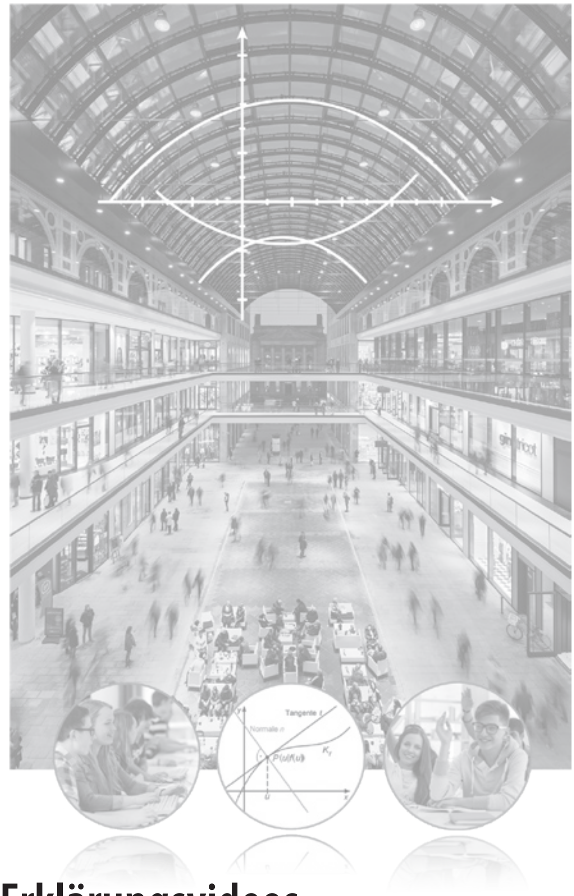
Ott
Rosner

Mathematik

Fachhochschulreife im Berufskolleg 2026
Prüfungsvorbereitung
Baden-Württemberg



mit Erklärungsvideos

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser

Roland Ott
Oberstudienrat

Stefan Rosner
Studienrat an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

* * * * *

5. Auflage 2025

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0382-05
ISBN 978-3-8120-1182-2

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung dient zur Vorbereitung auf die **Prüfung zur Fachhochschulreife 2026** an Berufskollegs und ist auf die aktuelle Prüfungsordnung abgestimmt.

Dem neuen Prüfungsmodus wird durch eine Vielzahl von Aufgaben für Teil 1, der ohne Hilfsmittel bearbeitet werden muss, und für den Teil 2, bei welchem Hilfsmittel zugelassen sind, Rechnung getragen.

Viele Aufgabenstellungen werden anhand von **Videos** erläutert und ausführlich mit sinnvollen Bemerkungen eines erfahreren Kollegen gelöst.

Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.

Da die Aufgabensammlung allen Schülern/Schülerinnen bei der **selbstständigen** Vorbereitung auf das FHSR-Prüfung helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.

Die Lösungen zu den Originalprüfungsfragen wurden von den Autoren selbst erstellt. Sie basieren auf den offiziellen Vorgaben und bieten eine fachlich fundierte Hilfestellung zur Bearbeitung der Prüfungsaufgaben.

An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Prüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der Prüfung zur Fachhochschulreife in Mathematik

Zu Beginn: SchülerIn erhält beide Aufgabenteile, jedoch keine Hilfsmittel

Phase 1: Bearbeitung des hilfsmittelfreien Teils

Teil	Thema	Auswahl	Richtzeit	Punkte
1	Analysis	keine	ca. 60 min	30

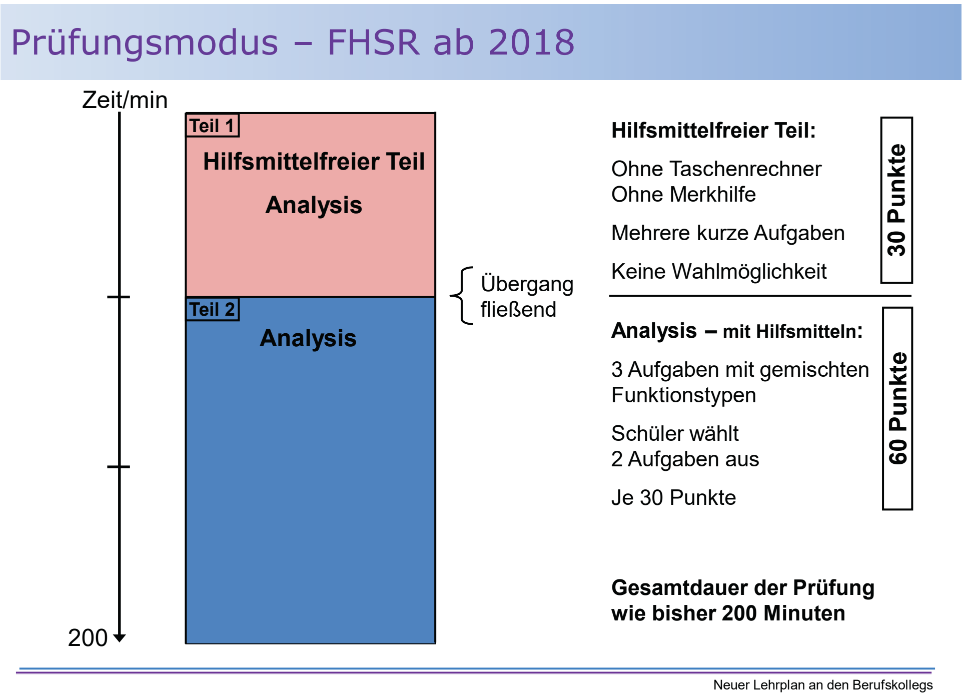
Nach endgültiger Abgabe von Teil 1 erhält SchülerIn die Hilfsmittel

Phase 2: Bearbeitung der Teile mit Hilfsmitteln (WTR + Merkhilfe)

Teil	Thema	Auswahl	Richtzeit	Punkte
2	Analysis	SchülerIn wählt **zwei aus drei** Aufgaben	ca. 140 min	60

Hinweise

- Die Prüfung dauert insgesamt maximal 200 Minuten.
  Die maximal erreichbare Punktzahl beträgt 90 Punkte.



Vorgaben für die Prüfung zur Fachhochschulreife in Mathematik im Schuljahr 2025/2026

Zur Prüfung werden der **Fachlehrkraft** vorgelegt:

- eine Aufgabe zum hilfsmittelfreien Pflichtteil (je 30 Punkte) mit Aufgaben aus der Analysis
- ein hilfsmittelgestützter Prüfungsteil mit 3 Aufgaben aus der Analysis mit jeweils 30 Punkten (Schülerwahl 2 aus 3 wie bisher auch)

I Teil 1 der Fachhochschulreife-Prüfung ohne Hilfsmittel

1 Übungsaufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 18**

1.1 Lösen Sie die Gleichung: $-2x^3 + 6x = 2x$.

1.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 2 - \frac{1}{4}x^2$ in $x = 2$.

1.3 Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 1$ besitzt einen Wendepunkt. Bestimmen Sie die Koordinaten.

1.4 Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 1 \\ x - y &= 3. \end{aligned}$$

1.5 Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\,dx$.

1.6 Bestimmen Sie die Art und Lage der Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^2(x - 2)(x + 1)$.

1.7 Das Schaubild von f mit $f(x) = 2\sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$, wird um 3 nach links verschoben und um 1 nach unten verschoben. Wie lautet die Gleichung der entstandenen Kurve?

1.8 Bilden Sie die erste Ableitung von f mit $f(x) = e^{2x-3} - 2x + 1$.

1.9 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^4 + 3$ und $g(x) = 2x^2$. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Schaubilder von f und g.

Aufgabe 2 **Lösungen Seite 19/20**

2.1 Bestimmen Sie zwei Lösungen der Gleichung: $4\sin(2x) = 0$.

2.2 Welche Gerade schneidet das Schaubild der Funktion f mit
$f(x) = \cos(\frac{1}{4}x) - 1$; $x \in \mathbb{R}$, in $x = 2\pi$ senkrecht?

2.3 Zeigen Sie: Das Schaubild K_f der Funktion f mit $f(x) = e^{-\frac{1}{3}x} - x + 1$ besitzt keinen Wendepunkt.
Ist K_f eine Linkskurve? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.4 Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x - y &= -2 \end{aligned}$$

2.5 Bestimmen Sie $u \neq 0$, so dass $\int_u^0 (x + 2)\,dx = 0$

2.6 Bestimmen Sie die Gleichung der nicht waagrechten Wendetangente an das Schaubild von f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$; $x \in \mathbb{R}$.

2.7 Wie entsteht das Schaubild von f mit $f(x) = 2\cos(3x) - 1$; $x \in \mathbb{R}$, aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = \cos(x)$.

2.8 Bestimmen Sie die Stammfunktion von f mit $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}x)$; $x \in \mathbb{R}$, deren Schaubild die y-Achse in 3 schneidet.

2.9 Zeigen Sie, die Gleichung $e^{2x} + e^x = 2$ hat genau eine Lösung.

2.10 Geben Sie die Nullstellen des Polynoms p mit $p(x) = x^3 - 100x$; $x \in \mathbb{R}$ an.

Erstellen Sie ohne weitere Rechnung eine Skizze des Schaubilds von p.

Lösungen der Übungsaufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Aufgabe Seite 9**

1.1 Gleichung in Nullform: $-2x^3 + 6x = 2x \quad \Leftrightarrow -2x^3 + 4x = 0$

Auslammern: $2x(-x^2 + 2) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x = 0 \vee -x^2 + 2 = 0$

$-x^2 + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 2 \;\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Lösungen: $x_1 = 0;\ x_{2|3} = \pm\sqrt{2}$

1.2 $f(x) = 2 - \frac{1}{4}x^2$; $f'(x) = -\frac{1}{2}x$

$f(2) = 1$; $f'(2) = -1$ einsetzen in $y = mx + b$: $1 = -1 \cdot 2 + b$ ergibt $b = 3$

Gleichung der Tangente: $y = -x + 3$

1.3 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 1$; $f'(x) = -x^2 + 6x$; $f''(x) = -2x + 6$; $f'''(x) = -2 \neq 0$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $\quad -2x + 6 = 0 \;\Leftrightarrow x = 3$

$f(3) = 17$ ergibt $W(3 \mid 17)$

1.4 Additionsverfahren: $2x + 5y = 1$
$x - y = 3 \quad \cdot(-2)$ ergibt $7y = -5 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{7}$

Einsetzen in $x - y = 3$ ergibt $x - (-\frac{5}{7}) = 3 \;\Leftrightarrow x = 3 - \frac{5}{7} = \frac{16}{7}$

Lösung: $(\frac{16}{7}; -\frac{5}{7})$

1.5 $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + 2x\right]_{-1}^{0} = 0 - (\frac{1}{4} - 2) = \frac{7}{4}$

1.6 $f(x) = \frac{1}{5}x^2(x - 2)(x + 1)$ Art und Lage der Nullstellen:

$x = 0$ doppelte Nullstelle (K_f berührt die x-Achse)

$x = 2$; $x = -1$ einfache Nullstelle (K_f schneidet die x-Achse)

1.7 $f(x) = 2\sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$

K_f wird um 3 nach links verschoben: $y = 2\sin(x + 3)$ (Ersetze x durch $(x + 3)$)

und um 1 nach unten verschoben: $y = 2\sin(x + 3) - 1$

1.8 Mit der Kettenregel: $f'(x) = 2 \cdot e^{2x - 3} - 2$

1.9 Gleichsetzen: $f(x) = g(x)$ $\quad -x^4 + 3 = 2x^2$

Nullform: $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

Substitution: $x^2 = u$ $\quad u^2 + 2u - 3 = 0$

Mit Formel oder $u^2 + 2u - 3 = (u - 1)(u + 3)$: $u_1 = -3$; $u_2 = 1$

Rücksubstitution: $u_2 = x^2 = 1 \Rightarrow x_{1|2} = \pm 1$

($u_1 = x^2 = -3$ hat keine Lösung)

Schnittpunkte der Schaubilder $S_1(-1 \mid 2)$; $S_2(1 \mid 2)$ (vgl. Symmetrie)

Aufgabe 2 **Aufgabe Seite 10**

2.1 $4\sin(2x) = 0 \quad \Leftrightarrow$ $\sin(2x) = 0$ für $2x = 0; \pi; 2\pi; \ldots$

Lösungen: $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{\pi}{2}$ (oder auch $x = \pi;\ x = -\frac{\pi}{2}; \ldots$)

2.2 $f(x) = \cos(\frac{1}{4}x) - 1;\ x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\frac{1}{4}\sin(\frac{1}{4}x)$

Senkrecht schneiden bedeutet negativer Kehrwert der Steigung:

$f'(2\pi) = -\frac{1}{4}\sin(\frac{1}{4} \cdot 2\pi) = -\frac{1}{4}\sin(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{4} \cdot 1 = -\frac{1}{4}$

Steigung der Geraden: $m = \frac{-1}{-\frac{1}{4}} = 4$

$f(2\pi) = -1;\ y = 4x + b$: $-1 = 4 \cdot 2\pi + b \Rightarrow b = -1 - 8\pi$

Gerade durch $P(2\pi \mid -1)$ mit Steigung 4: $y = 4x - 1 - 8\pi$

2.3 $f(x) = e^{-\frac{1}{3}x} - x + 1;\ f'(x) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x} - 1;\ f''(x) = \frac{1}{9}e^{-\frac{1}{3}x}$

K_f hat keinen Wendepunkt, da $f''(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$f''(0) = \frac{1}{9} > 0$ K_f ist eine Linkskurve, da $f''(x) > 0$

2.4 $x + 2y = 1$ (I) $\wedge$ $x - y = -2$ (II) (I) − (II) ergibt $3y = 3 \Rightarrow y = 1$

einsetzen von $y = 1$ in $x + 2y = 1$ ergibt $x = -1$

Lösung: $(-1; 1)$

2.5 $\int_u^0 (x + 2)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_u^0 = 0 - (\frac{1}{2}u^2 + 2u) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}u^2 - 2u = 0$

Ausklammern: $u \cdot (-\frac{1}{2}u - 2) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $u = 0;\ u = -4$

$u \neq 0$ nach Aufgabe, also einzige Lösung $u = -4$.

2.6 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2;\ f'(x) = x^3 + 3x^2;\ f''(x) = 3x^2 + 6x;\ f'''(x) = 6x + 6;$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $3x^2 + 6x = 0$

$3x(x + 2) = 0$ für $x_1 = 0;\ x_2 = -2$

$f'(0) = 0$ (Tangente ist waagrecht); $f'(-2) = 4$

Mit $f(-2) = -6$ und dem Ansatz: $y = mx + b$: $-6 = 4 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 2$

Gleichung der nicht waagrechten Wendetangente: $y = 4x + 2$

2.7 Das Schaubild von f mit $f(x) = 2\cos(3x) - 1;\ x \in \mathbb{R}$, entsteht aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = \cos(x)$ durch Streckung in y-Richtung mit Faktor 2, Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{3}$ und Verschiebung um 1 nach unten.

2.8 Stammfunktion von f mit $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}x);\ x \in \mathbb{R}$: $F(x) = -\frac{3}{2\pi}\cos(\frac{\pi}{3}x) + c$

durch $(0 \mid 3)$: $F(0) = -\frac{3}{2\pi} + c = 3 \Rightarrow c = 3 + \frac{3}{2\pi}$

Stammfunktion: $F(x) = -\frac{3}{2\pi}\cos(\frac{\pi}{3}x) + 3 + \frac{3}{2\pi}$

II Teil 2 der Fachhochschulreife-Prüfung mit Hilfsmittel

1 Auszug aus der Merkhilfe

1 Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen	$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$	Menge der ganzen Zahlen	$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle\| a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\right\}$	Menge der rationalen Zahlen	$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}_+ = \{x \| x \in \mathbb{R} \land x \geq 0\}$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen	$\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$

2 Geometrie

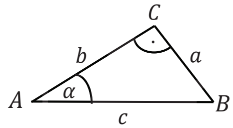
Ebene Figuren A: Flächeninhalt u: Umfang

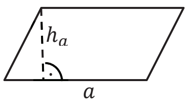
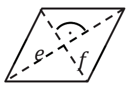
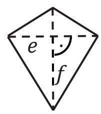
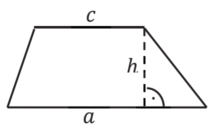
Dreieck $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

Rechtwinkliges Dreieck

Satz des Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$

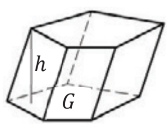
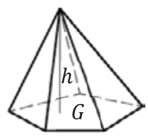
$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$

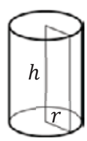
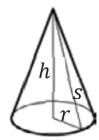


Parallelogramm	Raute	Drachen	Trapez
$A = a \cdot h_a$	$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$	$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$	$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$
			

Kreis $A = \pi \cdot r^2$ $u = 2 \cdot \pi \cdot r$

Körper V: Volumen O: Oberflächeninhalt M: Mantelflächeninhalt G: Grundflächeninhalt

Prisma	Pyramide
$V = G \cdot h$ 	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ 

Gerader Kreiszylinder	Gerader Kreiskegel
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ $M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ 	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ $M = \pi \cdot r \cdot s$ 

Kugel $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

3 Terme

Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\quad$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Potenzen und Wurzeln

mit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$; $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$; $r, s \in \mathbb{R}$

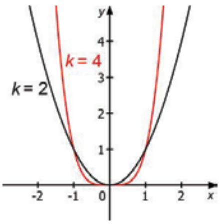
$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $\quad$ $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ $\quad$ $a^r \cdot b^r = (ab)^r$ $\quad$ $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad$ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\quad$ $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ $\quad$ $a^0 = 1$

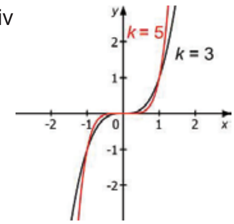
4 Funktionen und zugehörige Gleichungen

Potenzfunktion mit $f(x) = x^k$ mit $k \in \mathbb{Z}^*$

k gerade und positiv



k ungerade und positiv



Potenzgleichung mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ und $a \geq 0$

$x^n = a$	falls n gerade	$x_{1/2} = \pm\sqrt[n]{a}$
	falls n ungerade	$x = \sqrt[n]{a}$
$x^n = -a$	falls n ungerade	$x = -\sqrt[n]{a}$

Polynomfunktion

Polynomfunktion ersten Grades (Lineare Funktion)

$f(x) = mx + b$

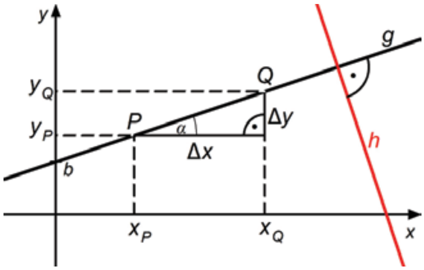
Das Schaubild ist eine Gerade mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt b.

Steigung $\quad m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$

Punkt-Steigungs-Form $\quad y = m(x - x_P) + y_P$

Steigungswinkel $\quad m = \tan(\alpha)$

Orthogonalität $\quad m_g \cdot m_h = -1 \Leftrightarrow g \perp h$



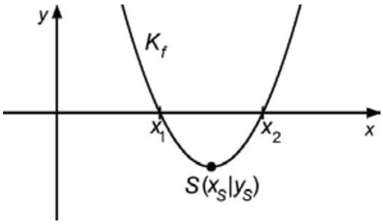
Polynomfunktion zweiten Grades (Quadratische Funktion)

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Das Schaubild ist eine Parabel mit Scheitel S.

Scheitelform $\quad y = a(x - x_S)^2 + y_S$



Quadratische Gleichung

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad$ falls $b^2 - 4ac \geq 0$

$x^2 + px + q = 0 \qquad x_{1/2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad$ falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$

Polynomfunktion dritten Grades

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ mit den Nullstellen x_1, x_2 und x_3

Polynomfunktion n-ten Grades

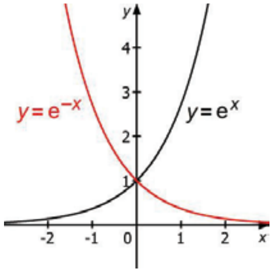
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}; a_n \neq 0$

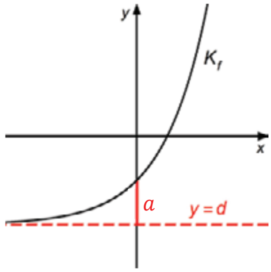
Exponentialfunktion

$f(x) = a \cdot q^x + d$ mit $a \neq 0; q > 0 \wedge q \neq 1$

$f(x) = a \cdot e^{bx} + d$ mit $a \neq 0; b \in \mathbb{R}^*$

Asymptote $y = d$



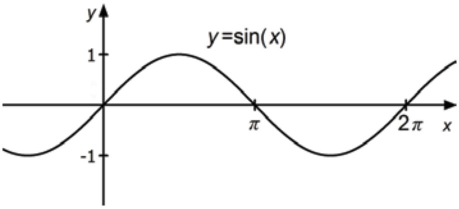


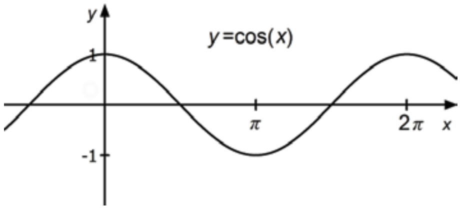
Exponentialgleichung mit $q, y \in \mathbb{R}_+^*$

$y = q^x \Leftrightarrow x = \log_q(y)$ $\quad$ $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$

$q^x = e^{\ln(q) \cdot x}$ $\quad$ $e^{\ln(y)} = y$ $\quad$ $\ln(e^x) = x$

Trigonometrische Funktion

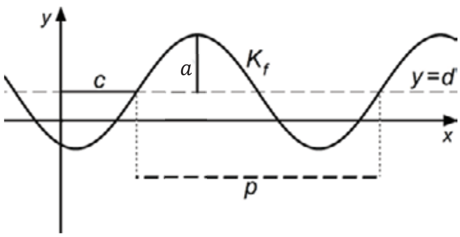




$f(x) = a \cdot \sin\big(b(x - c)\big) + d$ mit $a, b \neq 0$

Amplitude $\quad |a|$

Periode $\quad p = \dfrac{2\pi}{|b|}$



Transformationen

Das Schaubild von *g* entsteht aus dem Schaubild von f durch

Spiegelung	an der *x*-Achse	$g(x) = -f(x)$
	an der *y*-Achse	$g(x) = f(-x)$
Streckung	mit Faktor $\frac{1}{b}$ $(b > 0)$ in *x*-Richtung	$g(x) = f(b \cdot x)$
	mit Faktor a $(a > 0)$ in *y*-Richtung	$g(x) = a \cdot f(x)$
Verschiebung	um *c* in *x*-Richtung	$g(x) = f(x - c)$
	um *d* in *y*-Richtung	$g(x) = f(x) + d$

5 Analysis

Änderungsrate

Durchschnittliche / Mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_1; x_2]$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Momentane / Lokale Änderungsrate an der Stelle x_0 $\quad f'(x_0)$

Ableitungsregeln

Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Faktorregel	$f(x) = a \cdot u(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = a \cdot u'(x)$
Kettenregel	$f(x) = u(v(x))$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Spezielle Ableitungen / Stammfunktionen mit $C \in \mathbb{R}$

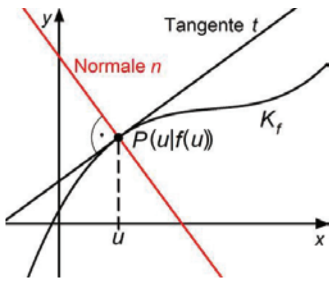
$f(x) = x^k$	$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$	$F(x) = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} + C$	mit $k \neq -1$
$f(x) = e^{bx}$	$f'(x) = b \cdot e^{bx}$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot e^{bx} + C$	mit $b \in \mathbb{R}^*$

$f(x) = \sin(bx)$	$f'(x) = b \cdot \cos(bx)$	$F(x) = -\frac{1}{b} \cdot \cos(bx) + C$	mit $b \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos(bx)$	$f'(x) = -b \cdot \sin(bx)$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot \sin(bx) + C$	mit $b \in \mathbb{R}^*$

Tangente und Normale

Tangentensteigung $\quad m_t = f'(u)$

Tangentengleichung $\quad y = f'(u)(x - u) + f(u)$



Untersuchung von Funktionen und ihren Schaubildern

Symmetrie	$f(-x) = f(x)$	für alle x	$\Leftrightarrow$	K_f ist symmetrisch zur *y*-Achse
	$f(-x) = -f(x)$	für alle x	$\Leftrightarrow$	K_f ist symmetrisch zum Ursprung
Monotonie	$f'(x) \geq 0$	im Intervall J	$\Leftrightarrow$	f wächst monoton im Intervall J
	$f'(x) \leq 0$	im Intervall J	$\Leftrightarrow$	f fällt monoton im Intervall J
	$f'(x) > 0$	im Intervall J	$\Rightarrow$	f wächst streng monoton in J
	$f'(x) < 0$	im Intervall J	$\Rightarrow$	f fällt streng monoton in J
Krümmung	$f''(x) > 0$	im Intervall J	$\Rightarrow$	K_f ist im Intervall J linksgekrümmt
	$f''(x) < 0$	im Intervall J	$\Rightarrow$	K_f ist im Intervall J rechtsgekrümmt
Hochpunkt	$f'(x_0) = 0$ und			
	VZW +/- von $f'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0) < 0$		$\Rightarrow$	K_f hat den Hochpunkt $H(x_0\|f(x_0))$
Tiefpunkt	$f'(x_0) = 0$ und			
	VZW -/+ von $f'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0) > 0$		$\Rightarrow$	K_f hat den Tiefpunkt $T(x_0\|f(x_0))$
Wendepunkt	$f''(x_0) = 0$ und			
	VZW von $f''(x)$ bei x_0 oder $f'''(x_0) \neq 0$		$\Rightarrow$	K_f hat den Wendepunkt $W(x_0\|f(x_0))$

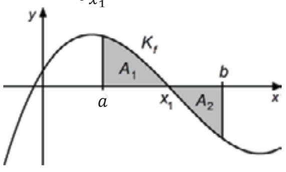
Berechnung bestimmter Integrale

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$ wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Flächenberechnung

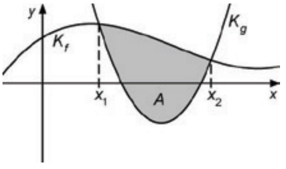
$$A_1 = \int_a^{x_1} f(x)\,dx$$

$$A_2 = -\int_{x_1}^{b} f(x)\,dx$$



$$A = \int_{x_1}^{x_2} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

falls $f(x) \geq g(x)$ für $x \in [x_1; x_2]$



Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht vollständig erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

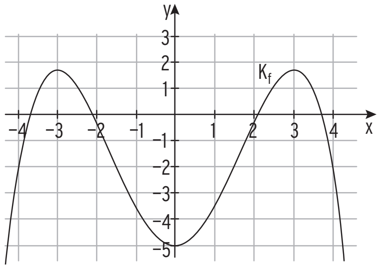
2 Musteraufgaben zum Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösungen Seite 56**

Punkte

1.1 Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist symmetrisch zur y-Achse. Es hat im Punkt $H(-1|\,3)$ eine waagrechte Tangente und schneidet die y-Achse bei $-4{,}5$.
Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, mit dem der Funktionsterm bestimmt werden kann. 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 5;\ x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild ist K_f.



1.2 Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrempunkte von K_f.
Zeigen Sie, eine der beiden Wendetangenten hat die Gleichung

$$y = 2\sqrt{3}\cdot x - 7{,}25.$$

Geben Sie die Gleichung der anderen Wendetangente an.
Zeichnen Sie die Wendetangenten in das Koordinatensystem ein. 8

1.3 K_f schneidet die x-Achse unter anderem in $x \approx 2{,}1$. K_f und die x-Achse begrenzen drei Teilflächen. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der größten Teilfläche. 6

Musteraufgaben zum Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Seite 2/2** **Punkte**

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = e^x - 4;\ x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_g.

1.4 Die Schnittpunkte von K_g mit den Koordinatenachsen sind mehr als $d = \sqrt{10}$ voneinander entfernt. Überprüfen Sie die Behauptung.
Silke behauptet, dass eine Ursprungsgerade K_g in $x_1 = 1$ senkrecht schneidet.
Hat Silke Recht? Begründen Sie Ihre Antwort 6

1.5 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = a \cdot e^{-x} + b$ mit $a, b, x \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.
Geben Sie jeweils Werte für a und b an, so dass ...

(1) ... die Funktion h monoton steigt.

(2) ... das Schaubild von h durch genau zwei Quadranten verläuft.

(3) ... die Gerade $y = 2$ waagrechte Asymptote des Schaubildes von h ist.

Gibt es Werte von a und b, für die alle Bedingungen (1) bis (3) gleichzeitig erfüllt sind?
Geben Sie diese Werte gegebenenfalls an. 6

30

Musteraufgaben zum Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 2 **Lösungen Seite 58** **Punkte**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{0,5x} - 2x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild ist K_f.

2.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Extrempunktes von K_f.
Welche Art von Extrempunkt liegt vor?
Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K_f an.
Zeichnen Sie K_f. 8

2.2 K_f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ schließen eine Fläche ein, die den Punkt $(1 \mid -1)$ enthält.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. 4

2.3 Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $1 < u \leq 4{,}5$ schneidet K_f im Punkt P und die x-Achse im Punkt Q.
Die Punkte P, Q und $R(1 \mid 0)$ sind Eckpunkte eines Dreiecks.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von u.
Wird dieser Flächeninhalt für $u = 3$ maximal?
Überprüfen Sie. 6

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{3}x,\ x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild ist K_g.

2.4 Bestimmen Sie zwei Wendepunkte von K_g.
Zeigen Sie, dass sich K_f und K_g im Ursprung senkrecht schneiden. 5

2.5 Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion h hat einen Hochpunkt in $H(0 \mid \frac{2}{3})$. Der benachbarte Tiefpunkt hat die Koordinaten $T(\frac{\pi}{2} \mid -\frac{4}{3})$.
Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm von h.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Funktionen g und h.
Begründen Sie mit Hilfe dieses Zusammenhangs, dass g an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ eine Wendestelle hat. 7

30

Musteraufgabensatz 3

Lösung Seite 120 - 128

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel **Punkte**

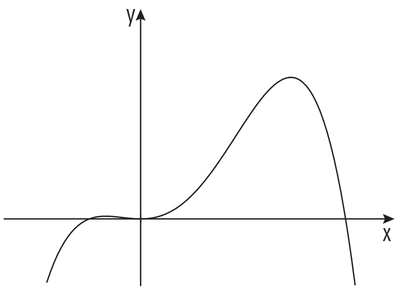
1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2$; $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_f.

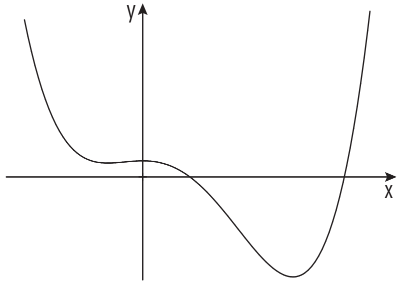
In dem Funktionsterm f(x) wird der Koeffizient $-\frac{1}{8}$ von x^3 abgeändert.

Begründen Sie bei jedem der folgenden Schaubilder, dass es nicht zu dem geänderten Funktionsterm gehören kann, wenn die anderen Koeffizienten gleich bleiben. 4

a)



b)



1.2 Lösen Sie die Gleichung $3e^x - e^{3x} = -2e^x$. 3

1.3 Die Funktion f mit dem Schaubild K_f ist gegeben durch

$f(x) = 2\cos(0{,}5x) + 2{,}009$; $x \in \mathbb{R}$.

Begründen Sie, weshalb K_f keine Schnittpunkte mit der x-Achse hat. 4

1.4 Weisen Sie nach, dass $x_1 = 2$; $x_2 = -1$ und $x_3 = 3$ eine Lösung des linearen Gleichungssystem darstellt.

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$
$$-x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

4

1.5 Gegeben ist die Funktion h durch $h(x) = x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x$; $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_h.

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an K_h im Punkt $P(-1 \mid h(-1))$ 4

Musteraufgabensatz 3

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel **Fortsetzung** **Punkte**

1.6 Die Berechnung einer Fläche führt auf folgenden Ausdruck:

$$\int_{-1}^{1} (2 - x^2)dx$$

Veranschaulichen Sie die Lage dieser Fläche im Koordinatensystem. 4

1.7 Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = 3 \cdot e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von g, die beiden Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = 4$ begrenzen eine Fläche.

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. 5

1.8 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(2x)$; $x \in \mathbb{R}$ mit Schaubild K_f.

Geben Sie die Gleichung einer zugehörigen Stammfunktion an, deren Schaubild durch $P(0 \mid 3)$ verläuft. 3

30

Musteraufgabensatz 3

Aufgabe 2 - Teil 2 mit Hilfsmittel **Punkte**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1$; $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f heißt K_f.

2.1 Weisen Sie mit Hilfe der Ableitungen nach, dass $H(-1 \mid 2)$ Hochpunkt und $T(1 \mid 0)$ Tiefpunkt von K_f ist.
Zeichnen Sie K_f. 8

2.2 Für welche Werte von x ist K_f rechtsgekrümmt? 5

2.3 Geben Sie jeweils einen möglichen neuen Funktionsterm an:
a) K_f wird so verschoben, dass es drei Schnittpunkte mit der x-Achse hat. 2
b) K_f wird so verschoben, dass es die x-Achse im Ursprung berührt. 2

2.4 Bestimmen Sie den Term einer Stammfunktion von f so, dass deren Schaubild durch den Tiefpunkt von K_f verläuft. 4

Der Bestand an fester Holzmasse zum Zeitpunkt t in einem Wald wird durch die Funktion $h(t) = 10^5 \cdot e^{0{,}02t}$; $t \geq 0$ beschrieben.
Dabei wird die Zeit t in Jahren und der Bestand h(t) in m^3 gemessen.
(t = 0 steht für das Jahr 2016).

2.5 Mit welchem Bestand wird im Jahr 2023 gerechnet? 2

2.6 Um wie viel Prozent nimmt der Holzbestand im Verlauf des ersten Jahres zu? 3

2.7 Nach wie vielen Jahren wird die momentane Änderungsrate $2500\,\frac{m^3}{\text{Jahr}}$ betragen? 4

30

Musteraufgabensatz 3

Aufgabe 3 - Teil 2 mit Hilfsmittel — Punkte

Gegeben sind die Funktionen g und f mit

$g(x) = -e^{0,5x} + e$ und $f(x) = -0,5x + e^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Ihre Schaubilder sind K_g und K_f.

3.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von K_g. Ergänzen Sie die Skalierung im Koordinatensystem auf dem beigefügten Arbeitsblatt. 4

3.2 Zeichnen Sie die Asymptoten beider Kurven auf dem Arbeitsblatt ein und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an 6

3.3 Geben Sie die Gleichung der Tangente t_g an K_g im PunktP(2 | g(2)) an. Veranschaulichen Sie auf dem Arbeitsblatt, dass es eine Tangente t_f an K_f gibt, die parallel zu t_g verläuft. 5

3.4 Begründen Sie mit Hilfe der Ableitungen, dass K_f keine Wendepunkte besitzt. 3

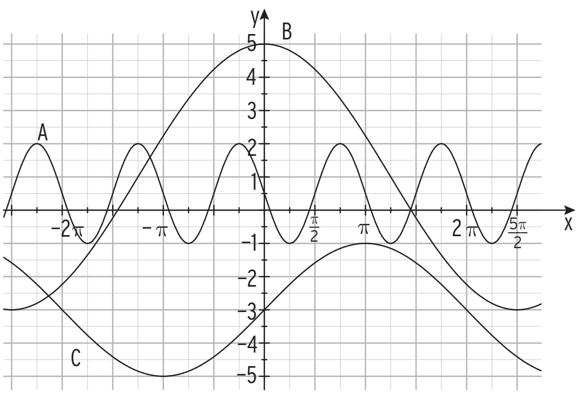
3.5 K_f und K_g schließen die Fläche A ein. A_1 ist der Flächenanteil von A, der im ersten Quadranten liegt. Geben Sie ein geeignetes Vorgehen zum Bestimmung des Flächeninhaltes von A_1 an. 5

3.6 Zu jedem der abgebildeten Schaubilder A, B und C gehört eine der Funktionen u, v und w mit:

$u(x) = 2\sin(ax) + b$

$v(x) = c \cdot \sin(2x) + 0,5$

$w(x) = 1 + 4\cos(dx)$



Ordnen Sie jeder Funktion eines der Schaubilder zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Bestimmen Sie a, b, c und d. 7

30

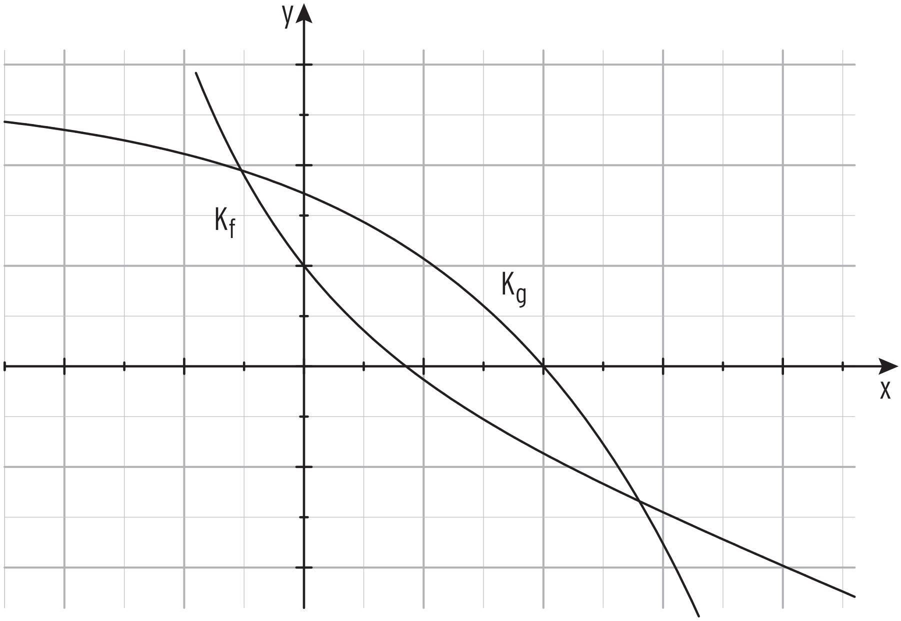
Musteraufgabensatz 3

Aufgabe 3 - Teil 2 mit Hilfsmittel

Arbeitsblatt

Bitte legen Sie dieses Blatt Ihrer Prüfungsarbeit bei.

Im folgenden Koordinatensystem sehen Sie K_f und K_g.



Zu 3.2:

Asymptote von K_f: für $x \to$

Asymptote von K_g: für $x \to$

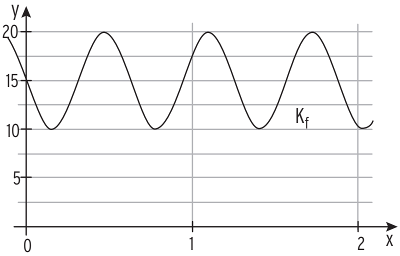
Musteraufgabensatz 3

Aufgabe 4 - Teil 2 mit Hilfsmittel — Punkte

4.1 Das Schaubild einer Funktion ist symmetrisch zur y-Achse und verläuft durch den Punkt S(0 | 3) und hat in T(3 | 0) einen Tiefpunkt.
Geben Sie jeweils die Gleichung
- einer Polynomfunktion 4. Grades und
- einer trigonometrischen Funktion

an, deren Schaubild die genannten Bedingungen erfüllt. 7

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -5\sin(10x) + 15$ mit $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K_f.



4.2 Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen von f.
Geben Sie die Periodenlänge des Schaubildes K_f als Vielfaches von π an.
Geben Sie die Koordinaten von einem Hochpunkt, einem Tiefpunkt und zwei Wendepunkten an. 8

4.3 Begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Es gilt: $\int_0^{10} f(x)dx = 0$.

b) Die Funktion g mit $g(x) = -5\sin(10x) + mx$ besitzt für jedes $m \in \mathbb{R}$ die gleichen Wendestellen wie die Funktion f. 4

4.4 Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = -20x^2 + 13$; $x \in \mathbb{R}$ mit Schaubild K_p.
K_p schneidet K_f nur bei $x_1 \approx 0{,}04$ und bei $x_2 \approx 0{,}25$.
Die beiden Schaubilder schließen eine Fläche ein. Geben Sie einen Term an, mit dem der Inhalt der Fläche berechnet werden kann und bestimmen Sie die zugehörige Stammfunktion. 4

4.5 Der Ursprung und der Punkt P(u | p(u)) mit $0 < u \leq 0{,}6$ sind Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks mit Inhalt A(u). Skizzieren Sie K_p und ein mögliches Rechteck. Bestimmen Sie A(u) und die Maximalstelle von A.
Berechnen Sie den Inhalt für u = 0,5. 7

30

Lösungen Musteraufgabensatz 3

Aufgaben Seite 81 - 86

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel **Seite 1/2**

1.1 a) Der Koeffizient von x^4 wird nicht abgeändert (bleibt also größer 0), also muss das neue Schaubild wie K_f von links oben kommen und nach rechts oben gehen. (Verlauf vom II. in den I. Quadranten)

b) Das neue Schaubild muss wie K_f durch den Ursprung verlaufen, da es kein konstantes Glied im Polynom gibt.

1.2 $3e^x - e^{3x} = -2e^x \quad \Leftrightarrow \quad 5e^x - e^{3x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \cdot (5 - e^{2x}) = 0$

Satz vom Nullprodukt führt auf: $e^x = 0$ (keine Lösung) $\vee$ $5 = e^{2x}$

Logarithmieren: $\ln(5) = 2x$

Lösung: $x = \frac{1}{2}\ln(5)$

1.3 Bedingung für die Nullstellen: $f(x) = 0$ $\quad 2\cos(0{,}5x) + 2{,}009 = 0$

$\cos(0{,}5x) = -1{,}0045$

Diese Gleichung hat keine Lösung wegen $-1 \leq \cos(0{,}5x) \leq 1$.

oder: K_f entsteht aus der Kurve K mit $y = 2\cos(0{,}5x)$ durch Verschiebung um 2,009 nach oben. Der tiefste Punkt von K hat die y-Koordinate $y_T = -2$. Durch die Verschiebung erhält man: Der tiefste Punkt von K_f hat die y-Koordinate $y_T = 0{,}009 > 0$; also hat K_f keine Schnittpunkte mit der x-Achse.

1.4 Einsetzen von $x_1 = 2$; $x_2 = -1$ und $x_3 = 3$ führt in jeder Zeile auf eine wahre Aussage:

$4 - 2 + 3 = 5$

$-2 - 6 + 6 = -2$

$2 - 1 + 3 = 4$

1.5 $h(x) = x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x$

Ableitung: $h'(x) = 5x^4 - 16x^3 + 18x^2 - 8x + 1$

Steigung in $x = -1$: $h'(-1) = 48$; Berührpunkt $h(-1) = -16$

Gleichung der Tangente an K_h in P: $y = 48(x + 1) - 16 = 48x + 32$

oder mit Punktprobe in $y = 48x + b$: $\quad -16 = -48 + b \Rightarrow b = 32$

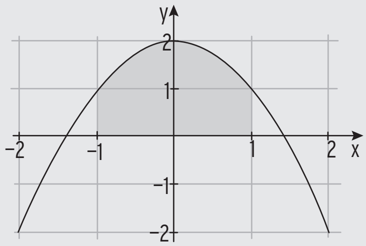
also $y = 48x + 32$

Lösungen Musteraufgabensatz 3

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel **Seite 2/2**

1.6 $\int_{-1}^{1}(2-x^2)dx$

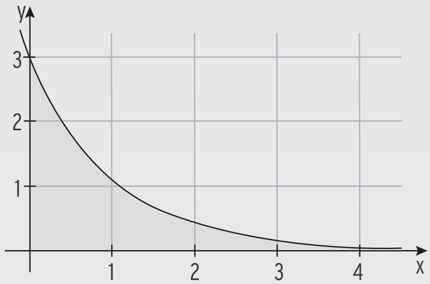
Veranschaulichung:



1.7 $g(x) = 3 \cdot e^{-x}$

Inhalt dieser Fläche

Skizze (nicht verlangt):



$$A = \int_0^4 (3 \cdot e^{-x})dx = [-3e^{-x}]_0^4 = -3 \cdot e^{-4} + 3 \cdot e^0 = -3 \cdot e^{-4} + 3$$

1.8 $f(x) = \sin(2x)$

Stammfunktion: $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$

Bedingung für c: $F(0) = 3$ $-\frac{1}{2}\cos(0) + c = 3$

$-\frac{1}{2} \cdot 1 + c = 3$

$c = \frac{7}{2}$

Gesuchte Stammfunktion: $F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \cos(2x) + \frac{7}{2}$

Lösungen Musteraufgabensatz 3

Aufgabe 2 - Teil 2 mit Hilfsmittel Seite 1/2

2.1 K_f: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}$; $f''(x) = 3x$; $f'''(x) = 3$

Bedingung für Extrempunkte: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

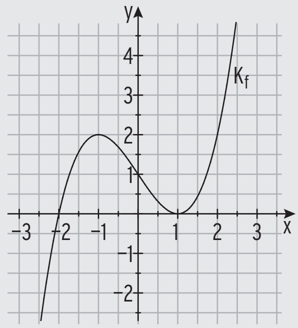
Nachweis Hochpunkt $H(-1 \mid 2)$:

$f(-1) = 2$; $f'(-1) = 0$; $f''(-1) = -3 < 0$

Nachweis Tiefpunkt $T(1 \mid 0)$:

$f(1) = 0$; $f'(1) = 0$; $f''(1) = 3 > 0$

Alle Bedingungen sind jeweils erfüllt.



2.2 Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ist Wendestelle

Mit $f''(-1) = -3 < 0$ ist das Schaubild links von $x = 0$ rechtsgekrümmt.

Für $x \leq 0$ ist K_f rechtsgekrümmt.

Bemerkung: $f'''(0) = 3 > 0$, d. h. $f''(x)$ ist wachsend, in $x = 0$ findet ein Übergang von Rechtskrümmung ($f''(x) < 0$) zu Linkskrümmung ($f''(x) > 0$) statt.

Hinweis: Das Ergebnis lässt sich an der Zeichnung ablesen.

2.3 a) K_f um eine Einheit nach unten verschieben:

$f_1(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 - 1 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

b) K_f um eine Einheit nach links verschieben:

Ersetzen Sie x durch (x + 1): $f_2(x) = \frac{1}{2}(x+1)^3 - \frac{3}{2}(x+1) + 1$

2.4 Stammfunktion von f: $F(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x + c$

Tiefpunkt $T(1 \mid 0)$: Mit $F(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{3}{8}$

Gesuchte Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x - \frac{3}{8}$

2.5 2023 entspricht t = 7: $h(7) = 10^5 \cdot e^{0,02 \cdot 7} \approx 115027$

Der Bestand im Jahre 2023 wird bei ca. 115000 m^3 liegen.

Lösungen Musteraufgabensatz 3

Aufgabe 2 - Teil 2 mit Hilfsmittel **Seite 2/2**

2.6 $\frac{h(1)}{h(0)} = \frac{107{,}12}{105} \approx 1{,}0202$

Wachstumsfaktor: 1,02

Also wächst der Bestand im 1. Jahr um etwa 2 %.

Bemerkung: Bei exponentiellem Wachstum $B(t) = ae^{kt}$ ist der

Wachstumsfaktor e^k konstant: $e^{0{,}02} \approx 1{,}0202$

2.7 Momentane Änderungsrate $h'(t) = 0{,}02 \cdot 10^5 \cdot e^{0{,}02t} = 2000 \cdot e^{0{,}02t}$

Bedingung für t: $h'(t) = 2500$ $\qquad 2000 \cdot e^{0{,}02t} = 2500$

$e^{0{,}02t} = 1{,}25$

Logarithmieren: $\qquad 0{,}02t = \ln(1{,}25)$

Lösung: $\qquad t \approx 11{,}157$ (näherungsweise)

Nach etwas mehr als 11 Jahren wird die momentane Änderungsrate bei $2500 \ \frac{m^3}{\text{Jahr}}$ liegen.

Lösungen Musteraufgabensatz 3

Aufgabe 3 - Teil 2 mit Hilfsmittel **Seite 1/3**

3.1 Schnittpunkt von K_g mit der y-Achse: $g(0) = -1 + e$ also $S_y(0 \mid -1 + e)$

Nullstellen: $g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -e^{0,5x} + e = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e = e^{0,5x}$

Vergleich der Hochzahlen (Logarithmieren): $0,5x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

Schnittpunkt von K_g mit der x-Achse: $N(2 \mid 0)$

3.2 Siehe Arbeitsblatt

3.3 $g(x) = -e^{0,5x} + e$; $g'(x) = -0,5 \cdot e^{0,5x}$

$g(2) = 0$; $g'(2) = -0,5e$ einsetzen in die PSF: $y = g'(2)(x-2) + g(2)$

ergibt: $y = -0,5e(x-2) = -0,5e \cdot x + e$

oder: Punktprobe mit $(2 \mid 0)$ in $y = -0,5e \cdot x + b$: $0 = -0,5e \cdot 2 + b \Rightarrow b = e$

Tangentengleichung: $y = -0,5e \cdot x + e$

Die Tangente t_g an K_g in $x = 2$ hat die Gleichung $y = -0,5e \cdot x + e$

Die parallele Tangente t_f an K_f entsteht durch Verschiebung (in x- oder y-Richtung). Bemerkung: Eine Gleichung ist nicht verlangt.

3.4 $f(x) = -0,5x + e^{-x}$

Ableitungen: $f'(x) = -0,5 - e^{-x}$; $f''(x) = e^{-x}$; $f'''(x) = -e^{-x}$

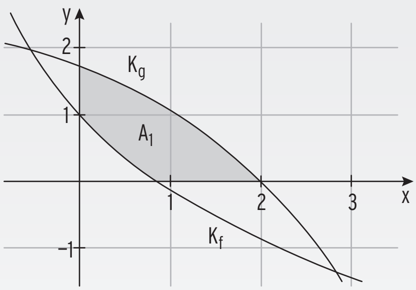
Wendepunkte: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

Die Gleichung $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 0$ hat keine Lösung für $x \in \mathbb{R}$ $(e^{-x} > 0)$

also gibt es keinen Wendepunkt.

Bemerkung: $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. K_f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ linksgekrümmt.

3.5 A_1 ist z. B. die Differenz der Flächeninhalte, der von K_f und K_g im 1. Quadranten mit den Koordinatenachsen eingeschlossenen Flächen.



Dazu benötigt man die Nullstellen x_1 von f und $x_2 = 2$ von g:

$A_1 = \int_0^{x_2} g(x)\,dx - \int_0^{x_1} f(x)\,dx$

Bemerkung: Nicht verlangt sind x_1 und eine Berechnung von A_1.

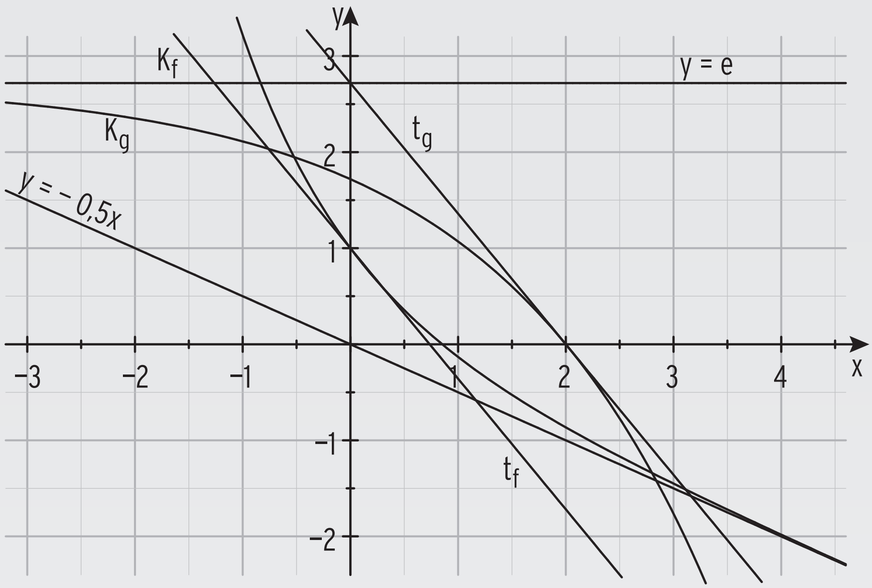
Lösungen Musteraufgabensatz 3

Aufgabe 3 **Seite 2/3**

Arbeitsblatt

Bitte legen Sie dieses Blatt Ihrer Prüfungsarbeit bei.

Im folgenden Koordinatensystem sehen Sie K_f und K_g.



Zu 3.2: Asymptote von K_f: $y = -0{,}5x$ für $x \to \infty$

Asymptote von K_g: $y = e$ für $x \to -\infty$

Bemerkungen: K_g hat eine waagerechte Asymptote, K_f hat ein schiefe Asymptote.

Zu 3.1 Skalierung der Achsen

Zu 3.3 Parallele Tangenten t_g und t_f

Lösungen Musteraufgabensatz 3

Aufgabe 3 - Teil 2 mit Hilfsmittel **Seite 3/3**

3.6 Das Schaubild von u hat die Amplitude 2, gehört also zu Schaubild C.

Das Schaubild von v hat die Periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$ und die Mittellinie y = 0,5, gehört also zu Schaubild A.

Das Schaubild von w hat die Amplitude 4, und die Mittellinie y = 1, gehört also zu Schaubild B. Sinnvoller Ansatz mit Cosinus wegen HP auf der y-Achse.

Bestimmung von a, b, c und d.:

Das Schaubild von u (C) hat die Periode 4π ($a = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$) und hat die Mittellinie $y = -3$, also $b = -3$.

Das Schaubild von v (A) hat die Amplitude 1,5 und fällt im Wendepunkt W(0 | 0,5), also $c = -1{,}5$; K: $y = \sin(2x)$ ist an der x-Achse gespiegelt worden.

Das Schaubild von w (B) hat die Periode 5π, also $5\pi = \frac{2\pi}{d} \Rightarrow d = \frac{2}{5}$

Lösungen Musteraufgabensatz 3

Aufgabe 4 - Teil 2 mit Hilfsmittel Seite 1/2

4.1 Ansatz: $f(x) = a(x+3)^2(x-3)^2$ mit $f(0) = 3$: $a(0+3)^2 \cdot (0-3)^2 = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{27}$

also $f(x) = \frac{1}{27}(x+3)^2 \cdot (x-3)^2$

Hinweise: $T_{1|2}(\pm 3 \mid 0)$ Tiefpunkte: $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$ doppelte Nullstellen wegen Symmetrie zur y-Achse; Hochpunkt auf der y-Achse

Ansatz: $f(x) = a\cos(bx) + c$

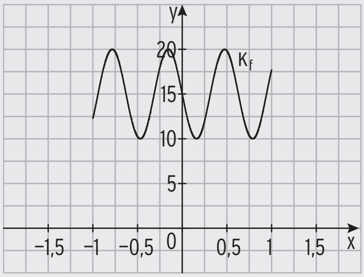
Kosinus-Ansatz wegen Symmetrie zur y-Achse, d. h. $S(0 \mid 3)$ ist Hochpunkt

Aus $T(3 \mid 0)$ ist Tiefpunkt folgt:

- Amplitude $\frac{3}{2}$, also $a = \frac{3}{2}$;
- Periode 6: Aus $p = \frac{2\pi}{b}$ folgt $6 = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{\pi}{3}$
- Mittellinie $y = \frac{3}{2}$, also $c = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}\cos(\frac{\pi}{3}x) + \frac{3}{2}$

4.2 $f(x) = -5 \cdot \sin(10x) + 15$



Ableitungen: $f'(x) = -50 \cdot \cos(10x)$;

$f''(x) = 500 \cdot \sin(10x)$; $f'''(x) = 5000 \cdot \cos(10x)$

Periodenlänge: $p = \frac{2\pi}{10} = \frac{1}{5}\pi$

Die Wendepunkte liegen auf der Mittellinie in einem Abstand von einer halben Periode ($= \frac{\pi}{10}$), bei einer Sinuskurve (nicht verschoben in x-Richtung) liegt ein WP auf der y-Achse: $W_1(0 \mid 15)$:

Weitere WP: $W_2(\frac{\pi}{10} \mid 15)$; $W_3(\frac{\pi}{5} \mid 15)$; $W_4(\frac{3\pi}{10} \mid 15)$ oder auch $W_5(-\frac{\pi}{10} \mid 15)$ wegen Symmetrie.

Tiefpunkt in $x = \frac{1}{20}\pi$ (nach $\frac{p}{4}$): $T(\frac{1}{20}\pi \mid 10)$; Amplitude $a = 5$

Hochpunkt in $x = \frac{3}{20}\pi$ (nach $\frac{3p}{4}$): $H(\frac{3}{20}\pi \mid 20)$; Amplitude $a = 5$

Hinweis: Eine Periode $p = \frac{1}{5}\pi$ unterteilt sich in 4 gleiche Teile:

WP $\frac{1}{20}\pi$ HP(oder TP) $\frac{1}{20}\pi$ WP $\frac{1}{20}\pi$ TP(oder HP) $\frac{1}{20}\pi$ WP

Lösungen Musteraufgabensatz 3

Aufgabe 4 - Teil 2 mit Hilfsmittel Seite 2/2

4.3 a) Falsch: K_f verläuft immer oberhalb der x-Achse; also $\int_0^{10} f(x)\,dx > 0$.

b) wahr: Bedingung für Wendestellen: $g''(x) = 0$

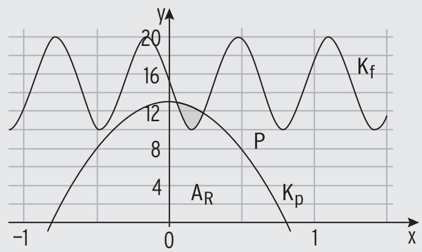
Da $g''(x) = f''(x) = 500 \cdot \sin(10x)$ (Der Term mx fällt ab der 2. Ableitung heraus.), haben f und g die gleichen Wendestellen.

4.4 $A = \int_{0,04}^{0,25} (p(x) - f(x))dx$

$= \int_{0,04}^{0,25} (-20x^2 + 13 - (-5\sin(10x) + 15)\,dx$

$= \int_{0,04}^{0,25} (-20x^2 + 5\sin(10x) - 2)\,dx$

$F(x) = -\frac{20}{3}x^3 - \frac{1}{2}\cos(10x) - 2x$



Fläche zwischen zwei Kurven

4.5 Rechtecksinhalt

$A(u) = 2u \cdot p(u) = 2u \cdot (-20u^2 + 13)$

$A(u) = -40u^3 + 26u;\ 0 < u \leq 0,6$

$A'(u) = -120u^2 + 26;\ A''(u) = -240u$

Bedingung: $A'(u) = 0$

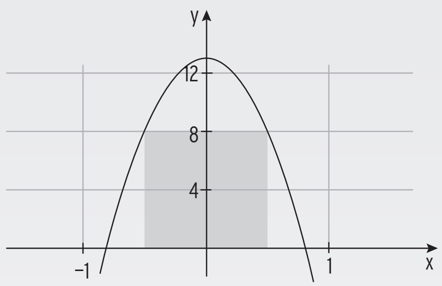
$-120u^2 + 26 = 0$

$u^2 \approx 0,2167$

Lösung ($u > 0$): $u \approx 0,465$

$A''(0,465) < 0$: $u \approx 0,465$ ist Maximalstelle

$A(0,5) = -40 \cdot \frac{1}{8} + 26 \cdot \frac{1}{2} = 8$



Prüfung zur Fachhochschulreife 2024

Teil 1 ohne Hilfsmittel

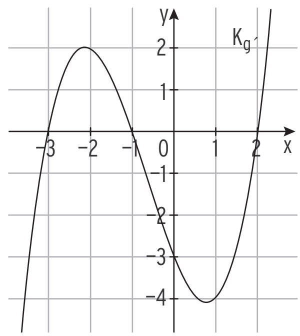
Aufgabe 1 **Punkte**

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 12x$, $x \in \mathbb{R}$. 5
Ihr Schaubild ist K_f.
Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte von K_f.

1.2 Lösen Sie die Gleichung $x \cdot (x^3 + 1) \cdot (2x - 3) = 0$. 3

1.3 Beschreiben Sie, wie das Schaubild mit der Gleichung $y = -2e^x + 3$ aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = e^x$ hervorgeht. 3

1.4 Die Abbildung zeigt das Schaubild der $K_{g'}$ der Ableitungsfunktion g′ einer Funktion g. Das Schaubild von g ist K_g. 6
Begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
(1) K_g besitzt genau zwei Wendepunkte.
(2) K_g besitzt genau zwei Hochpunkte.
(3) K_g besitzt genau zwei Tangenten die parallel zur 1. Winkelhalbierenden verlaufen.



1.5 Berechnen Sie die Stammfunktion der Funktion h mit $h(x) = 4\sin(2x)$, $x \in \mathbb{R}$, deren Schaubild durch den Punkt $P(\pi \mid 1)$ verläuft. 4

1.6 Das Schaubild mit der Gleichung $y = a \cdot e^x + b$ schneidet die y-Achse in $S(0 \mid -1)$ und ihre waagrechte Asymptote hat die Gleichung $y = -3$. 4
Bestimmen Sie a und b.

1.7 Geben Sie jeweils einen möglichen Wert für c an, so dass die Gleichung $2\cos(x) + 1 = c$ mit $0 \leq x \leq 2\pi$ genau eine, zwei oder keine Lösung hat. 5

30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2024

Teil 2 mit Hilfmittel

Aufgabe 2 **Punkte**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 1$, mit $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_f.

2.1 Untersuchen Sie K_f auf Symmetrie. 10

Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von K_f und geben Sie das Krümmungsverhalten von K_f an.

Zeichnen Sie K_f für $-1{,}5 \leq x \leq 1{,}5$.

2.2 K_f und die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ schließen im 1. Quadranten eine Fläche ein. 5

Markieren Sie die beschriebene Fläche in Ihrer Zeichnung aus 2.1.

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

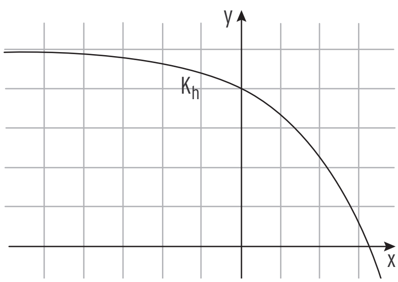
2.3 Die Funktion g ist eine Polynomfunktion 3. Grades mit einer Nullstelle im Ursprung und einer weiteren an der Stelle $x = 3$, an der das Schaubild die x-Achse berührt. 4

Weiterhin liegt der Punkt $P(-1 \mid -4)$ auf dem Schaubild von g.

Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g.

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = -e^{0{,}5x} + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_h.

2.4 Berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von K_h. 4



2.5 Die Punkte $A(0 \mid 0)$, $B(u \mid 0)$, $C(u \mid h(u))$ und $D(0 \mid h(u))$ bilden für $0{,}5 \leq u \leq 3$ ein Rechteck. 7

Skizzieren Sie diesen Sachverhalt.

Bestimmen Sie u so, dass der Umfang des Rechtecks maximal wird.

Geben Sie den maximalen Umfang an.

30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2024

Teil 2 mit Hilfmittel

Aufgabe 3 **Punkte**

Die Leistung einer Photovoltaikanlage in Kilowatt (kW) an einem Tag wird beschrieben durch die Funktion p mit $p(t) = 6 \cdot \sin(\frac{\pi}{12}t)$ mit $t \in [0; 12]$.
t ist die Zeit in Stunden nach Beobachtungsbeginn,
t = 0 entspricht der Uhrzeit 7 Uhr morgens.

3.1 Skizzieren Sie das Schaubild von p. 5
Geben Sie an, zu welcher Uhrzeit die Photovoltaikanlage die höchste Leistung hat. Geben Sie diese Leistung an.

3.2 Für den Betrieb eines Wäschetrockners ist eine Leistung von 3,5 kW erforderlich. 7
Berechnen Sie, in welchem Zeitraum der Wäschetrockner ausschließlich mit der Photovoltaikanlage betrieben werden kann.
Die Trocknung einer Ladung Wäsche dauert 3 Stunden.
Geben Sie an, zu welcher Uhrzeit der Wäschetrockner hierzu spätestens gestartet werden muss.

3.3 Unter Leistung versteht man die momentane Änderungsrate der Energie. 5
Berechnen Sie das Integral $\int_2^{10} p(t)\,dt$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -2 \cdot e^{0,25x} + x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild heißt K_f.

3.4 Zeichnen Sie K_f für $-5 \leq x \leq 8$. 4
Geben Sie die Gleichung der Asymptote an.

3.5 Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes von K_f und untersuchen Sie, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt. 6
Geben Sie an, wie K_f verschoben werden muss, damit der Extrempunkt auf der x-Achse liegt.

3.6 Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an K_f an der Stelle x = 0. 3

30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2024

Teil 2 mit Hilfmittel

Aufgabe 4 **Punkte**

Name: ____

Bitte legen Sie dieses Blatt Ihrer Prüfungsarbeit bei.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f.

4.1 Ermitteln Sie die Schnittpunkte von K_f mit der x-Achse. 9

Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte von K_f.

Zeichnen Sie das Schaubild für $-2 \leq x \leq 5$.

4.2 Zeigen Sie, dass die Gerade g: $y = \frac{9}{4}x + \frac{5}{4}$ das Schaubild K_f in $R(-1 \mid -1)$ berührt und in $S(5 \mid 12{,}5)$ schneidet. 8

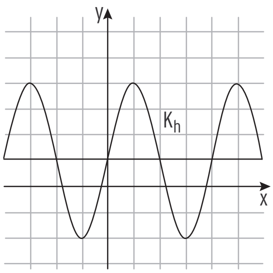
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche von der Geraden g und K_f eingeschlossen wird.

4.3 Überprüfen Sie, ob Punkte auf K_f existieren, in denen die Steigung der Tangente den Wert -2 annimmt. 4

Geben Sie die kleinstmögliche Steigung von K_f an.

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = 3\sin(2x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_h.

4.4 Ergänzen Sie die Skalierung im nebenstehenden Koordinatensystem. 2



4.5 Beschreiben Sie eine Vorgehensweise zur Bestimmung der Koordinaten von zwei Wendepunkten für $x \leq 0$. 3

Geben Sie die Koordinaten für zwei dieser Punkte an.

4.6 Begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. 4

(1) Die Ableitungsfunktion h' von h hat die gleiche Periode wie h.

(2) Die zweite Ableitungsfunktion h'' von h hat die gleiche Amplitude wie h.

30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2024 – Lösungen

Teil 1 ohne Hilfsmittel

www.mvurl.de/7zaa

Aufgabe 1

1.1 $f(x) = x^3 - 12x$

Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 12$; $f''(x) = 6x$

Bedingung: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4$

Lösungen: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$

Mit $f''(-2) = -12 \neq 0$ und $f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = 16$ erhält man den Extrempunkt $E_1(-2 \mid 16)$.

Mit $f''(2) = 12 \neq 0$ und $f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = -16$ erhält man den Extrempunkt $E_2(2 \mid -16)$.

1.2 $x \cdot (x^3 + 1) \cdot (2x - 3) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x = 0$ oder $x^3 + 1 = 0$ oder $2x - 3 = 0$

Lösungen: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[3]{-1} = -1$, $x_3 = \frac{3}{2}$

1.3 Schaubild mit der Gleichung $y = e^x$

Spiegelung an der x-Achse: $y = -e^x$

Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2: $y = -2e^x$

Verschiebung 3 nach oben: $y = -2e^x + 3$

1.4 (1) wahr

$K_{g'}$ hat genau zwei Extrempunkte, somit hat K_g genau zwei Wendepunkte.

(2) falsch

K_g hat nur einen Hochpunkt bei $x = -1$, da nur hier das Vorzeichen von $K_{g'}$ von positiv zu negativ wechselt.

(3) falsch

Die Ableitungsfunktion hat an drei Stellen den Funktionswert 1.

An diesen verläuft K_g parallel zur 1. Winkelhalbierenden $(y = x)$.

Baden-Württemberg
MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

Fachhochschulreifeprüfung an den Berufskollegs u. a.

Haupttermin: **Prüfungsfach:** **Bearbeitungszeit:**	**2025** **Mathematik 6-stündig (FHSR) - Pflichtteil (Teil 1)** **Ca. 60 Minuten**
Hilfsmittel:	Deutsches Rechtschreibenachschlagewerk
Bemerkungen:	Der **hilfsmittelfreie Prüfungsteil** ist von allen Prüflingen zu bearbeiten **(Pflichtteil).** Die Prüflinge werden nach **ca. 60 Minuten** informiert, dass die **anteilige Prüfungszeit** verstrichen ist. Wenn der **hilfsmittelfreie Teil** der Prüfung in Form der Schülerlösung und des Aufgabenteils unwiderruflich abgegeben wurde, erhalten die Prüflinge die zugelassenen Hilfsmittel für den **hilfsmittelgestützten Prüfungsteil (Teil 2).**
Seitenzahl:	Der Aufgabensatz umfasst 2 Seiten (einschließlich Deckblatt). Sie sind verpflichtet, die vorgelegten Aufgaben vor Bearbeitungsbeginn auf Vollständigkeit zu überprüfen (Anzahl der Blätter, Anlagen usw.).

Prüfung zur Fachhochschulreife 2025

Haupttermin 2025

Mathematik 6-stündig (FHSR) - Pflichtteil (Teil 1)

Aufgabe 1

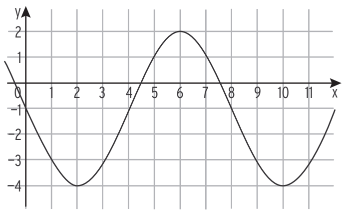
1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 6x^2$, $x \in \mathbb{R}$. 4

1.2 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{-1}^{1} (5x^4 + 1)\,dx$. 4

1.3 Lösen Sie das lineare Gleichungssystem. 6

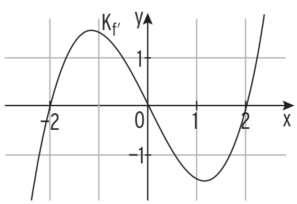
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$
$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1$$

1.4 Gegeben ist das Schaubild einer trigonometrischen Funktion. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm. 4



1.5 Gegeben ist das Schaubild $K_{f'}$ einer Ableitungsfunktion f'. 8

Beurteilen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.



(1) Das Schaubild von f hat an der Stelle x = 2 einen Hochpunkt.

(2) Das Schaubild von f hat genau zwei waagrechte Tangenten.

(3) $K_{f'}$ ist auch das Schaubild der Ableitungsfunktion von f(x) + 2.

(4) Es gibt eine Funktion f mit $f(x) > 0$ für alle x.

1.6 Betrachtet wird das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. 4
Weisen Sie nach, dass eine Verschiebung des Schaubildes um 1 nach links gleichbedeutend mit einer Streckung in y-Richtung ist.

30

Baden-Württemberg
MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

Fachhochschulreifeprüfung an den Berufskollegs u. a.

Haupttermin: **Prüfungsfach:** **Bearbeitungszeit:**	**2025** **Mathematik 6-stündig (FHSR) - Aufgabe 2 bis 4 (Teil 2)** **Ca. 140 Minuten**
Hilfsmittel:	„Merkhilfe Mathematik" für die Sekundarstufe II an beruflichen Schulen in Baden-Württemberg Eingeführter wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne Handbuch) Deutsches Rechtschreibenachschlagewerk
Bemerkungen:	Aus den vorgelegten **drei Aufgaben** wählen die Prüflinge **zwei Aufgaben** zur Bearbeitung aus. Jede Aufgabe ist mit einem neuen Reinschriftbogen zu beginnen. Wenn der **hilfsmittelfreie Teil** der Prüfung in Form der Schülerlösung und des Aufgabenteils unwiderruflich abgegeben wurde, erhalten die Schülerinnen und Schüler die zugelassenen Hilfsmittel für den **hilfsmittelgestützten Prüfungsteil (Teil 2)**.
Seitenzahl:	Der Aufgabensatz umfasst 4 Seiten (einschließlich Deckblatt). Sie sind verpflichtet, die vorgelegten Aufgaben vor Bearbeitungsbeginn auf Vollständigkeit zu überprüfen (Anzahl der Blätter, Anlagen usw.).

Prüfung zur Fachhochschulreife 2025

Haupttermin 2025

Mathematik 6-stündig (FHSR) - Aufgaben 2 bis 4 (Teil 2)

Aufgabe 2

2.1 Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm einer Polynomfunktion p vom Grad 3, deren Schaubild die x-Achse bei x = 0 berührt, an der Stelle x = 6 die x-Achse schneidet und durch den Punkt P(3 | 9) verläuft. 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2$, $x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild heißt K_f.

2.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Hoch- und Tiefpunktes von K_f. 7
Zeichnen Sie K_f für $-2{,}5 \leq x \leq 6{,}5$.

2.3 K_f schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. 5
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Bei einem Reaktorunglück werden radioaktive Stoffe freigesetzt. Die Strahlenbelastung in Mikrosievert pro Tag (μSv/d) wird beschrieben durch die Funktion s mit $s(t) = a \cdot e^{kt}$, $t \geq 0$. Dabei ist t die Zeit nach dem Unglück in Tagen.

2.4 Die nachfolgende Tabelle zeigt die Ergebnisse einer Messung: 3

Zeit in Tagen	0	8
Strahlenbelastung in μSv/d	600	120

Bestimmen Sie a und k.

Im Folgenden gilt $s(t) = 550 \cdot e^{-0{,}15 \cdot t}$, $t \geq 0$.

2.5 Bestimmen Sie die Strahlenbelastung am 10. Tag und am 20. Tag. 4
Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Strahlenbelastung in diesem Zeitraum.

2.6 Als unbedenklich für die Bevölkerung gilt ein Grenzwert von 3 μSv/d. 3
Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen dieser Grenzwert unterschritten wird.

2.7 Berechnen Sie die gesamte Strahlenbelastung in μSv,, der die Bevölkerung innerhalb der ersten 30 Tage ausgesetzt wird. 4

30