Bohner
Ott
Deusch

Mathematik

für das Berufskolleg – Berufliches Gymnasium

Jahrgangsstufe 11

Ausführliche Lösungen

zu im Buch gekennzeichneten Aufgaben

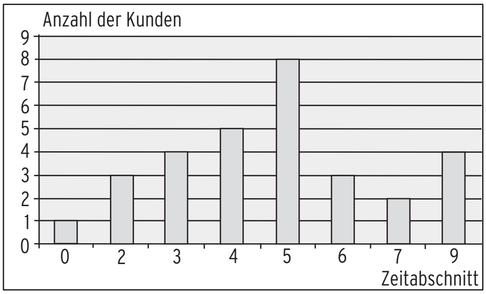
3. Auflage 2023
ISBN 978-3-8120-0665-1

Merkur
Verlag Rinteln

Umschlag: Kreis oben: www. adpic.de, Kreis unten: Robert Kneschke – Fotolia.com

Lehrbuch Seite 24

11 a) Säulendiagramm:
Mit einem Programm erstellt
Oder
Zeichnen mit z. B. dem Maßstab:
1 cm entspricht 2 (Anzahl der Kunden)



b) 30 Zeitabschnitte

$x_{med} = \frac{x_{15} + x_{16}}{2}$

Geordnete Liste

Zeitabschnitt	1	2	3	4	5	...	15	16	...	30
Anzahl der Kunden	0	2	2	2	4	...	5	5	...	9

$ZW = x_{med} = \frac{5 + 5}{2} = 5$

$\text{Mittelwert} = \frac{\text{Anzahl der Kunden}}{30}$

$\overline{x} = \frac{0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + 9 \cdot 4}{30} = \frac{146}{30} = 4{,}86$

$\overline{x} = 4{,}86 \approx 5$

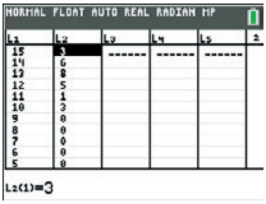
ZW und $\overline{x}$ stimmen nahezu überein.

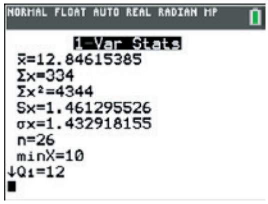
Lehrbuch Seite 35

4 a) Kurs a: $\overline{x} = 12{,}85$

Standardabweichung $\sigma = 1{,}43$

Mit Hilfsmittel





Kurs b: $\overline{x} = 11{,}73$

Standardabweichung $\sigma = 2{,}41$

Vergleich ergibt: Kurs a hat besseres Niveau.
Die Streuung der Noten in Kurs b ist größer als in Kurs a.
Für Kurs b ist noch mehr Übung angesagt

b) Beispiel für eine mögliche Verteilung

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10
Kurs b	1	4	6	10	4	1

$\overline{x} = 12{,}42$ Standardabweichung $\sigma = 1{,}15$

Da die drei "Ausreißer" im Test mehr als 9 Punkte geschrieben haben,
könnte sich der Mittelwert der Notenpunkte erhöhen.
Die Standardabweichung wurde kleiner.
Weniger „extreme" Werte links und rechts vom Mittelwert (hier weniger als 10 Punkte) führt zu einer kleineren Standardabweichung.

c) Große Standardabweichung könnte bedeuten: Hohes Anspruchsniveau der Arbeit oder das Leistungsniveau des Kurses ist sehr unterschiedlich.

Kleine Streuung könnte bedeuten: leichte Klassenarbeit oder geringes Anspruchsniveau oder aber homogene Klasse.

Lehrbuch Seite 66

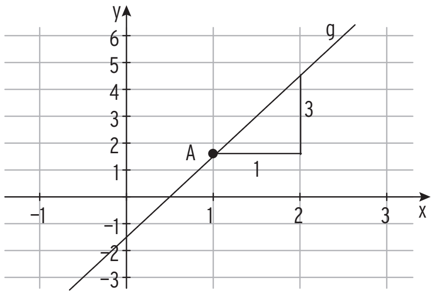
1 a) Geradengleichung: $y = mx + b$

m = 3 einsetzen $y = 3x + b$

Punktprobe mit A(1 | 1,5): $1{,}5 = 3 \cdot 1 + b$

$b = -1{,}5$

Geradengleichung: $y = 3x - 1{,}5$



b) A (−6 | 1) und B (0 | 2)

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 1}{0 - (-6)} = \frac{1}{6}$

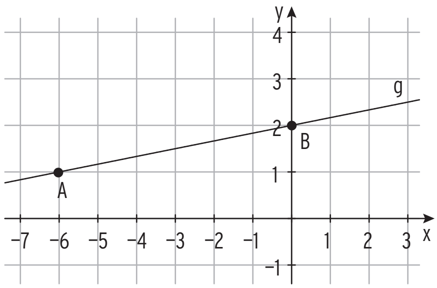
Geradengleichung: $y = mx + b$

$m = \frac{1}{6}$ einsetzen $y = \frac{1}{6}x + b$

Punktprobe mit B(0 | 2): $2 = \frac{1}{6} \cdot 0 + b$

$b = 2$

Geradengleichung: $y = \frac{1}{6}x + 2$



Hinweis: B(0 | 2) ergibt den y-Achsenabschnitt b = 2.

c) $A(-3 | 1)$ und $B\left(1 \middle| \frac{11}{3}\right)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{11}{3} - 1}{1 - (-3)} = \frac{2}{3}$

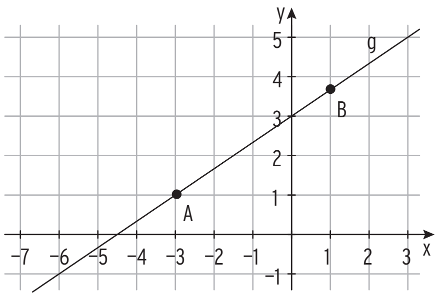
Geradengleichung: $y = mx + b$

$m = \frac{2}{3}$ einsetzen $y = \frac{2}{3}x + b$

Punktprobe mit A−3|1): $1 = \frac{2}{3} \cdot (-3) + b$

$b = 3$

Geradengleichung: $y = \frac{2}{3}x + 3$



Lehrbuch Seite 66

1 d) y- Wert des Punktes P: $y_P = 3 \cdot (-1) - 4 = -7$

$P(-1 | -7)$ und $N(2 | 0)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-7)}{2 - (-1)} = \frac{7}{3}$

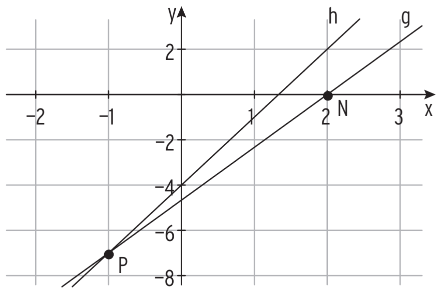
Geradengleichung: $y = mx + b$

$m = \frac{7}{3}$ einsetzen $y = \frac{7}{3}x + b$

Punktprobe mit N(2 | 0): $0 = \frac{7}{3} \cdot 2 + b$

$b = -\frac{14}{3}$

Geradengleichung: $y = \frac{7}{3}x - \frac{14}{3}$

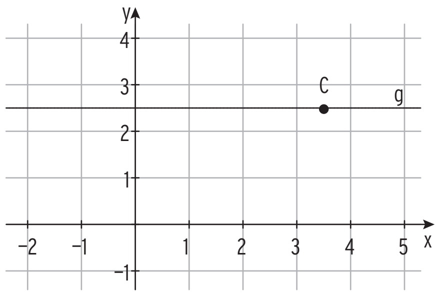


e) Die Gerade von g ist parallel zur x-Achse,

Steigung von g ist null.

y-Wert des Geradenpunktes C: y = 2,5

Geradengleichung: y = 2,5



Lehrbuch Seite 67

4 a) Ansatz: G(x) = mx + b; x in ME und G(x) in GE

Stückgewinn (Gewinn pro ME): m = 275 $\left(\frac{GE}{ME}\right)$

Bei 2 ME erzielt man einen Gewinn von 350 GE, dies entspricht dem

Kurvenpunkt P(2 | 350).

Gewinnfunktion: G(x) = 275x + b

Punktprobe mit P(2 | 350): $350 = 275 \cdot 2 + b$

b = − 200

Gewinnfunktion G mit G(x) = 275x – 200

b) Ansatz: G(x) = 1175 275x – 200 = 1175

Produktionsmenge: x = 5

Bei einer Produktionsmenge von 5 ME ist der Gewinn 1175 GE.

Lehrbuch Seite 71

1 a) $f(x) = -4x - 3{,}5$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$

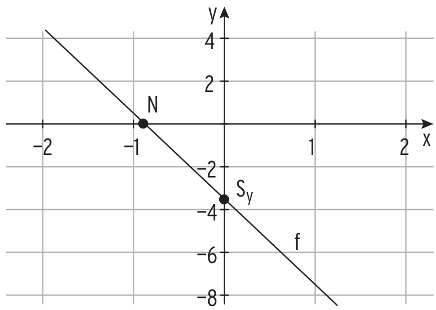
$-4x - 3{,}5 = 0$

$-4x = 3{,}5$

$x = -\frac{3{,}5}{4} = -\frac{\frac{7}{2}}{4} = -\frac{7}{8}$; $N(-\frac{7}{8}|\ 0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0$

$y = f(0) = -3{,}5$; $S_y(0|-3{,}5)$



b) $f(x) = 2x - \frac{7}{3}$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$

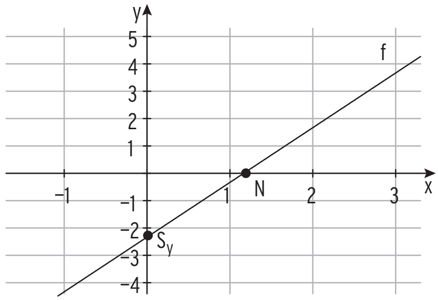
$2x - \frac{7}{3} = 0$

$2x = \frac{7}{3}$

$x = \frac{7}{6}$; $N(\frac{7}{6}\ |\ 0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0$

$y = f(0) = -\frac{7}{3}$; $S_y(0|-\frac{7}{3})$



c) $f(x) = -\frac{8}{3}x + \frac{5}{4}$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$

$-\frac{8}{3}x + \frac{5}{4} = 0 \quad | \cdot 12$

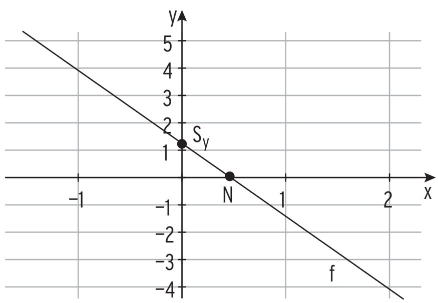
$-8 \cdot 4x + 5 \cdot 3 = 0$

$-32x + 15 = 0$

$x = \frac{15}{32}$; $N(\frac{15}{32}\ |\ 0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0$

$y = f(0) = \frac{5}{4}$; $S_y(0|\ \frac{5}{4})$



Lehrbuch Seite 71

2 a) $f(x) = g(x)$

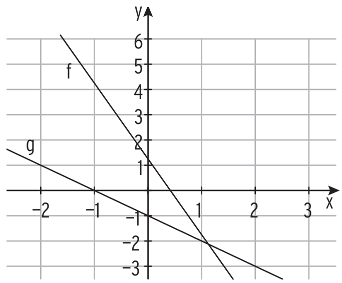
$-3x + \frac{5}{4} = -x - 1$

$-2x = -\frac{9}{4}$

$x = \frac{9}{8}$

$y = g(\frac{9}{8}) = -\frac{9}{8} - 1 = -\frac{17}{8}$

Schnittpunkt der Graphen von f und g: $S(\frac{9}{8} \mid -\frac{17}{8})$



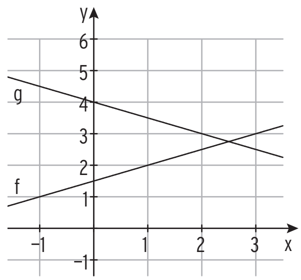
b) $f(x) = g(x)$

$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x + 4$

$x = \frac{5}{2}$

$y = g(\frac{5}{2}) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} + 4 = \frac{11}{4}$

Schnittpunkt der Graphen von f und g: $S(\frac{5}{2} \mid \frac{11}{4})$



c) $f(x) = g(x)$

$-\frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{6}x - 4 \quad | +1$

$-\frac{2}{3}x = \frac{1}{6}x - 3 \quad | \cdot 6$

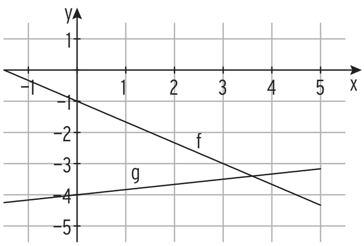
$-4x = x - 18 \quad | -x$

$-5x = -18 \quad | :(-5)$

$x = \frac{18}{5}$

$y = f(\frac{18}{5}) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{18}{5} - 1 = -\frac{17}{5}$

Schnittpunkt der Graphen von f und g: $S(\frac{18}{5} \mid -\frac{17}{5})$



Lehrbuch Seite 77

5 a) Steigung: $m = -\frac{10}{20} = -0{,}5$

Punktprobe mit P(120 | 90) ergibt: $b = 150$

Nachfragefunktion p_N: $p_N(x) = -0{,}5x + 150$

Erlösfunktion: $E(x) = p_N(x) \cdot x$

$E(60) = 120 \cdot 60 = 7200$

$E(80) = 110 \cdot 80 = 8800$

$E(150) = 75 \cdot 150 = 11250$

b) Angebotsfunktion p_A mit $p_A(x) = 0{,}65x + 35$

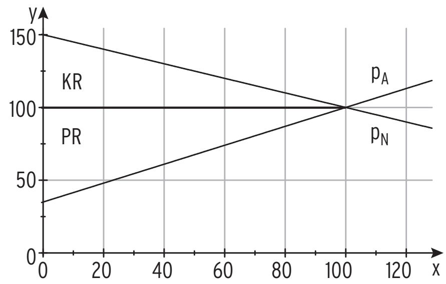
Gleichsetzen: $p_N(x) = p_A(x)$ $-0{,}5x + 150 = 0{,}65x + 35$

$x = 100$

Gleichgewichtspreis: $p_A(100) = 100$

Marktgleichgewicht: MGG(100 | 100)

Grafisch:



c) $p_A(50) = 67{,}5$

Zu diesem Preis in GE/ME wird die Ware angeboten.

$p_N(50) = 125$

Diesen Preis ist der Nachfrager bereit zu zahlen.

Dieser Preis könnte maximal erzielt werden.

d) Flächeninhalt eines Dreiecks: $A = \frac{1}{2}\, g\, h$

Konsumentenrente:

$KR = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 50 = 2500$

Produzentenrente:

$PR = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 65 = 3250$

Lehrbuch Seite 94

1 a) Gemeinsame Punkte der Graphen von f und g

Bedingung: $f(x) = g(x)$ $\quad 2x^2 - 6x + 2 = -2x + 8$

$2x^2 - 4x - 6 = 0$

Gleichung in Normalform: $\quad x^2 - 2x - 3 = 0$

pq-Formel: $\quad x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$p = -2$; $q = -3$: $\quad x_{1|2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-3)} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$

$x_1 = 1 + 2 = 3$

$x_2 = 1 - 2 = -1$

y-Werte der gemeinsamen Punkte: $\quad y = g(3) = -2 \cdot 3 + 8 = 2$

$y = g(-1) = -2 \cdot (-1) + 8 = 10$

Gemeinsame Punkte: $\quad S_1(3 \mid 2)$; $S_2(-1 \mid 10)$

Der Graph von f schneidet den Graphen von g in zwei Punkten.

b) Gemeinsame Punkte der Graphen von f und g

Bedingung: $f(x) = g(x)$ $\quad x^2 + x - 2 = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$

$\frac{3}{2}x^2 - 2x + 2 = 0 \quad | \cdot \frac{2}{3}$

Gleichung in Normalform: $\quad x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = 0$

pq-Formel: $\quad x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$p = -\frac{4}{3}$; $q = \frac{4}{3}$; $\frac{p}{2} = -\frac{2}{3}$: $\quad x_{1|2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{4}{3}} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{-\frac{8}{9}}$

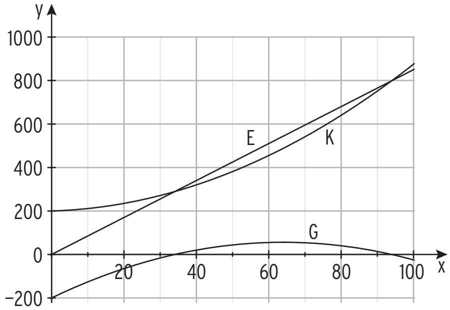
$D = -\frac{8}{9} < 0$

Die quadratische Gleichung hat keine Lösung.

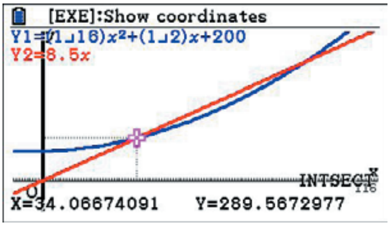
Die Graphen von f und g haben keine gemeinsamen Punkte.

Lehrbuch Seite 94

2 a) Zeichnung



b) $K(x) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x + 200$; $E(x) = 8{,}5x$



K(x) = E(x):
Mit Hilfsmittel:
Schnittstellen: $x_{GS} = 34{,}1$; $x_{GG} = 93{,}93$

Algebraisch

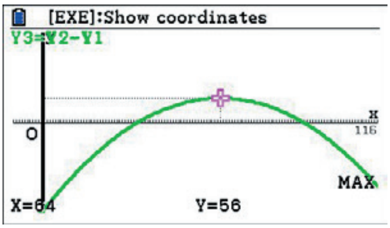
K(x) = E(x): $\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x + 200 = 8{,}5x \quad | \cdot 16$

$x^2 + 8x + 3200 = 136x$

Gleichung in Normalform: $x^2 - 128x + 3200 = 0$

Lösungen der quadratischen Gleichung: $x_{GS} = 34{,}1$; $x_{GG} = 93{,}93$
Die Gewinnzone erstreckt sich von 34,1 bis 93,9 Stück.

c) $G(x) = E(x) - K(x) = 8{,}5x - (\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x + 200) = -\frac{1}{16}x^2 + 8x - 200$



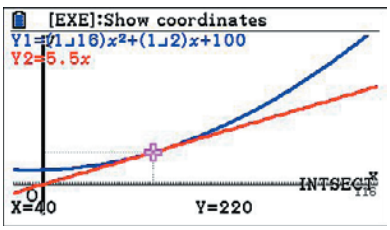
Mit Hilfsmittel:
Scheitelpunkt der Gewinnkurve
S(64 | 56)

Algebraisch

$G_{max} = G(\frac{34{,}1 + 93{,}9}{2}) = G(64) = 56$

Erhöhen sich die Fixkosten um mindestens 56 GE, ist kein Gewinn mehr möglich.

d) $K^*(x) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x + 100$; $E(x) = 5{,}5x$



$K^*(x) = E(x)$, doppelte Lösung $x_{1|2} = 40$

Berührpunkt B(40 | 220)

Es kann verlustfrei produziert werden, wenn 40 Stück produziert und verkauft werden.

Lehrbuch Seite 101

2 Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems (siehe Abbildung) verläuft die Gerade durch die Punkte (0 | 60) und (80 | 0).

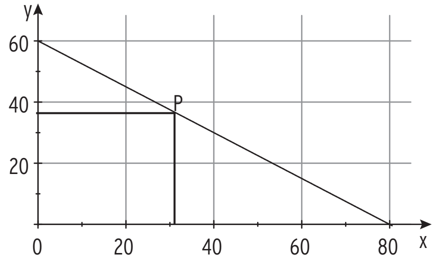
Die Gerade hat die Steigung

$m = -\frac{60}{80} = -\frac{3}{4}$

Geradengleichung: $y = -0{,}75x + 60$

Der Eckpunkt P hat die Koordinaten

x und $y = -0{,}75x + 60$: $P(x \mid -0{,}75x + 60)$



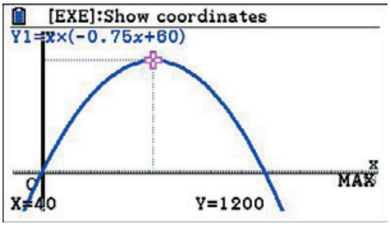
Für den Inhalt des Rechtecks gilt: $A(x) = x \cdot (-0{,}75x + 60);\ 0 < x < 80$

A wird maximal im Scheitel der zugehörigen Parabel.

Mit Hilfsmittel

S(40 | 1200)

Der maximale Flächeninhalt beträgt 1200 m².



Ohne Hilfsmittel

Die Parabel schneidet die x-Achse in $x_1 = 0$ und $x_2 = 80$.

Der Inhalt des Rechtecks ist jeweils null.

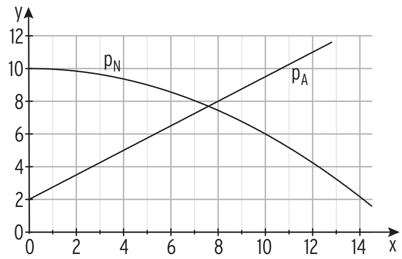
Aus Symmetriegründen gilt also $x_S = 40$.

Einsetzen ergibt den maximalen Inhalt: $A_{max} = A(40) = 1200$

Der maximale Flächeninhalt beträgt 1200 m².

Lehrbuch Seite 102

5 a) Angebotsgerade ist wachsend;
Nachfrageparabel ist fallend.



b) Sättigungsmenge: $10 - 0{,}04x^2 = 0$

$x^2 = 250$

$x = 15{,}81$ (bzw. $5\sqrt{10} > 0$)

Maximaler, ökonomischer Definitionsbereich: $D_{ök} = [0; 5\sqrt{10}\,]$

c) Höchstpreis: $p_N(0) = 10$

Sättigungsmenge: $5\sqrt{10}$

Gleichgewichtsmenge: $p_N(x) = p_A(x)$ $x_1 = 7{,}59$

Marktgleichgewicht: MGG(7,59 | 7,69)

d) Nachfrageüberhang bei 6 GE:

$p_N(x) = 6$ für $x = 10$

$p_A(x) = 6$ für $x = 5{,}33$

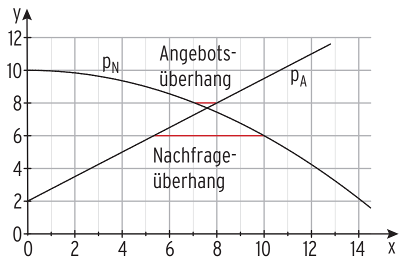
Nachfrageüberhang: $10 - 5{,}33 = 4{,}67$

Angebotsüberhang bei 8 GE:

$p_N(x) = 8$ für $x = 7{,}07$

$p_A(x) = 8$ für $x = 8$

Angebotsüberhang: $8 - 7{,}07 = 0{,}93$



e) Ansatz: $p^*_N(x) = ax^2 + bx + c$

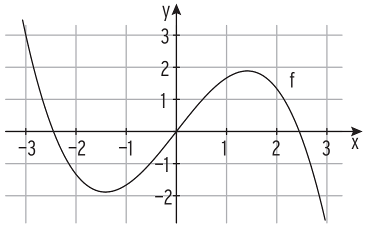
$p^*_N(0) = 7$; $p^*_N(2) = 4{,}5$; $p^*_N(8) = 0$

Lösung des zugehörigen LGS: $a = 0{,}0625$; $b = -1{,}375$; $c = 7$

Nachfragefunktion: $p^*_N(x) = 7 - 1{,}375x + 0{,}0625x^2$

Lehrbuch Seite 120

1 a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x$



Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0$

$-\frac{1}{3}x^3 + 2x = 0$

$x(-\frac{1}{3}x^2 + 2) = 0$

$x_1 = 0$

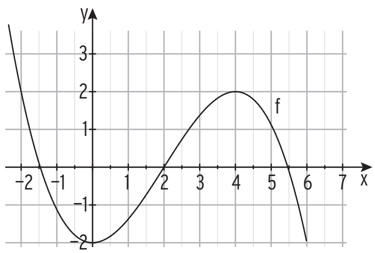
Weitere Lösungen für $-\frac{1}{3}x^2 + 2 = 0$

$x^2 = 6$

$x_{2|3} = \pm\sqrt{6}$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(0 \mid 0)$; $N_2(\sqrt{6} \mid 0)$; $N_3(-\sqrt{6} \mid 0)$

b) $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 2$



Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0$

$-\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 2 = 0 \quad | \cdot (-8)$

$x^3 - 6x^2 + 16 = 0$

Eine Lösung: $x_1 = 2$

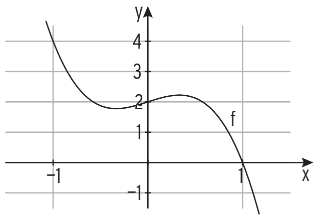
Polynomdivision mit $(x - 2)$: $(x^3 - 6x^2 + 16) : (x - 2) = x^2 - 4x - 8$

Weitere Lösungen, wenn $x^2 - 4x - 8 = 0$

Lösung mit der pq-Formel: $x_2 = 5{,}46$; $x_3 = -1{,}46$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(2 \mid 0)$; $N_2(5{,}46 \mid 0)$; $N_3(-1{,}46 \mid 0)$

c) $f(x) = 2 + x - 3x^3$



Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0$

$2 + x - 3x^3 = 0$

Eine Lösung: $x_1 = 1$

Polynomdivision mit $(x - 1)$: $(-3x^3 + x + 2) : (x - 1) = -3x^2 - 3x - 2$

Weitere Lösungen, wenn $-3x^2 - 3x - 2 = 0 \quad | : (-3)$

$x^2 + x + \frac{2}{3} = 0$

$D = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{12} < 0$ keine weiteren Lösungen

Schnittpunkt mit der x-Achse: $N_1(1 \mid 0)$

Lehrbuch Seite 120

3 Schnittstellen berechnen

a) Bedingung: f(x) = g(x) $\quad \frac{1}{20}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 = -\frac{1}{10}x^2 + x + 2 \quad | -2$

$\frac{1}{20}x^3 - \frac{3}{8}x^2 = -\frac{1}{10}x^2 + x \quad | \cdot 40$

$2x^3 - 15x^2 = -4x^2 + 40x$

Nullform: $2x^3 - 11x^2 - 40x = 0$

Ausklammern: $x(2x^2 - 11x - 40) = 0$

$x_1 = 0$

Weitere Lösungen, wenn $2x^2 - 11x - 40 = 0$

$x^2 - 5,5x - 20 = 0$

Lösungen mit der pq-Formel: $x_2 = -2,5$; $x_3 = 8$

Die Gleichung f(x) = g(x) hat drei einfache Lösungen.

Die Graphen von f und g schneiden sich in drei Punkten.

b) Bedingung: f(x) = g(x) $\quad -x^2 + 2x^3 = 0,5x^2$

$2x^3 - 1,5x^2 = 0$

Ausklammern: $x^2(2x - 1,5) = 0$

Doppelte Lösung (Berührstelle): $x_{1|2} = 0$

Weitere Lösung, wenn $2x - 1,5 = 0$

$x_3 = 0,75$

Die Gleichung f(x) = g(x) hat eine doppelte und eine einfache Lösung.

Die Graphen von f und g berühren sich in x = 0 und schneiden sich in x = 0,75.

Lehrbuch Seite 120

10 Gesamtkostenfunktion: $K(x) = x^3 - 6x^2 + 14x + 18;\ x \geq 0$

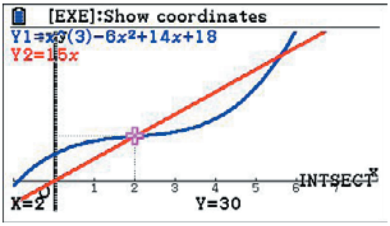
Erlösfunktion: $E(x) = 15x$

Gewinnfufnktion: $G(x) = -x^3 + 6x^2 + x - 18$

Schnittpunkte von Gesamtkostenkurve und Erlösgerade:

(2 | 30); (5,6 | 84,1)

Hinweis: ökonomisch nicht relevant: (− 1,6 | − 24,1)



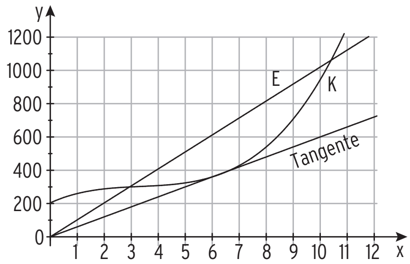
Break-Even-Punkt: (2 | 30)

Gewinnschwelle 2 ME; Gewinngrenze 5,6 ME

Gewinnzone von 2 ME bis 5,6 ME.

Gewinnzone: (0; 5,6)

Lehrbuch Seite 125



1 $K(x) = 2x^3 - 20x^2 + 74x + 204$

a) degressiv wachsend für x etwa kleiner 3
Steigung nimmt ab.

progressiv wachsend für x etwa größer 3
Steigung nimmt zu.

b) Aus der Zeichnung
$E(x) = 100x$
Stückerlös: p = 100 GE/ME

c) K(4) = E(4) = 308 (Kostendeckung)

Stückerlös: $p = \frac{308}{4} = 77$ (GE/ME)
Erlösfunktion: $E(x) = 77x$
$G(x) = 0$ für $x_{GS} = 4$; $x_{GG} = 8{,}87$ (mit einem Hilfsmittel)

d) Die Erlösgerade wird flacher, die Gewinnzone wird kleiner, der größte Gewinn wird kleiner. Bei Gewinnabsicht lässt sich der Verkaufspreis nicht unter etwa 60 GE je ME senken. Der Stückerlös (Steigung der Erlösgeraden) kann gesenkt werden, bis die Erlösgerade Tangente an die Gesamtkostenkurve ist.

Lehrbuch Seite 127

5 a) $E(x) = -4x^2 + 22x$

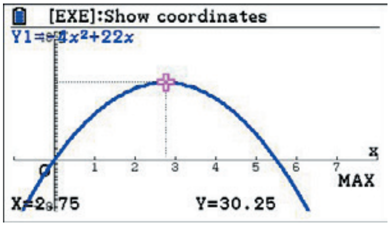
$p_N(x) = \frac{E(x)}{x} = -4x + 22$

Höchstpreis: $p_N(0) = 22$

Sättigungsmenge: $p_N(x) = 0$

$-4x + 22 = 0$

$x = 5{,}5$



Scheitelpunkt der Erlöskurve:

Mit Hilfsmittel:

S(2,75 | 30,25)

Der maximale Erlös beträgt 30,25 GE.

Hinweis: x_S-Wert des Scheitelpunktes: $x_S = \frac{5{,}5}{2} = 2{,}75$

b) $G(x) = E(x) - K(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 12x - 18$

$G(3) = 0$ und $G(2) = -0{,}67 < 0$

Die Gewinnschwelle liegt zwischen 2 und 3.

Die Gewinnzone ist weniger als 1 ME breit.

Lehrbuch Seite 131

1 a) LGS in Matrixschreibweise:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \cdot(-2) + \\ \cdot(-3) + \\ \cdot 2 \end{array}$$

Umformung mit dem Gaußverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & 23 \end{array}\right) \quad \cdot 3 +$$

Dreiecksform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 20 & 80 \end{array}\right)$$

Letzte Gleichung: $20x_3 = 80$ für $x_3 = 4$

Einsetzen von $x_3 = 4$

in die zweite Gleichung $3x_2 + 5x_3 = 11$: $3x_2 + 5 \cdot 4 = 11$ für $x_2 = -3$

Einsetzen von $x_3 = 4$ und $x_2 = -3$

in die erste Gleichung $2x_1 + x_2 - x_3 = -3$: $2x_1 - 3 - 4 = -3$ für $x_1 = 2$

Das LGS hat die Lösung: $x_1 = 2;\ x_2 = -3;\ x_3 = 4$

b) LGS in Matrixschreibweise:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \cdot(-3) + \\ \cdot 2 + \end{array}$$

Umformung mit dem Gaußverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 4 & 6 & 11 \end{array}\right) \quad +$$

Dreiecksform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Letzte Gleichung: $-2x_3 = -5$ für $x_3 = 2{,}5$

Einsetzen von $x_3 = 2{,}5$

in die zweite Gleichung $-4x_2 - 8x_3 = -16$: $-4x_2 - 8 \cdot 2{,}5 = -16$ für $x_2 = -1$

Einsetzen von $x_3 = 2{,}5$ und $x_2 = -1$

in die erste Gleichung $x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$: $x_1 - 1 + 2 \cdot 2{,}5 = 5$ für $x_1 = 1$

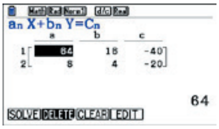
Das LGS hat die Lösung: $x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = 2{,}5$

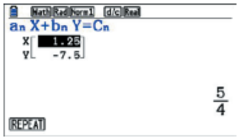
Lehrbuch Seite 131

8 $E(x) = 20x$

Ansatz: $K(x) = ax^3 + bx^2 + 20x + 20$

$K(4) = 60$:	$64a + 16b + 80 + 20 = 60$
$K(2) = E(2) = 40$:	$8a + 4b + 40 + 20 = 40$
Umformung:	$64a + 16b = -40$
	$8a + 4b = -20$





Lösungmit Hilfsmittel:
$a = 1{,}25$; $b = -7{,}5$

Gesamtkostenfunktion K mit $K(x) = 1{,}25\,x^3 - 7{,}5x^2 + 20x + 20$

Lehrbuch Seite 146

1 b) $f(x) = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$

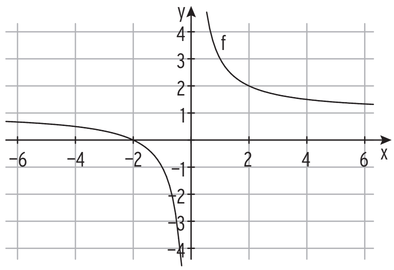
$D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}^*$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$ Zähler = 0

$x + 2 = 0$

Nullstelle von f: $x = -2$

$N(-2 \mid 0)$



Kein Schnittpunkt mit der y-Achse

Senkrechte Asymptote: $x = 0$

Waagrechte Asymptote: $y = 1$

e) $f(x) = 2 - \frac{4}{1+x}$

$D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$

$2 - \frac{4}{1+x} = 0$

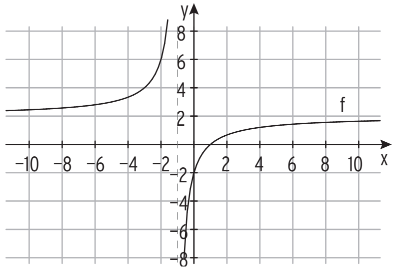
$2 = \frac{4}{1+x} \quad | \cdot (1+x)$

$2(1+x) = 4 \quad | : 2$

$1 + x = 2$

Nullstelle von f: $x = 1$

$N(1 \mid 0)$



Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0$

$y = f(0) = -2$

$S_y(0 \mid -2)$

Senkrechte Asymptote: $x = -1$

Waagrechte Asymptote: $y = 2$

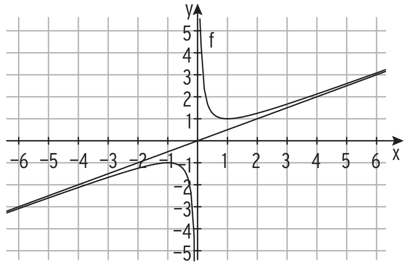
Lehrbuch Seite 146

2 a) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}$

$D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}^*$

Senkrechte Asymptote: $x = 0$

Schiefe Asymptote: $y = \frac{1}{2}x$

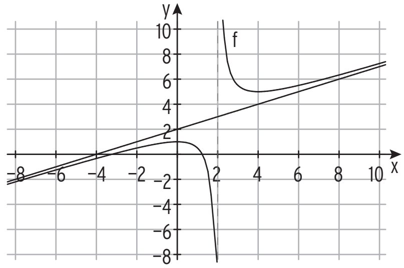


c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2 + \frac{2}{x-2}$

$D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

Senkrechte Asymptote: $x = 2$

Schiefe Asymptote: $y = \frac{1}{2}x + 2$



Lehrbuch Seite 152

2 a) $K(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + \frac{7}{2}x + 20$

$E(2) = K(2) = 24$ $\qquad$ $p = \frac{24}{2} = 12$

Erlösfunktion: $\qquad$ $E(x) = 12x$

Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x)$ $\qquad$ $G(x) = -\frac{1}{8}x^3 + x^2 + 8{,}5x - 20$

Gewinngrenze: $G(x) = 0$

Mit Hilfsmittel: Gewinngrenze $\qquad$ $x_{GG} = 12{,}43$

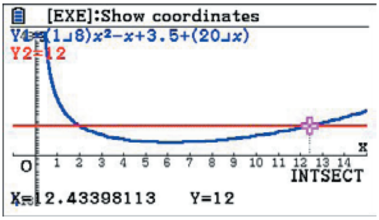
Gesamtkosten und Erlös an der Gewinngrenze

$E(12{,}43) = 149{,}21 = K(12{,}43)$

$G(x) = E(x) - K(x) = 40$ $\qquad$ $-\frac{1}{8}x^3 + x^2 + 8{,}5x - 20 = 40$

Mit Hilfsmittel: $\qquad$ $x = 6 \vee x = 10$

b) Stückkosten $k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{1}{8}x^2 - x + \frac{7}{2} + \frac{20}{x}$



$k(2) = 12$

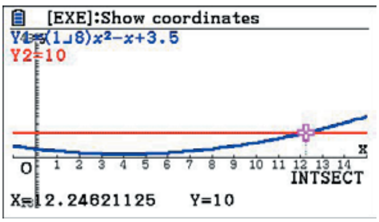
$k(x) = 12$

Lösung mit Hilfsmittel:

$x = 12{,}43$ Gewinngrenze

Hinweis: Für einen konstanten Stückpreis p gilt:
Die Stückkosten in der Gewinngrenze stimmen mit den Stückkosten in der Gewinnschwelle überein.

c) variable Stückkosten: $k_v(x) = \frac{1}{8}x^2 - x + \frac{7}{2}$



Bedingung: $k_v(x) < 10$

$k_v(x) = 10$ für $x = 12{,}25$

Ergebnis: : $k_v(x) < 10$ für $0 < x < 12{,}25$

Lehrbuch Seite 154

1 a) Ökonomisch sinnvoller Definitionsbereich

der Nachfragefunktion p_N mit

$p_N(x) = \frac{15900}{x + 170} - 60.$

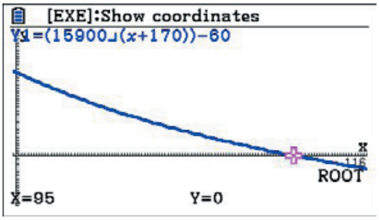
$p_N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 95$

$x = 95$ ist Nullstelle von p_N

$D_{ök} = [0; 95]$

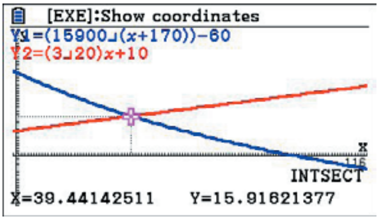
Die Sättigungsmenge ist 95 ME (Nullstelle von p_N).

Der Höchstpreis beträgt ca. 33,53 GE/ME, da $p_N(0) \approx 33,53$.



b) Marktgleichgewicht: $p_N(x) = p_A(x)$

MGG(39,44 | 15,92)



Lehrbuch Seite 158

5 Produktivität: $p(x) = \frac{P(x)}{x} = -0,1x^2 + 0,8x + 0,1;\ 0 < x \le 7$

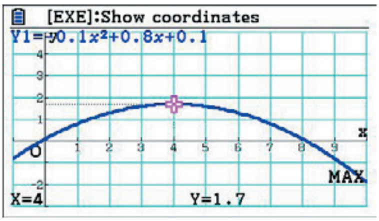
Die maximale Produktivität wird im Scheitelpunkt erreicht.

Scheitelpunkt des Schaubildes von p:

S(4 | 1,7)

Die maximale Produktivität beträgt

1,7 Tonnen Weizen pro Zentner Düngemittel.



Hinweis: Bestimmung des Scheitelpunkts ohne Hilfsmittel

x_S-Wert:	$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 8}{2} = \frac{8}{2} = 4$
y_S-Wert:	$y_S = p(4) = 1,7$
Scheitelpunkt:	S(4 | 1,7)

Lehrbuch Seite 167

3 Der Graph von f mit $f(x) = e^{-x}$ wird abgebildet.

a) $g(x) = e^{-x} + 3$

Vergleich mit $g(x) = ae^{-x} + b$ ergibt: $a = 1$; $b = 3$

b) $g(x) = -e^{-x}$

Vergleich mit $g(x) = ae^{-x} + b$ ergibt: $a = -1$; $b = 0$

c) $g(x) = 0{,}5e^{-x} - 6$

Vergleich mit $g(x) = ae^{-x} + b$ ergibt: $a = 0{,}5$; $b = -6$

d) $g(x) = e^{-(x-2)} = e^{-x+2} = e^2 \cdot e^{-x}$

Vergleich mit $g(x) = ae^{-x} + b$ ergibt: $a = e^2$; $b = 0$

Bemerkung: Eine horizontale Verschiebung lässt sich durch eine Streckung in y-Richtung (Faktor e^2) ersetzen.

Gemeinsame Eigenschaft: Alle Kurven haben eine waagrechte Asymptote.

Lehrbuch Seite 171

2 $f(x) = 2 - e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$

Der Graph von f verläuft vom 3. in das 1. Feld.

Die Gerade mit $y = 2$ ist waagrechte Asymptote.

$S_y(0 \mid 1)$; $S_x(-0{,}7 \mid 0)$

$f(-0{,}70) \approx -0{,}01 < 0$; $f(-0{,}69) = 0{,}006... > 0$;

VZW von f(x) zwischen $-0{,}70$ und $-0{,}69$.

Der Graph von f entsteht aus dem Schaubild von g durch Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung um 2 nach oben.

Lehrbuch Seite 177

3 a) $e - 2e^{0,5x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{0,5x} = 0,5e \quad \Leftrightarrow x = 2\ln(0,5e)$

b) $\frac{2}{3}e^{-x} - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-x} = 3 \;\Leftrightarrow\; -x = \ln(3) \;\Leftrightarrow\; x = -\ln(3)$

c) $e^{2x} - 5xe^{2x} = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{2x}(1 - 5x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0,2$ (Satz vom Nullprodukt)

d) $e^{2-x} = 1 \;\Leftrightarrow\; 2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow x = 2$ $(\ln(1) = 0)$

e) $e^{0,2x+1} - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{0,2x+1} = 1 \;\Leftrightarrow\; 0,2x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -5$

f) $3 - 0,5e^{0,25x} = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{0,25x} = 6 \;\Leftrightarrow\; 0,25x = \ln(6) \;\Leftrightarrow\; x = 4\ln(6)$

g) $(3 + 2x)e^{x-1} = 0 \;\Leftrightarrow\; 3 + 2x = 0 \wedge e^{x-1} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{3}{2}$
(Satz vom Nullprodukt)

h) $8 - e^x = 7e^{-x} \mid \cdot e^x$

$8e^x - e^{2x} = 7$

$e^{2x} - 8e^x + 7 = 0$

Substitution: $u^2 - 8u + 7 = 0$ liefert $u = 7 \vee u = 1$

Lösungen in x aus $u = e^x$: $x = \ln(7)$; $x = \ln(1) = 0$

i) $2e^{0,5x} = e^x \quad \Leftrightarrow \quad 2e^{0,5x} - e^x = 0$

$e^{0,5x}(2 - e^{0,5x}) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$e^{0,5x} \neq 0$; $(2 - e^{0,5x}) = 0$

$0,5x = \ln(2)$

$x = 2\ln(2)$

Lehrbuch Seite 186

3 **Reale Situation: In einem See von der Größe 8 ha wachsen Seerosen.**

Reales Modell

Die bedeckte Fläche nimmt wöchentlich um 30% zu. Anfangs sind 150 m^2 der Oberfläche bedeckt. Annahme: Die Zunahme erfolgt exponentiell. Die bedeckte Fläche nach t Wochen (t = 0 entspricht dem Beginn der Messung) soll durch eine Funktion beschrieben werden.

Mathematisches Modell:

$B(0) = 150$; $B(t)$: bedeckte Fläche in m^2

Mit $a = 1{,}30$ ergibt sich: $B(t) = 150 \cdot 1{,}30^t$

Dieser Funktionsterm beschreibt die bedeckte Fläche in Abhängigkeit von der Zeit t.

Schreibweise mit e-Basis

Mit $1{,}30 = e^{\ln(1{,}30)} = e^{0{,}2624}$: $B(t) = 150 \cdot e^{0{,}2624t}$

Mathematische Lösung:

$B(t) = 80000$ $150 \cdot 1{,}30^t = 80000$

$1{,}30^t = 533{,}33$

Logarithmieren: $\ln(1{,}30) \cdot t = \ln(533{,}33)$

$t = 23{,}93$

Bewertung:

Die Wasserrose bedeckt die gesamte Fläche nach ca. 24 Wochen.

Exponentielles Wachstum ist also nur in den ersten 24 Wochen möglich.

Lehrbuch Seite 193

2 a) $E(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$

Mittlere Änderungsrate auf [0; 2]: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{E(2) - E(0)}{2} = \frac{3 - 0}{2 - 0} = 1{,}5$

Mittlerer Erlöszuwachs 1,5 GE/ME

b) Punkte P(2 | 3) und Q(3 | 2,25)

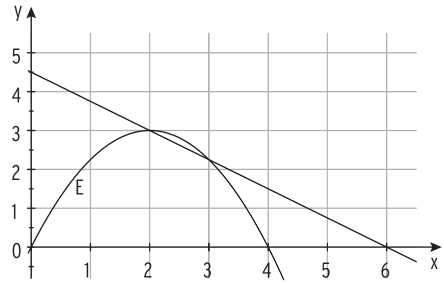
Steigung der Geraden:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2{,}25 - 3}{3 - 2} = -0{,}75$

Gleichung der Geraden durch P und Q:

$y = -0{,}75x + 4{,}5$

Mittlere Erlösabnahme 0,75 GE/ME



c) Momentane Änderungsrate
von E an der Stelle x = 2:

Tabelle

$[2; x_2]$	[2; 2,1]	[2; 2,01]	[2; 2,001]
$\Delta x = x_2 - 2$	0,1	0,01	0,001
$\frac{f(x_2) - f(2)}{x_2 - 2}$	− 0,075	− 0,0075	− 0,00075

Die mittlere Änderungsrate strebt gegen 0. Die Tangente an der Stelle x = 2 hat die Steigung 0 (waagrechte Tangente).

Momentane Erlösänderung 0 GE/ME

Lehrbuch Seite 199

1 a) $f'(x) = -3x^2 - 4x + 5$ $\quad f''(x) = -6x - 4$

b) $f'(x) = 8x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ $\quad f''(x) = 24x^2 - 6x + 6$

c) $E'(x) = x - \frac{3}{16}x^2$ $\quad E''(x) = 1 - \frac{3}{8}x$

d) $f'(x) = -6x^3 + 10x$ $\quad f''(x) = -18x^2 + 10$

e) $f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - 2x - \frac{3}{x^2}$ $\quad f''(x) = \frac{9}{4}x - 2 + \frac{6}{x^3}$

f) $K'(x) = \frac{1}{50}(3x^2 - 60x + 1800)$ $\quad K''(x) = \frac{1}{50}(6x - 60)$

2 a) Grenzkostenfunktion: $K'(x) = 3x^2 - 12x + 14$

Stückkostenfunktion: $k(x) = x^2 - 6x + 14 + \frac{18}{x}$

Grenzstückkostenfunktion: $k'(x) = 2x - 6 - \frac{18}{x^2}$

variable Stückkostenfunktion: $k_v(x) = x^2 - 6x + 14$

variable Grenzstückkostenfunktion: $k_v'(x) = 2x - 6$

Grenzerlösfunktion: $E'(x) = 13{,}2$ (= Stückpreis)

Gewinnfunktion: $G(x) = -x^3 + 6x^2 - 0{,}8x - 18$

Grenzgewinnfunktion: $G'(x) = -3x^2 + 12x - 0{,}8$

b) $K''(x) = 6x - 12$; $K''(2) = 0$

Lehrbuch Seite 204

2 $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$; $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$

Tangente in A(0 | 0)

Steigung in A: $m = f'(0) = 0$

Die Tangente hat die Steigung null und verläuft durch den Ursprung.

Tangentgengleichung: $y = 0$

Tangente in $B(1 \mid \frac{5}{4})$

Steigung in B: $m = f'(1) = -\frac{3}{4} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = \frac{9}{4}$

Geradengleichung: $y = mx + b$

Einsetzen von $m = \frac{9}{4}$: $y = \frac{9}{4}x + b$

Punktprobe mit $B(1 \mid \frac{5}{4})$: $\frac{5}{4} = \frac{9}{4} + b \quad \mid -\frac{9}{4}$

$-1 = b$

Tangentengleichung: $y = \frac{9}{4}x - 1$

Tangente in $C\,(-1 \mid \frac{7}{4})$

Steigung in C: $m = f'(-1) = -\frac{3}{4} \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)$

$= -\frac{3}{4} \cdot 1 - 3 = -\frac{15}{4}$

Geradengleichung: $y = mx + b$

Einsetzen von $m = -\frac{15}{4}$: $y = -\frac{15}{4}x + b$

Punktprobe mit $C\,(-1 \mid \frac{7}{4})$: $\frac{7}{4} = -\frac{15}{4} \cdot (-1) + b$

$\frac{7}{4} = \frac{15}{4} + b \quad \mid -\frac{15}{4}$

$-2 = b$

Tangentengleichung: $y = -\frac{15}{4}x - 2$