \frac{1}{16}(x^4 + x^2 - 8)$	$f'(x) =$	$f''(x) =$
$f(x) = 5(e^{3x} - \sin(\pi x))$	$f'(x) =$	$f''(x) =$

12. Entscheiden Sie, ob hier richtig oder falsch abgeleitet wurde. Beschreiben Sie gegebenenfalls kurz, worin der Fehler besteht.

Funktionsterme	richtig falsch	richtig wäre ...	Was wurde nicht beachtet?
$f(x) = 2x^4 + 2x^2$ $f'(x) = 8x^4 + 4x^2$	☐ (r) ☒ (f)	$f'(x) = 8x^3 + 4x$	Potenzregel: $(x^4)' = 4x^3$
$f(x) = 3x^6 - 3x^4 + x$ $f'(x) = 18x^5 - 12x^3$	☐ (r) ☐ (f)	$f'(x) =$	
$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ $f'(x) = e^{2x}$	☐ (r) ☐ (f)	$f'(x) =$	
$f(x) = \sin(2x) + 1$ $f'(x) = \cos(2x)$	☐ (r) ☐ (f)	$f'(x) =$	
$f(x) = e^{2x} \cdot x^2$ $f'(x) = e^{2x} \cdot 2x$	☐ (r) ☐ (f)	$f'(x) =$	
$f(x) = \cos(\pi x + 1)$ $f'(x) = \sin(\pi x)$	☐ (r) ☐ (f)	$f'(x) =$	
$f(x) = \frac{1}{x^2}$ $f'(x) = \frac{1}{2x}$	☐ (r) ☐ (f)	$f'(x) =$	
$f(x) = 2x(x^3 + 4x^2)$ $f'(x) = 2(3x^2 + 8x)$	☐ (r) ☐ (f)	$f'(x) =$	

13. Sind die Aussagen wahr (w) oder falsch (f)?

Der Funktionswert von f mit $f(x) = x^2 + 1$; $x \in \mathbb{R}$, entspricht an jeder Stelle x der Steigung des Graphen der Ableitungsfunktion.	☐ (w) ☐ (f)
Der y-Wert $f'(x)$ entspricht an jeder Stelle x der Steigung des Graphen der Funktion f.	☐ (w) ☐ (f)
Die Ableitungsfunktion einer linearen Funktion ist eine konstante Funktion.	☐ (w) ☐ (f)
Es gibt keine zwei Funktionen, welche beide die gleiche Ableitungsfunktion haben.	☐ (w) ☐ (f)
Bei der Funktion f mit $f(x) = e^x$; $x \in \mathbb{R}$, entspricht der y-Wert an jeder Stelle der Steigung des zugehörigen Schaubildes.	☐ (w) ☐ (f)

1.2 Tangente und Normale

1. Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f an der Stelle x = u.

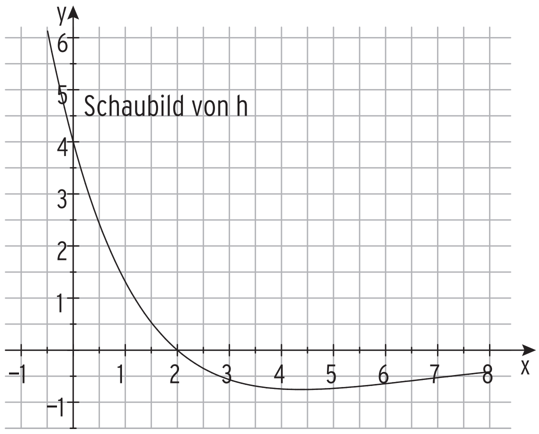
$f(x) = 3x - 2x^2$ $u = -2$	$f(-2) = 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2)^2 = -14$ $f'(x) = 3 - 4x$; $f'(-2) = 3 - 4(-2) = 11$; also $m_t = 11$ Tangentengleichung: $y = 11x + b$ Punktprobe mit $B(-2 \mid -14)$: $-14 = 11 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 8$ Tangentengleichung: $y = 11x + 8$
$f(x) = x - 2e^{0,25x}$ $u = 4$	
$f(x) = \frac{1}{2}\sin(3x) + 1$ $u = \frac{\pi}{6}$	

2. Berechnen Sie die Gleichung der Normale an das Schaubild von f an der Stelle x = u.

$f(x) = x^3 - x^2$ $u = -1$ $\boxed{m_n = -\frac{1}{m_t}}$	$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 = -2$ $f'(x) = 3x^2 - 2x$; $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 2(-1) = 5 \Rightarrow m_n = -\frac{1}{5}$ Normalengleichung: $y = -\frac{1}{5}x + b$ Punktprobe mit $B(-1 \mid -2)$: $-2 = -\frac{1}{5} \cdot (-1) + b \Rightarrow b = -\frac{11}{5}$ Normalengleichung: $y = -\frac{1}{5}x - \frac{11}{5}$
$f(x) = 3 - 2e^{-x}$ $u = 0$	
$f(x) = 2\cos(2x) + 2$ $u = \frac{\pi}{4}$	

3. Gezeichnet ist das Schaubild einer Funktion h mit der Definitionsmenge D = [− 1; 8].
Prüfen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

$h'(1) < 0$	☐ (w)	☐ (f)
Das Schaubild von h′ geht durch den Punkt Q(2 | 0).	☐ (w)	☐ (f)
$h'(7) = -0{,}5$	☐ (w)	☐ (f)
Es gibt ein $x \in D$ für das gilt: $h'(x) = 0$.	☐ (w)	☐ (f)
Die Gleichung $h'(x) = 1$ hat eine Lösung.	☐ (w)	☐ (f)



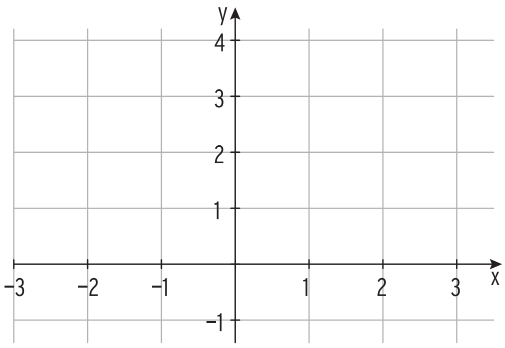
4. Berührt das Schaubild K von f mit $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$; $x \in \mathbb{R}$, die x-Achse?
Begründen Sie durch Rechnung. Skizzieren Sie das Schaubild von f.

Lösung:

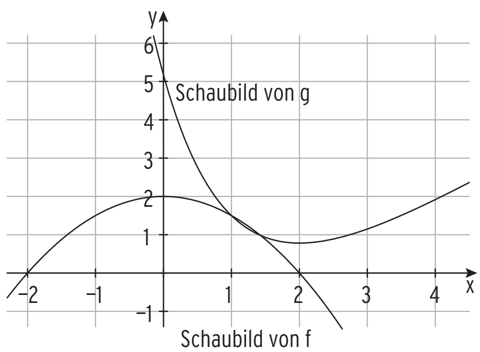
____

____

____



5. Berühren sich das Schaubild von f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$; $x \in \mathbb{R}$, und das Schaubild von g mit $g(x) = e^{2-x} + x - e + 0{,}5$; $x \in \mathbb{R}$, in $x_0 = 1$?
Begründen Sie rechnerisch.



Lösung:

____

____

____