Patyna

Mathematik

für das Berufliche Gymnasium in Niedersachsen
Kerncurriculum und Bildungsstandards
Qualifikationsphase – Schwerpunkt Wirtschaft – Analysis

Merkur Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasserin:

Marion Patyna

Umschlag: Hintergrund: ECE, Ernst-August-Galerie, Hannover,
Kreis rechts oben: Candy Box — Fotolia.com, Kreis Mitte: Colourbox.de,
Kreis links: Syda Productions — Colourbox.de, Grafik: Colourbox.de

* * * * * * * * * *

3. Auflage 2023

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0686-03
ISBN 978-3-8120-0686-6

Vorwort

Das vorliegende Buch ist der zweite Band von drei Büchern der Reihe „Mathematik für das **Berufliche Gymnasium** in Niedersachsen – Kerncurriculum und Bildungsstandards“ und damit ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht mit dem Schwerpunkt Wirtschaft am Beruflichen Gymnasium in Niedersachsen. Die Basis dieses Buches ist das neue *Kerncurriculum (KC)* von 2018, das wiederum auf den *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* aus dem Jahr 2012 basiert.

Die Autorin berücksichtigt bei der Erstellung dieser Bücher die **inhaltsbezogenen** und die **prozessbezogenen Kompetenzen**, die die Schülerinnen und Schüler gemäß KC während der drei Jahre am Beruflichen Gymnasium erwerben sollen. Der in der BbS VO bzw. EB BbS VO verankerten **Handlungsorientierung** wird durchgängig Rechnung getragen. Jedes Hauptkapitel beginnt mit **berufsbezogenen Lernsituationen gemäß SchuCu-BBS**, die die Schülerinnen und Schüler **eigenverantwortlich** und **selbstorganisiert** mithilfe der Informationstexte und der Beispielaufgaben aus den nachfolgenden Abschnitten bearbeiten und sich so die notwendigen Kompetenzen aneignen können. Jede Lernsituation umfasst nicht nur die zugrunde liegende **Handlungssituation,** sondern auch **problemorientierte Aufgabenstellungen.** Neben den Hinweisen auf die benötigten und die zu erzielenden Kompetenzen werden Hinweise zur Bearbeitung und ergänzend Hinweise für die Um-setzung im Distanzunterricht gegeben.Die vorgeschlagenen Sozialformen sind in grün hervorgehoben und die Handlungsergebnisse in blau. Die Abfolge der Lernsituationen ist so konzipiert, dass die Schülerinnen und Schüler immer selbstständiger agieren können und müssen. Das mathematische und wirtschaftliche Fachvokabular wird durchgängig rot hervorgehoben. Auf diese Weise erhalten die Schülerinnen und Schüler einen Überblick über die zu lernenden Vokabeln. Außerdem sind alle roten Begriffe im Stichwortverzeichnis aufgeführt. Während sich die Lernenden im Buch für die Einführungsphase die wirtschaftlichen Erklärungen mittels QR-Code vorlesen lassen konnten und parallel die entsprechenden Seiten im Buch mitlesen mussten, um sich die Fachsprache einfacher anzueignen, erhalten die Lernenden in diesem Buch jeweils ein Kurzvideo für die wirtschaftlichen Erklärungen. Das Mitlesen im Buch ist nicht unbedingt notwendig, weil die Lernenden in der Einführungsphase bereits die notwendigen Kompetenzen zum Verstehen eines mathematisch-wirtschaftlichen Kurzvideos erworben haben und sich so die neuen Inhalte und die neue Fachsprache allein mittels Video aneignen können.

Um die in den Lernsituationen benötigten Fähigkeiten und Fertigkeiten im Nachgang zu trainieren und zu festigen, enthält das Buch eine Vielzahl verschiedener Übungsaufgaben, die je nach Aufgabentyp händisch und/oder mit dem passenden **Technologieeinsatz** (CAS) gelöst werden können und durchgängig mithilfe von **Operatoren** formuliert werden. In den zugehörigen Arbeitsheften finden sich weitere Übungen und/oder Spiele bzw. Rätsel, um Fachvokabeln zu lernen, das strukturierte Vorgehen bei der Bearbeitung von Lernsituationen zu üben und benötigte innermathematische Kompetenzen zu erwerben. Dadurch wird zielgerichtet der Kompetenzaufbau erreicht und die Schülerinnen und Schüler, die am **Zentralabitur Mathematik** teilnehmen werden, können die Aufgaben des hilfsmittelfreien Teils und des Wahlteils adäquat und sachgerecht bearbeiten.

Die Reihenfolge der einzelnen Kapitel kann als Basis für den Aufbau des **schulinternen Curriculums** und der **Jahresplanung** dienen, muss sie aber nicht. Die Autorin hat darauf geachtet, dass die Lehrkräfte ihren Unterricht, mithilfe dieser Bücher individuell aufbauen können, weil die mathematischen, inhaltsbezogenen Kompetenzen gemäß **Spiralcurriculum** in die Berufsbezüge integriert werden. Außerdem unterstützt die zu dieser Reihe gehörende Formelsammlung, die sich auf **alle** inhaltsbezogenen Kompetenzen des Kerncurriculums bezieht, das eigenständige und selbstorganisierte Lernen. Der Aufbau der Formelsammlung orientiert sich an dem Aufbau der Buchreihe, ist aber als Nachschlagewerk fachsystematisch strukturiert und thematisch sortiert.

Die Verfasserin, Februar 2023

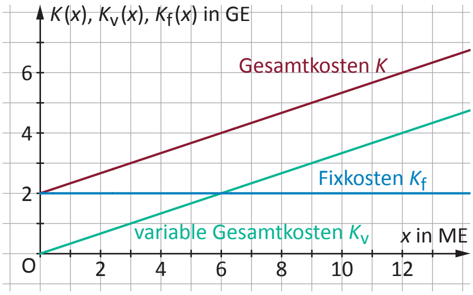
3.2 Wirtschaftliche Zusammenhänge

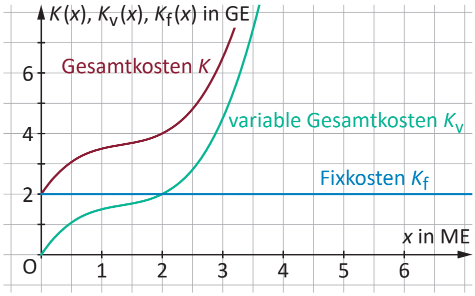
mvurl.de/huxu

Die **Gesamtkosten**[1] K für eine Produktion setzen sich aus **Fixkosten** und **variablen Gesamtkosten** zusammen. Der Graph der Gesamtkostenfunktion kann linear oder s-förmig/ertragsgesetzlich verlaufen; er zeigt die Gesamtkosten für eine Produktion in Abhängigkeit von der produzierten Ausbringungsmenge x.

$K(x) = K_v(x) + K_f(x) = mx + b$ mit $m, b > 0$ oder

$K(x) = K_v(x) + K_f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, c, d > 0$ und $b < 0$.





Aus der s-förmigen/ertragsgesetzlichen Gesamtkostenfunktion K können verschiedene weitere Kostenfunktionen hergeleitet werden. Durch die Umrechnung der Gesamtkosten auf je eine Produktionseinheit entstehen die **Stückkostenfunktionen**, die zu der Klasse der **gebrochenrationalen Funktionen** gehören:

Stückkostenfunktion

Die Stückkosten werden oft auch als Durchschnitts- oder Einheitskosten bezeichnet und umfassen die Kosten, die sich auf eine Produktionseinheit beziehen.

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{K_v(x) + K_f(x)}{x} = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$$

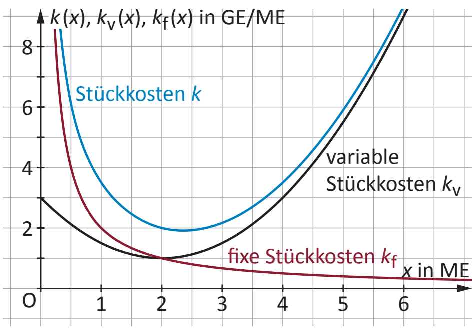
Die Stückkostenfunktion ist eine **unecht gebrochenrationale Funktion**, die einen **Pol** bei $x = 0$ aufweist. Daraus ergibt sich der ökonomische Definitionsbereich $D_{ök} = \mathbb{R}_{>0}$ bzw. $D_{ök} = \left(0; x_{Kap}\right]$.

Funktion der variablen Stückkosten

Die variablen Stückkosten sind die auf eine Produktionseinheit entfallenden variablen Gesamtkosten.

$$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{ax^3 + bx^2 + cx}{x} = ax^2 + bx + c$$

Die Funktion der variablen Stückkosten ist eine unecht gebrochenrationale Funktion mit einer **schließbaren Lücke** bei $x = 0$ mit $k_v(0) = c \Rightarrow P_{SL}(0|c)$



Daraus ergibt sich der ökonomische Definitionsbereich $D_{ök} = \mathbb{R}_{>0}$ bzw. $D_{ök} = \left(0; x_{Kap}\right]$.

1 Nachzulesen im Buch für die Einführungsphase, S. 56–58 oder in der Formelsammlung.

Funktion der fixen Stückkosten

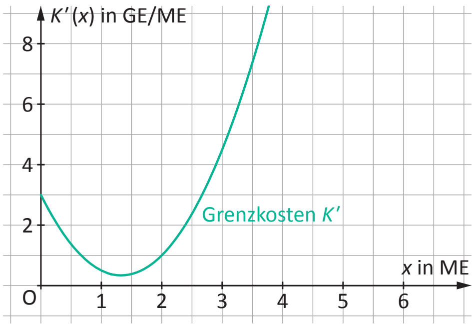
Die fixen Stückkosten umfassen die anteiligen Fixkosten pro Produktionseinheit.

$$k_f(x) = \frac{K_f(x)}{x} = \frac{d}{x}$$

Die Funktion der fixen Stückkosten ist eine **echt gebrochenrationale Funktion** mit einem **Pol** bei $x = 0$. Die **Asymptote** liegt auf der Abszissenachse, d. h., dass der Fixkostenanteil der Stückkosten gegen null strebt; er wird unendlich gering, aber nie genau null. Der ökonomische Definitionsbereich liegt bei $D_{ök} = \mathbb{R}_{>0}$ bzw. $D_{ök} = \left(0; x_{Kap}\right]$.

Grenzkostenfunktion

Die **Grenzkosten**[1] K' entsprechen den Kosten, die zusätzlich anfallen, wenn eine sehr kleine Einheit zusätzlich produziert wird. Bei einer s-förmigen/ertragsgesetzlichen Gesamtkostenfunktion ergibt sich folgende Funktionsgleichung für die Grenzkostenfunktion:
$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.
Die Grenzkostenfunktion ist eine ganzrationale Funktion 2. Grades.



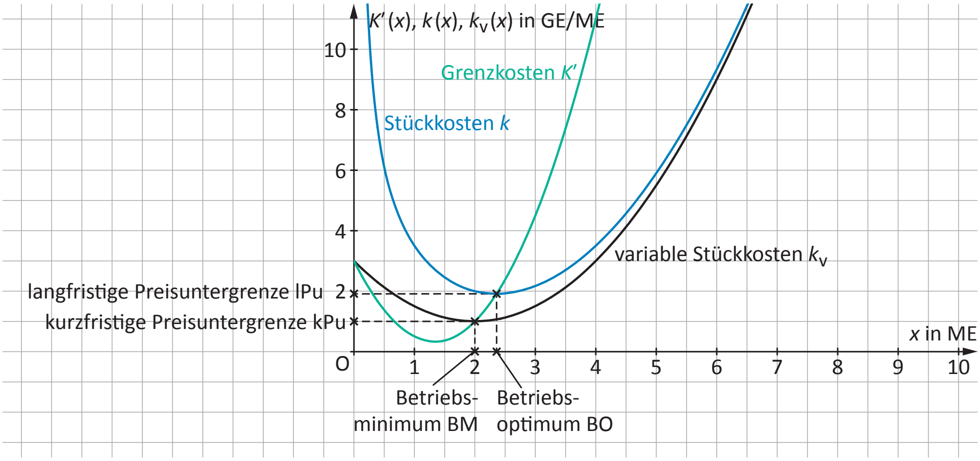
Die **Festlegung des Preises** kann mithilfe verschiedener Analysen erfolgen:
Das **Betriebsoptimum (BO)** entspricht der Produktionsmenge, bei der das Verhältnis zwischen Gesamtkosten und Produktionsmenge am besten ist, d. h., das BO entspricht der Tiefstelle der Stückkostenfunktion. Der zugehörige Funktionswert $k(x_{BO})$ gibt die **langfristige Preisuntergrenze (lPu)** an. Sollte der Marktpreis der lPu entsprechen, dann werden die Gesamtkosten gedeckt, das Unternehmen erzielt keinen Gewinn und realisiert keinen Verlust. Das Betriebsoptimum ist demnach mit der Gewinnschwelle gleichzusetzen.
Es gibt zwei Berechnungsmöglichkeiten für das BO und die lPu:
$K'(x) = k(x) \Rightarrow S(x_{BO} \mid \text{lPu})$ oder
$k'(x) = 0 \Rightarrow x_{BO}$ und $k(x_{BO}) = \text{lPu}$

Das **Betriebsminimum (BM)** entspricht der Produktionsmenge, bei der die variablen Stückkosten minimal sind. Der zugehörige Funktionswert $k_v(x_{BM})$ entspricht der **kurzfristigen Preisuntergrenze (kPu)**. Sinkt der Marktpreis unter die kPu, sollte die Produktion eingestellt werden, weil nicht einmal die variablen Stückkosten gedeckt werden. Das BM ist demnach mit der Produktionsschwelle gleichzusetzen. Entspricht der Marktpreis der kPu, so realisiert das Unternehmen Verluste in Höhe der Fixkosten.

Fortsetzung

1 Nachzulesen im Buch für die Einführungsphase, S. 162 oder in der Formelsammlung.

Es gibt zwei Berechnungsmöglichkeiten für das BM und die kPu:
$K'(x) = k_v(x) \Rightarrow S(x_{BM}|\text{kPu})$ oder
$k_v'(x) = 0 \Rightarrow x_{BM}$ und $k_v(x_{BO}) = \text{kPu}$



Preisfestlegung im Polypol

Der Polypolist wird als Mengenanpasser die Menge herstellen, die zum maximalen Gewinn führt. Das Gewinnmaximum wird über die notwendige Bedingung $G'(x) = 0$ ermittelt.

$G(x) = E(x) - K(x)$

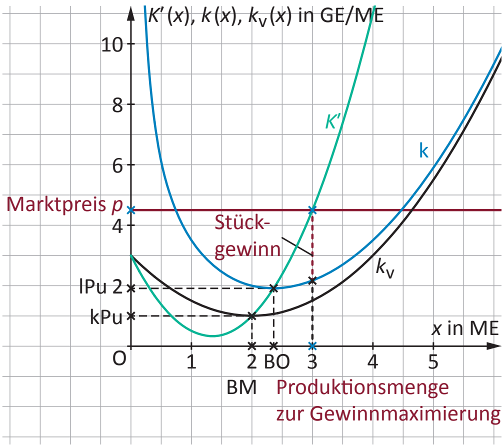
$\Rightarrow G'(x) = E'(x) - K'(x) = 0$

$\Rightarrow E'(x) = K'(x)$

Der Erlös ergibt sich im Polypol aus

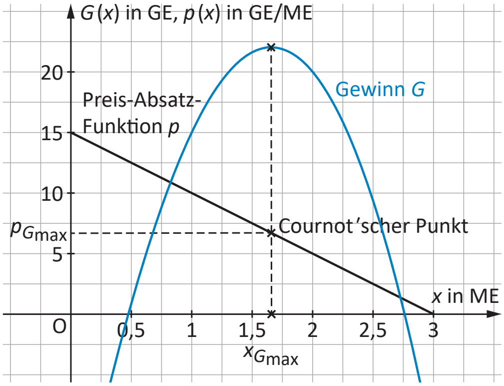
$E(x) = p \cdot x \Rightarrow E'(x) = p$

Daraus folgt für die Berechnung der gewinnmaximalen Menge



$E'(x) = K'(x) \Rightarrow p = K'(x)$, d. h., der Polypolist ermittelt den Schnittpunkt der Preisgeraden p mit seiner Grenzkostenfunktion, um die gewinnmaximale Menge zu bestimmen. Die Grenzkostenfunktion entspricht der **individuellen Angebotsfunktion** des Polypolisten.

Preisfestlegung im Monopol



Im Monopol erfolgt die Preisfestlegung über die gewinnmaximale Menge und den **Cournot'schen Preis**[1]. Die gewinnmaximale Menge wird mithilfe der hinreichenden Bedingungen für Hochpunkte ermittelt:

$G(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$

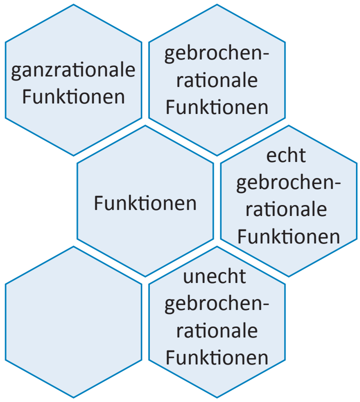
$\Rightarrow\; G'(x) = 3 a x^2 + 2 b x + c = 0$ und

$G''(x) = 6 a x + 2 b < 0$.

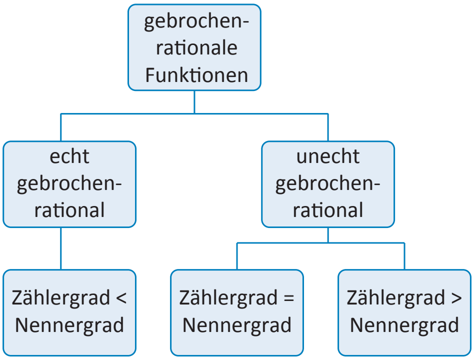
Die so bestimmte gewinnmaximale Menge $x_{G_{max}}$ wird in die Preis-Absatz-Funktion $p(x) = m x + b$ eingesetzt $p\left(x_{G_{max}}\right) = m x_{G_{max}} + b$ und so der Cournot'sche Preis berechnet. Stellt der Monopolist die gewinnmaximale Menge her und verkauft sie vollständig am Markt zum Cournot´schen Preis, so erzielt er den maximalen Gewinn.

1 Nachzulesen im Buch für die Einführungsphase, S. 54 – 55 oder in der Formelsammlung.

3.3 Ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen



Bei der Untersuchung der Kosten-, Erlös- und Gewinnsituation eines Unternehmens sind nicht mehr nur **ganzrationale Funktionen**[1], sondern auch **gebrochenrationale Funktionen**[2] $f\colon f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ von Bedeutung. Es handelt sich bei den Stückkosten-, Stückerlös- und Stückgewinnfunktionen um gebrochenrationale Funktionen, deren Nennerfunktion $N(x) = x$ entspricht $f(x) = \frac{Z(x)}{x}$, wobei die Zählerfunktion gemäß ihrer wirtschaftlichen Bedeutung eine ganzrationale Funktion ersten bis dritten Grades sein kann und so echt gebrochenrationale oder unecht gebrochenrationale Funktionen entstehen.
Die Funktionsklasse der gebrochenrationalen Funktionen wird anhand des Grades der ganzrationalen Zähler- bzw. Nennerfunktion untergliedert.



Beispiel 1

Das Unternehmen *Werkzeug GmbH* stellt zukünftig auch *Steckschlüssel für Linkshänder* her und gilt für dieses Produkt als Monopolist. Aufgrund der Produktionsanpassung können die Gesamtkosten für diese Produktion durch die Funktion K mit $K(x) = 0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x + 50$ modelliert werden, dabei wird x in Mengeneinheiten (ME) und $K(x)$ in Geldeinheiten (GE) angegeben.
Die Controlling-Abteilung möchte vor der Preisfestsetzung einige Analysen durchführen:

1 Nachzulesen im Buch für die Einführungsphase, Kapitel 4 ab S. 60 oder in der Formelsammlung.
2 Klassifikation nachzulesen im Buch für die Einführungsphase, S. 84 oder in der Formelsammlung.

- Bestimmen der Produktionsmenge mit den geringsten Grenzkosten.
- Ermitteln des **Betriebsoptimums (BO)** und der **langfristigen Preisuntergrenze (lPu)**.
- Ermitteln des **Betriebsminimums (BM)** und der **kurzfristigen Preisuntergrenze (kPu)**.

Übernehmen Sie die rechnerische und grafische Analyse und interpretieren Sie die Ergebnisse im Hinblick auf die Preisfestsetzung.

Lösung

Aufstellen der benötigten Funktionsgleichungen und Bestimmen der zugehörigen Definitionsbereiche

$K(x) = 0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x + 50$ mit $D_{ök} = [0; \infty)$

- Grenzkostenfunktion K'
  $K'(x) = 0{,}12x^2 - 3x + 22$ mit $D_{ök} = [0; \infty)$
- Stückkostenfunktion k
  $k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x + 50}{x} = 0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22 + \frac{50}{x}$ mit $D_{ök} = (0; \infty)$, weil nicht durch null dividiert werden darf, wird die null aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen.
- Funktion der variablen Stückkosten k_v
  $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x}{x} = 0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22$ mit $D_{ök} = (0; \infty)$, weil nicht durch null dividiert werden darf, wird die null aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen.

Bestimmen des Tiefpunktes der Grenzkostenfunktion

Hinreichende Bedingung $K''(x) = 0$ und $K'''(x) > 0$

CAS $T(12{,}5|3{,}25)$

BO und lPu ermitteln

$k'(x) = 0$ und $k''(x) > 0$, alternativ kann auch der Ansatz $K'(x) = k(x)$ gewählt werden.

CAS $T(20{,}27|10{,}5)$

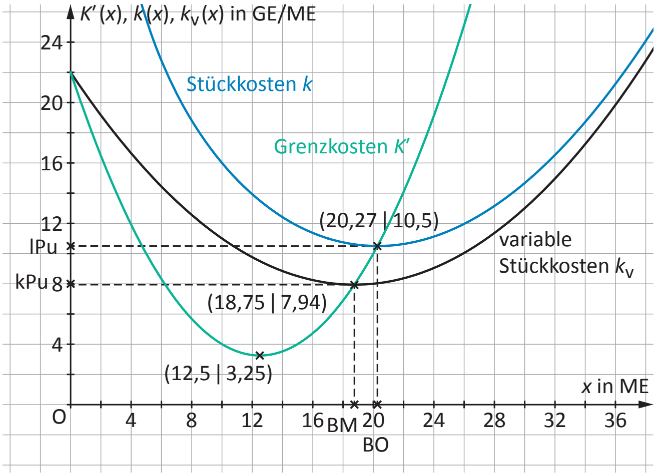
BM und kPu ermitteln

$k_v'(x) = 0$ und $k_v''(x) > 0$, alternativ kann auch der Ansatz $K'(x) = k_v(x)$ gewählt werden.

CAS $T(18{,}75|7{,}94)$

Fortsetzung

Grafik



Interpretation

Bei einer Produktion von 12,5 ME entstehen die geringsten Grenzkosten, d. h., der momentane Gesamtkostenanstieg ist am kleinsten. Die Kosten für die Produktion einer zusätzlichen kleinen Einheit betragen 3,25 GE/ME.

Wenn 18,85 ME des Steckschlüsselsatzes für Linkshänder produziert und vollständig für einen Preis in Höhe von 7,94 GE/ME am Markt verkauft werden, dann realisiert die *Werkzeug GmbH* Verluste in Höhe der Fixkosten, also in Höhe von 50 GE. Wenn die *Werkzeug GmbH* hingegen 20,27 ME zum Preis von 10,5 GE/ME produziert und verkauft, dann entstehen weder Verluste noch Gewinn. Die Gewinnschwelle ist erreicht.

Um Gewinn zu erzielen, muss der Preis pro ME Steckschlüsselsatz höher sein als 10,5 GE/ME und/oder es müssen mehr als 20,27 ME verkauft werden. Jede zusätzlich produzierte kleine Mengeneinheit führt zu steigenden Grenzkosten, denn 20,27 ME sind größer als 12,5 ME (Tiefstelle der Grenzkostenfunktion) und der Graph der Grenzkostenfunktion verläuft nach dem Tiefpunkt progressiv steigend. Sollen die Grenzkosten nicht steigen, muss der Preis und nicht die Menge erhöht werden, um Gewinn zu erzielen.

Beispiel 2

Der Auszubildende der *Werkzeug GmbH* ist zurzeit in der Controlling-Abteilung eingesetzt und soll die Stückkostenfunktionen mathematisch analysieren, um in dem Abteilungshandbuch die Seiten zur Preisfestsetzung zu ergänzen.
Untersuchen Sie die Stückkostenfunktion k mit
$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x + 50}{x} = 0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22 + \frac{50}{x}$
und die Funktion der variablen Stückkosten k_v mit
$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x}{x} = 0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22$ im Hinblick auf besondere Eigenschaften und markante Punkte.
Erstellen Sie die fehlenden Seiten des **Abteilungshandbuches**, indem Sie einen Ablaufplan zur Erstellung der Grafik für die Darstellung des BO und BM sowie der lPu und kPu anfertigen.

Lösung

Untersuchung der Stückkostenfunktion *k*
Besondere Eigenschaften
$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x + 50}{x} = 0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22 + \frac{50}{x}$
Die Zählerfunktion ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, die Nennerfunktion eine lineare Funktion. Daraus ergibt sich, dass die Stückkostenfunktion eine **unecht gebrochenrationale Funktion** ist, weil der Zählergrad größer als der Nennergrad ist.

Der **Definitionsbereich** wird mithilfe der Nennerfunktion ermittelt. Da eine Division durch null nicht definiert ist, müssen die Nennernullstellen ermittelt werden.
$N(x) = x = 0 \;\Rightarrow\; x$ darf nicht null werden, d. h., dass die null aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden muss und damit eine Definitionslücke darstellt.
$\Rightarrow \quad D_{math} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $D_{ök} = (0; \infty)$.
Um festzustellen, welche Art von Definitionslücke vorliegt, wird die Nennernullstelle in den Zähler $Z(x) = 0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x + 50$ eingesetzt.
$Z(0) = 0{,}04 \cdot 0^3 - 1{,}5 \cdot 0^2 + 22 \cdot 0 + 50 = 50 \neq 0$
Wenn die Nennernullstelle – wie in diesem Fall – nicht auch eine Zählernullstelle ist, handelt es sich um einen **Pol**, der in diesem Fall auf der Ordinatenachse liegt.
$\Rightarrow$ Bei $x = 0$ liegt ein Pol vor, d. h., der Graph der Stückkostenfunktion besteht aus zwei Teilen: ein Teil, der links vom Pol liegt, und einer rechts vom Pol. Um herauszufinden, ob es sich um einen Pol mit oder ohne **Vorzeichenwechsel (VZW)** handelt, muss das Verhalten des Graphen auf beiden Seiten des Pols untersucht werden. Dafür werden x-Werte, die sehr dicht am Pol liegen, in die Funktionsgleichung eingesetzt und die Funktionswerte verglichen.

Fortsetzung

	links vom Pol		rechts vom Pol	
x	– 0,05	– 0,01	0,05	0,01
$k(x)$	– 977,9	– 4 977	1 021,9	5 021,9
Beschreibung	Je näher der x-Wert dem Pol kommt, desto **kleiner** wird der Funktionswert.		Je näher der x-Wert dem Pol kommt, desto **größer** wird der Funktionswert	
VZW	$-\infty$		$+\infty$	

Die Untersuchung zeigt, dass bei $x = 0$ ein Pol mit VZW von – zu + vorliegt.
Der gekürzte Funktionsterm der Stückkostenfunktion besteht aus zwei Abschnitten, einem ganzrationalen und einem gebrochenrationalen:

$$k(x) = \frac{0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x + 50}{x} = \frac{x(0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22) + 50}{x}$$

$$k(x) = \frac{x(0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22)}{x} + \frac{50}{x} = 0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22 + \frac{50}{x}$$

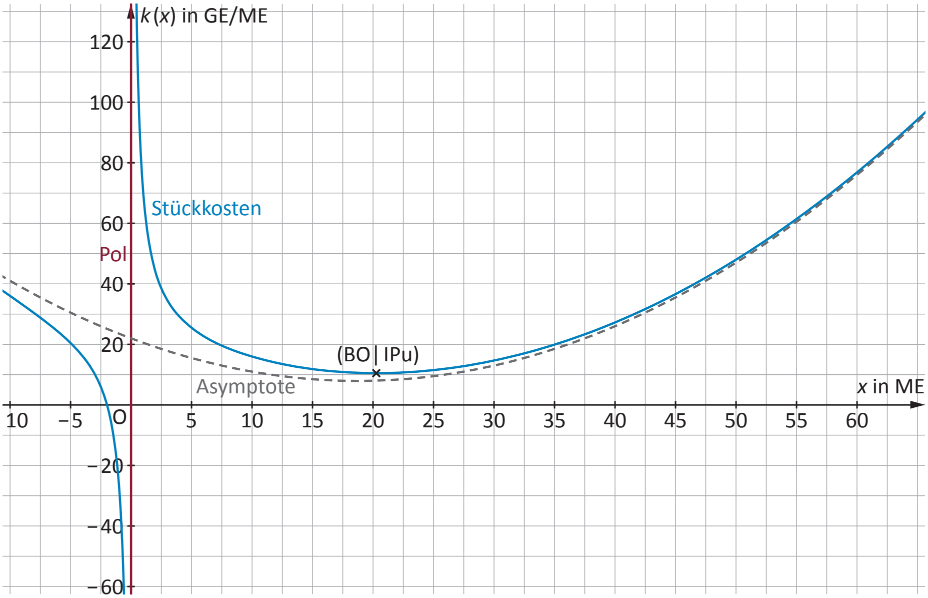
$$k(x) = \underbrace{0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22}_{\text{ganzrational}} + \underbrace{\frac{50}{x}}_{\text{gebrochenrational}}$$

Der ganzrationale Teil des Funktionsterms gibt gleichzeitig den Term der **Asymptote** g an. Da der Zählergrad um zwei größer ist als der Nennergrad, handelt es sich bei der Asymptote um eine ganzrationale Funktion 2. Grades, also eine quadratische Funktion: $g(x) = 0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22$.

Markante Punkte

- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
  Da der Pol auf der Ordinatenachse liegt, gibt es keinen Schnittpunkt mit dieser Achse.
  Für die Nullstellen ergibt sich mithilfe des CAS
  $k(x) = 0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22 + \frac{50}{x} = 0 \;\Rightarrow\; x \approx -1{,}99 \notin D_{ök}$
- Extrempunkte
  $k'(x) = 0 \wedge k''(x) \neq 0$ mit CAS $\Rightarrow$ $T(20{,}27\,|\,10{,}5)$
- Wendepunkte
  $k''(x) = 0 \wedge k'''(x) \neq 0$ mit CAS
  Es existiert kein Wendepunkt.

Grafik



Untersuchung der Funktion der variablen Stückkosten k_v

Besondere Eigenschaften

$$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x}{x} = 0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22$$

Die Zählerfunktion ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades ohne Absolutglied, die Nennerfunktion eine lineare Funktion. Daraus ergibt sich, dass die Stückkostenfunktion eine **unecht gebrochenrationale Funktion** ist, weil der Zählergrad größer als der Nennergrad ist.

Der **Definitionsbereich** wird mithilfe der Nennerfunktion ermittelt. Da eine Division durch null nicht definiert ist, müssen die Nennernullstellen ermittelt werden.
$N(x) = x = 0 \;\Rightarrow\; x$ darf nicht null werden, d. h., dass die null aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden muss und damit eine Definitionslücke darstellt.
$\Rightarrow\; D_{math} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $D_{ök} = (0; \infty)$.

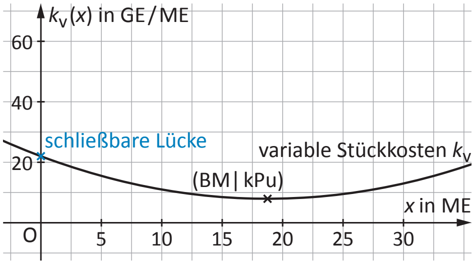
Um festzustellen, welche Art von Definitionslücke vorliegt, wird die Nennernullstelle in den Zähler $Z(x) = 0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x$ eingesetzt.
$Z(0) = 0{,}04 \cdot 0^3 - 1{,}5 \cdot 0^2 + 22 \cdot 0 = 0$
Wenn die Nennernullstelle – wie in diesem Fall – auch eine Zählernullstelle ist, handelt es sich um eine **schließbare (hebbare) Lücke**. Der Graph der Funktion der variablen Stückkosten besteht aus einem Teil, weil die einzige Definitionslücke kein Pol ist. Der gekürzte Funktionsterm der Funktion für die variablen Stückkosten ist eine ganzrationale Funktion 2. Grades.

$$k_v(x) = \frac{\cancel{x}(0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22)}{\cancel{x}} = 0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22$$

Fortsetzung

Mithilfe dieses Terms lässt sich der Funktionswert an der Stelle $x = 0$ berechnen:
$k_v(0) = 0{,}04 \cdot 0^2 - 1{,}5 \cdot 0 + 22 = 22$. Die schließbare Lücke liegt bei $P_{SL}(0|22)$.

Markante Punkte

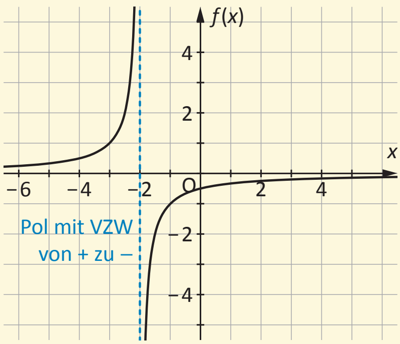


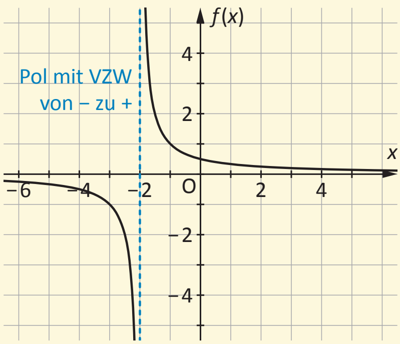
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
  Die schließbare Lücke ist in diesem Fall auch der Schnittpunkt mit der Ordinatenachse $S_y(0|22)$
  Für die Nullstellen ergibt sich mithilfe des CAS:
  $k_v(x) = 0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22 \neq 0$, d. h., dass keine Nullstellen vorhanden sind.
- Extrempunkte
  $k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$ mit CAS $\Rightarrow$ $T(18{,}75|7{,}94)$
- Wendepunkte
  $k_v''(x) = 0 \wedge k_v'''(x) \neq 0$ mit CAS
  Es existiert kein Wendepunkt.

Ablaufplan für das Abteilungshandbuch

Funktionsklasse bestimmen	Zähler und Nennergrad bestimmen	Zähler- und Nennergrad vergleichen	
Definitionsbereich bestimmen	Nennernullstellen bestimmen	Nennernullstellen in Zählerfunktion einsetzen	Art der Definitionslücke bestimmen
Asymptote bestimmen	Funktionsklasse berücksichtigen		
Markante Punkte ermitteln	Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen	Extrempunkte	Wendepunkte
Grafik erstellen	Pol/ schließbare Lücke	Asymptote	markante Punkte
Koordinaten des Tiefpunktes ergänzen	Punkt kennzeichnen	Koordinaten beschriften	

Definitionslücken bei gebrochenrationalen Funktionen

<table>
<tr><td>$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$</td><td colspan="2">Nennernullstellen berechnen
$N(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_{n.d.}$
Die Anzahl der Nennernullstellen hängt von dem Grad der ganzrationalen Funktion ab, die im Nenner steht.
Alle Nennernullstellen müssen aus dem mathematischen Definitionsbereich ausgeschlossen werden. Sie werden als Definitionslücken bezeichnet: $D_{math} = \mathbb{R}\setminus\{x_{n.d}\}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Polstelle</td><td colspan="2">$N(x_{n.d.}) = 0 \wedge Z(x_{n.d.}) \neq 0$
Die Nennernullstelle ist nicht die Zählernullstelle.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">mit Vorzeichenwechsel</td><td>von + zu –


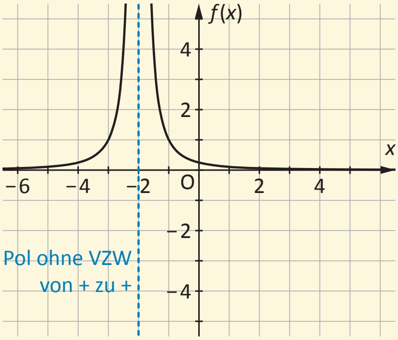
Die Funktionswerte der x-Werte links vom Pol sind positiv und werden immer größer, je dichter die x-Werte an $x_{n.d.}$ liegen.
$\lim\limits_{x_{links} \to x_{n.d.}} f(x) \longrightarrow +\infty$
Die Funktionswerte der x-Werte rechts vom Pol sind negativ und werden immer kleiner, je dichter die x-Werte an $x_{n.d.}$ liegen.
$\lim\limits_{x_{rechts} \to x_{n.d.}} f(x) \longrightarrow -\infty$</td></tr>
<tr><td>von – zu +


Die Funktionswerte der x-Werte links vom Pol sind negativ und werden immer kleiner, je dichter die x-Werte an $x_{n.d.}$ liegen.
$\lim\limits_{x_{links} \to x_{n.d.}} f(x) \longrightarrow -\infty$
Die Funktionswerte der x-Werte rechts vom Pol sind positiv und werden immer größer, je dichter die x-Werte an $x_{n.d.}$ liegen.
$\lim\limits_{x_{rechts} \to x_{n.d.}} f(x) \longrightarrow +\infty$</td></tr>
</table>

Fortsetzung

ohne Vorzeichenwechsel

von + zu +



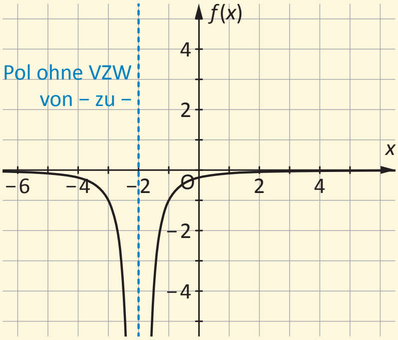
Die Funktionswerte der x-Werte links vom Pol sind positiv und werden immer größer, je dichter die x-Werte an $x_{\text{n. d.}}$ liegen.

$\lim\limits_{x_{\text{links}} \to x_{\text{n. d.}}} f(x) \to +\infty$

Die Funktionswerte der x-Werte rechts vom Pol sind positiv und werden immer größer, je dichter die x-Werte an $x_{\text{n. d.}}$ liegen.

$\lim\limits_{x_{\text{rechts}} \to x_{\text{n. d.}}} f(x) \to +\infty$

von – zu –



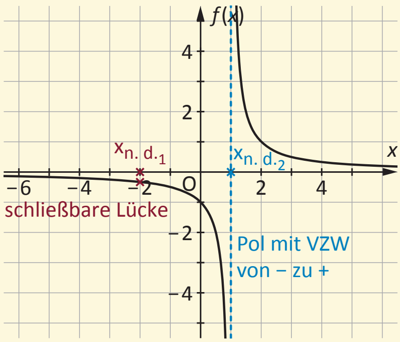
Die Funktionswerte der x-Werte links vom Pol sind negativ und werden immer kleiner, je dichter die x-Werte an $x_{\text{n. d.}}$ liegen.

$\lim\limits_{x_{\text{links}} \to x_{\text{n. d.}}} f(x) \to -\infty$

Die Funktionswerte der x-Werte rechts vom Pol sind negativ und werden immer kleiner, je dichter die x-Werte an $x_{\text{n. d.}}$ liegen.

$\lim\limits_{x_{\text{rechts}} \to x_{\text{n. d.}}} f(x) \to -\infty$

Fortsetzung

schließbare Lücke hebbare Lücke behebbare Lücke	$N(x_{n.\,d.}) = 0 \wedge Z(x_{n.\,d.}) = 0$ Nenner und Zähler haben an derselben Stelle eine Nullstelle.  **Berechnung des Funktionswertes für die schließbare Lücke** $f(x) = \frac{(x - x_{n.\,d._1})}{(x - x_{n.\,d._1})(x - x_{n.\,d._2})} = \frac{\cancel{(x - x_{n.\,d._1})}}{\cancel{(x - x_{n.\,d._1})}(x - x_{n.\,d._2})}$ Durch das Kürzen ergibt sich die Funktion f^* mit $f^*(x) = \frac{1}{(x - x_{n.\,d._2})}$ $f^*(x_{n.\,d._1}) = \frac{1}{(x_{n.\,d._1} - x_{n.\,d._2})}$

Eine **Asymptote**[1] ist ein Graph, an den sich der zu untersuchende Graph im Unendlichen anschmiegt, ohne ihn zu schneiden. Mathematisch wird das sogenannte Langzeitverhalten der Funktion mithilfe einer Grenzwertbetrachtung für immer kleiner werdende x und immer größer werdende x ermittelt:
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = g(x)$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = g(x)$.

Die zu untersuchende Funktion kann beide Grenzwerte besitzen oder sie besitzt nur einen der beiden Grenzwerte, wie z. B. die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$. Bei gebrochenrationalen Funktionen werden drei verschiedene Fälle unterschieden:

Fortsetzung

1 Der Begriff der Asymptote ist von der Untersuchung der Exponentialfunktionen bekannt. Nachzulesen im Buch für die Einführungsphase, S. 144 f. oder in der Formelsammlung. Pole werden auch als senkrechte oder vertikale Asymptoten bezeichnet.

Asymptote

echt gebrochen-rationale Funktion	Zählergrad < Nennergrad	$g(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ Die Asymptote g liegt auf der Abszissenachse.
unecht gebrochen-rationale Funktion	Zählergrad = Nennergrad	$f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1}{b_n x^n + \ldots + b_1}$ $g(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{a_n}{b_n}$ Die Asymptote g ist eine Parallele zur Abszissenachse. Es liegt eine **waagerechte** (horizontale) **Asymptote** vor.
	Zählergrad > Nennergrad	$f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1}{b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1}$ Der Zählergrad ist um eins größer als der Nennergrad $\Rightarrow$ Die Asymptote ist eine Gerade $g(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = mx + b$. Es liegt eine **schiefe Asymptote** vor. Der Funktionsterm kann mithilfe einer Polynomdivision bestimmt werden.
		$f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1}{b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1}$ Der Zählergrad ist um zwei größer als der Nennergrad $\Rightarrow$ Die Asymptote ist eine Parabel $g(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = ax^2 + bx + c$ Der Funktionsterm kann mithilfe einer Polynomdivision bestimmt werden.

mvurl.de/23uq

Die **Polynomdivision** entspricht dem schriftlichen Dividieren. Die Durchführung einer Polynomdivision wird am Beispiel der Stückkostenfunktion $k(x) = \dfrac{0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x + 50}{x}$ gezeigt.

$$(0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x + 50) : x = \underbrace{0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22}_{\text{ganzrationaler Teil}} + \underbrace{\frac{50}{x}}_{\text{Rest}}$$

$$\begin{array}{l r}
-(0{,}04x^3) & \\
\hline
 & 0 - 1{,}5x^2 \\
- & (-1{,}5x^2) \\
\hline
 & 0 + 22x \\
- & (22x) \\
\hline
 & 0 + 50
\end{array}$$

Das Ergebnis besteht aus einem Term, der einer ganzrationalen Funktion entspricht, und einem sogenanntem Rest, der einer echt gebrochenrationalen Funktion entspricht. Der Term der Asymptote entspricht dem ganzrationalen Term des Ergebnisses.

Asymptote: $g(x) = 0{,}04x^2 - 1{,}5x + 22$