Bohner
Ott
Deusch

Mathematik

für die Qualifikationsphase
Kerncurriculum Niedersachsen
Berufliches Gymnasium

Analysis, Stochastik, Lineare Algebra
und Analytische Geometrie

Arbeitsheft mit Lernsituationen

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:

Kurt Bohner

Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Ronald Deusch

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Bildnachweis:
Umschlag: Kreis oben: Syda Productions – www.colourbox.de
Seite 31, 156: hin255 – www.colourbox.de
Seite 82, 169: adimas - stock.adobe.com

* * * * * * * * * *

1. Auflage 2019

Gesamtherstellung:

Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de

lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

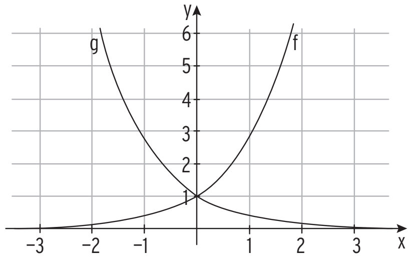
ISBN 978-3-8120-2696-3

I Analysis

1 Differenzialrechnung

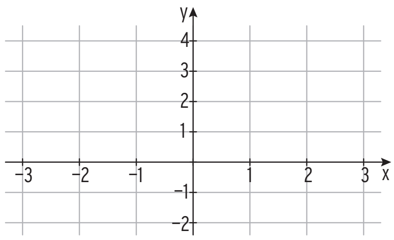
1.1 Exponentialfunktionen

Graphen von Exponentialfunktionen

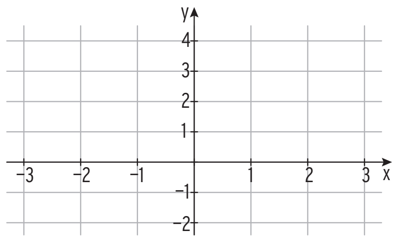


1 Die Abbildung zeigt die Graphen von f mit $f(x) = e^x$ bzw. g mit $g(x) = e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie den Graphen der gegebenen Funktion h.

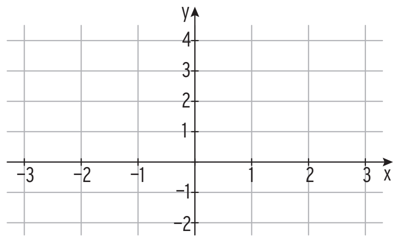
a) $h(x) = e^{2x} - 2$



b) $h(x) = e^{-x} + 1$

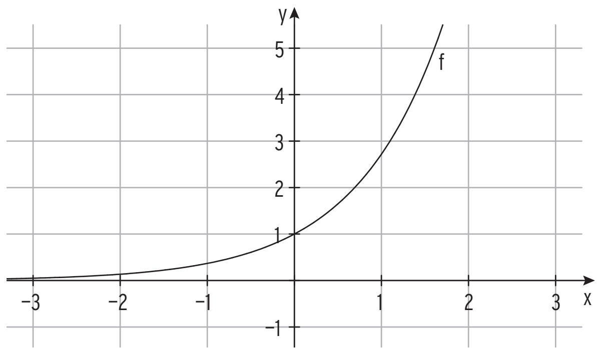


c) $h(x) = 4 - e^{0,5x}$



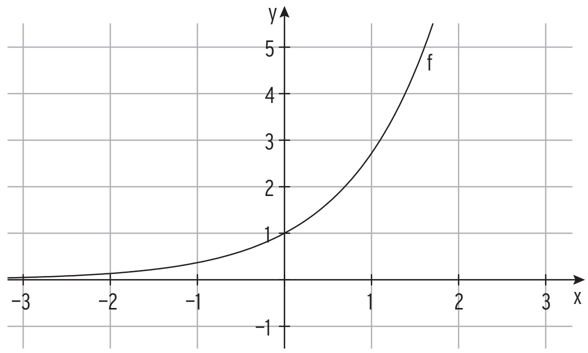
2 Der Graph von f mit $f(x) = e^x$ wird abgebildet und es entsteht der Graph von g. Zeichnen Sie den Graphen von g ein und geben Sie den Funktionsterm an.

a) Der Graph von f wird in Ordinatenrichtung mit Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckt und dann um eine Einheit nach oben verschoben.



g(x) = ________________

b) Der Graph von f wird an der Abszissenachse gespiegelt und dann um 2 Einheiten nach rechts verschoben.



g(x) = ________________

3 Jo und Hans diskutieren darüber, wie man der Graph von g mit $g(x) = e^{x+1}$ aus dem Graph von f mit $f(x) = e^x$ erhält. Jo behauptet, dass man den Graphen von f um eine Einheit nach links verschieben muss. Hans entgegnet, dass man den Graphen von f mit dem Faktor e in Ordinatenrichtung strecken muss. Entscheiden Sie.

11 Entscheiden Sie, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.

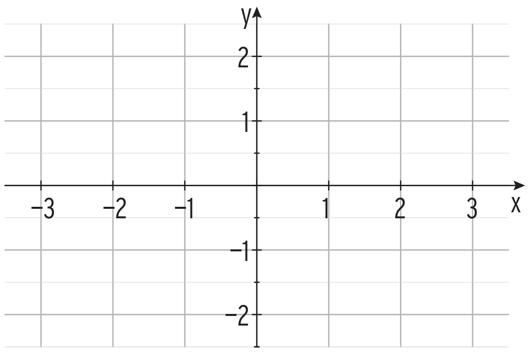
Beim beschränkten Wachstum bzw. Zerfall hat der Graph stets eine Asymptote, welche nicht die Abszissenachse ist.	☐ (w) ☐ (f)
Beim exponentiellen Wachstum nimmt die y-Größe zu Beginn am stärksten zu.	☐ (w) ☐ (f)
Beim beschränkten Zerfall nimmt die y-Größe zu Beginn am stärksten ab.	☐ (w) ☐ (f)
Eine Pizza wird bei 180 °C aus dem Ofen genommen und kühlt dann auf 20 °C Zimmertemperatur ab. Der Temperaturverlauf kann damit durch einen exponentiellen Zerfallsvorgang beschrieben werden.	☐ (w) ☐ (f)

Exponentialgleichungen

1 Bestimmen Sie die Werte von c, sodass die Gleichung $e^x + c = 0$ eine Lösung hat.

Antwort: Für c ________

Begründen Sie mithilfe einer Skizze:



2 Berechnen Sie ohne Hilfsmittel.

a) $3^x = 27 \Rightarrow x = 3$	b) $2^x = 64 \Rightarrow x =$	c) $e^x = 1 \Rightarrow x =$
d) $\ln(e^3) = 3$, da $e^3 = e^3$	e) $\ln(e) =$, da	f) $\ln(\frac{1}{e}) =$, da

3 Lösen Sie die Gleichung mithilfe des Logarithmus.

$3e^{2x} = 15$	$2e^{-x} - 3 = 1$	$7 - 2e^{-0{,}2x} = 0$	$-e^{\frac{2}{5}x} + 2 = -1$
$e^{2x} = 5$ $2x = \ln(5)$ $x = \frac{1}{2}\ln(5)$			

4 Für ein Massengut auf dem Markt gelte eine Preis-Absatz-Funktion p_N, die beschrieben werden kann durch die Funktionsgleichung $p_N(x) = 80 + \frac{800}{x - 100}$. Dabei gibt $p_N(x)$ den Preis in GE/ME an und x die nachgefragte Menge in ME.

Bestimmen Sie für p_N den maximalen ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich ($D_{ök}$), bestimmen und interpretieren Sie die Achsenschnittpunkte unter ökonomischen Aspekten.

5 Ein Partyservice stellt Fingerfood unter Einsatz der beiden Produktionsfaktoren x (Küchengerätestunden) und y (Arbeitskraft in Stunden) her. Die Funktionsgleichung der Isoquantenfunktion I_6, die alle Faktorkombinationen darstellt, mit denen 6 ME hergestellt werden können, lautet $I_6(x) = \frac{15}{x - 2} + 3$.

Prüfen Sie, ob für die Herstellung von 6 ME die beiden Produktionsfaktoren x und y in folgenden Mengenkombinationen eingesetzt werden können:

x	3	7	17
y	18	6	4

Bestimmen und interpretieren Sie die Grenzrate der Substitution für x = 5 ME.

Ermitteln Sie die Minimalkostenkombination, wenn die Kosten für eine ME der beiden Produktionsfaktoren 3 GE bzw. 5 GE betragen.

6 Die Elastizität einer Funktion f ist definiert durch $e(x) = \frac{f(x)}{x \cdot f'(x)}$.

Bestimmen Sie die Elastizität der Funktion f an der Stelle x = 1.

a) $f(x) = 4 - x^2$

$f'(x) = -2x$; $e(x) = \frac{4-x^2}{x\cdot(-2x)} = \frac{4-x^2}{-2x^2}$; $e(1) = -\frac{3}{2}$

b) $f(x) = 0{,}5x^2 + x + 1$

7 Bestimmen Sie die Stelle x, so dass für die Elastizität der Funktion f mit

$f(x) = -4x + 12$ gilt: $e(x) = -1$.

8 Die Elastizitätsfunktion der Nachfrage nach Plastikringen kann durch die folgende Vorschrift beschrieben werden: $e(x) = 1 - \frac{10000}{x^2}$

Berechnen Sie die Elastizität der Nachfrage bezüglich des Preises für eine Nachfrage von 80 ME und interpretieren Sie den berechneten Wert.

Bestimmen Sie die Menge, bei dem die Preiselastizität der Nachfrage einen Wert von − 3 annimmt.

Untersuchen Sie die Elastizität bei Annäherung an die Ränder von $D_{ök} = (0; 10)$.

Die Nachfrage gilt als elastisch, wenn der Elastizitätskoeffizient kleiner als − 1 ist.

Bestimmen Sie das Intervall, in dem die Preiselastizität der Nachfrage elastisch ist.

Skizzieren Sie den Graphen von e.

Lernsituation

Ein Hersteller von Scheinwerfern hat für die Produktion seiner Modelle die Möglichkeit Maschinen (Produktionsfaktor Kapital, x) und Mitarbeiter (Produktionsfaktor Arbeit, y) einzusetzen. Für das Modell LA3 steht das Kostenbudget K zur Verfügung, die Preise für je eine ME der beiden Produktionsfaktoren betragen 8 GE bzw. 12 GE. Die Kombination der beiden Produktionsfaktoren wird durch folgende Isoquantenfunktion I mit $I(x) = \frac{3}{x-4} + 3$ beschrieben.
Damit eine Entscheidung bzgl. der Einteilung der Mitarbeiter sowie über die Anschaffung von Maschinen getroffen werden kann, benötigt die Geschäftsleitung folgende Informationen.

- Mindesteinsatz an Maschinen und Mitarbeitern
- Funktionsgleichung der Isokostengerade
- Mögliche Faktormengen bei einem Kostenbudget von 120 GE.
- Minimalkostenkombination, zugehörige Grenzrate der Substitution und das minimale Kostenbudget

Stellen Sie Ihre Ergebnisse grafisch dar. Füllen Sie den Lückentext aus.

Bearbeitung

- Mindesteinsatz an Maschinen und Mitarbeitern

Der Graph von I hat eine Asymptote mit der Gleichung und eine Asymptote mit der Gleichung .

$D_{ök}(x)$ = ; $W_{ök}$ =

Mindesteinsatz an Maschinen:

Mindesteinsatz an Mitarbeitern:

- Funktionsgleichung der Isokostengerade

- Mögliche Faktormengen bei einem Kostenbudget von 120 GE.

K= 120:

Ansatz:

zugehörige Faktormengen:

- Minimalkostenkombination, Grenzrate der Substitution, minimale Kosten

Ansatz:

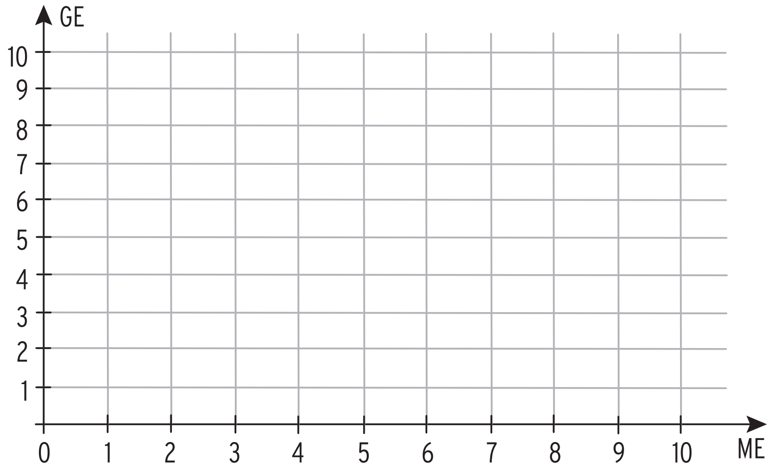
Minimalkostenkombination:

Grenzrate der Substitution

minimale Kosten

Interpretation:

Grafische Darstellung



Lückentext

Verwenden Sie folgende Begriffe: Steigung $-\frac{p_x}{p_y}$, GE pro ME, keine Schnittpunkte, mehr, nach y, der Isokostengeraden, höher, Kostenbudget, Isoquantenfunktion, fallend, Polstelle, Preisen p_x und p_y, Isokostengeraden, Ordinatenachse, mit der Ordinatenachse, der Isoquanten

Die Kombination von zwei Produktionsfaktoren wird beschrieben durch eine ______________ ___________ der Form $I(x) = \frac{a}{x-b} + c$. In $x_1 = b$ liegt eine ________________ von I vor, es werden also ______ als b ME des Produktionsfaktors x benötigt. Der Graph von I ist auf $D_{ök}$ monoton ________ und hat _________________________ mit der Abszissenachse.

Der Zusammenhang zwischen den __________________ in __________ der beiden Produktionsfaktoren und dem _________________ K wird durch die Gleichung $K = p_x \cdot x + p_y \cdot y$ beschrieben. Umformung __________ ergibt die Gleichung der __________________.

Diese Gerade hat die _______________, sie schneidet die _________________ in $\frac{K}{p_y}$.

Je größer K ist, desto _________ liegt der Schnittpunkt ____________________

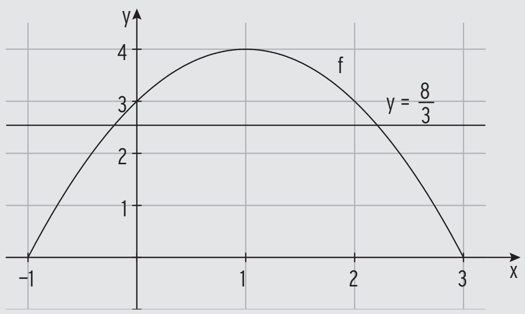
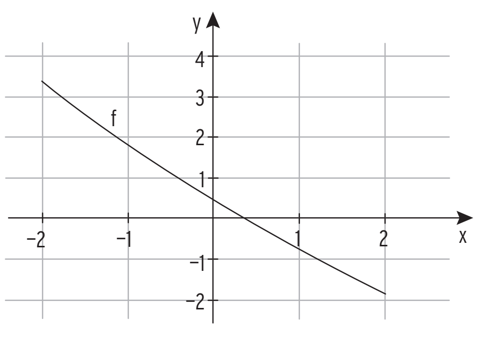
Für die Minimalkostenkombination müssen die Steigungen __________________ und _________________________________ übereinstimmen.

2.4 Anwendungen des Integrals

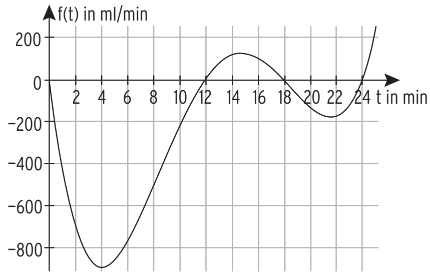
1 Berechnen Sie den Mittelwert $\overline{m}$ der Funktionswerte f(x) im Intervall [a; b]

$f(x) = -x^2 + 1$ $[a; b] = [-1; 1]$	$\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{3}+1-(\frac{1}{3}-1)) = \frac{2}{3}$ $\overline{m} = \frac{2}{3}$
$f(x) = 2x - 4$ $[a; b] = [-3; 0]$	
$f(x) = e^{-0,5x} + 2$ $[a; b] = [-2; 2]$	

2 Bestimmen Sie den mittleren Funktionswert $\overline{m}$ auf dem gegebenen Intervall. Zeichnen Sie die Gerade mit $y = \overline{m}$ ein.

$f(x) = (x+1)(3-x);\ x \in [-1; 3]$ 	$\overline{m} = \frac{1}{3-(-1)}\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx$ $= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} = \frac{8}{3}$ mittlerer Funktionswert: $\overline{m} = \frac{8}{3}$
$f(x) = 0,5e^{-0,5x} - x;\ x \in [-2; 2]$ 	

5 Zum Entfernen von Farbresten werden Eisenteile mit einer Spezialflüssigkeit besprüht. Diese befindet sich in einem Behälter, der zum Zeitpunkt 0 mit 7 Litern Flüssigkeit gefüllt ist. Durch den Verbrauch sinkt die Flüssigkeitsmenge im Behälter und muss daher wieder aufgefüllt werden. Entnahme und Zuführung der Flüssigkeit geschehen nicht gleichzeitig. Der Zu- bzw. Abfluss der Flüssigkeit wird modellhaft beschrieben durch den Graph der Funktion f mit $f(t) = 0{,}1t(t-12)(t-18)(t-24)$; $0 \leq t \leq 24$ (siehe Abb.) Nehmen Sie begründet Stellung zu folgenden Aussagen:



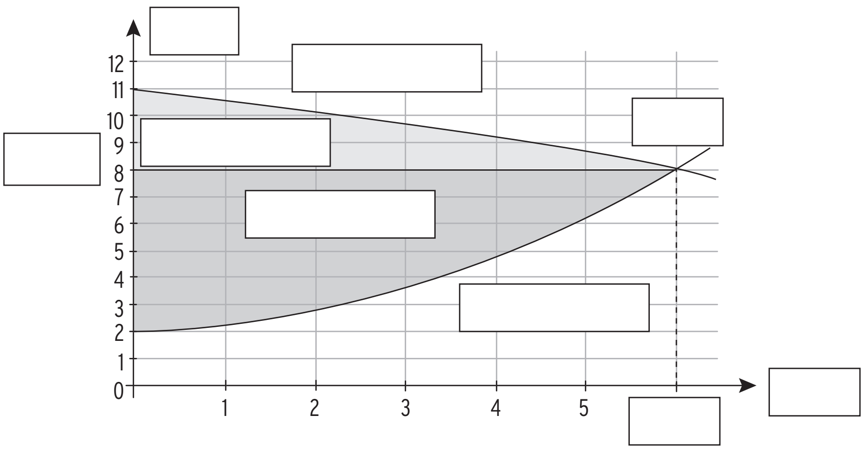
a) Nach 12 Minuten und nach 18 Minuten wird weder Flüssigkeit aufgetragen noch in den Behälter nachgefüllt.

b) Innerhalb der ersten 12 Minuten werden 6428,16 ml Flüssigkeit entnommen.

c) Zu keiner Zeit innerhalb der ersten 24 Minuten wird die Mindestfüllmenge des Behälters von 500 ml unterschritten.

d) Für ein Eisenteil werden 4 ml dieser Spezialflüssigkeit benötigt. Von Minute 20 bis zur Minute 23 sind insgesamt 121 Eisenteile besprüht worden.

6 Beschriften Sie die Abbildung zum Thema Angebot und Nachfrage.



2.5 Rotationskörper

1 Die abgebildete Fläche rotiert um die Abszissenachse.
Berechnen Sie den Volumeninhalt.

Abb. 1

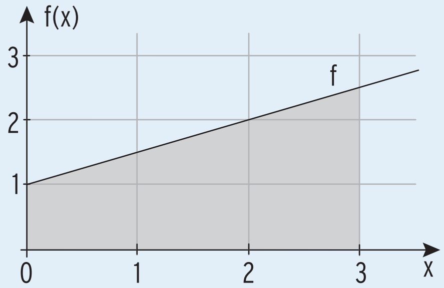
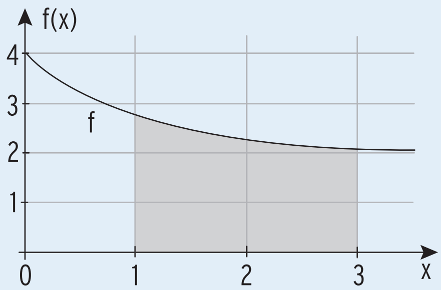


Abb. 2: $f(x) = 2e^{-x} + 2$



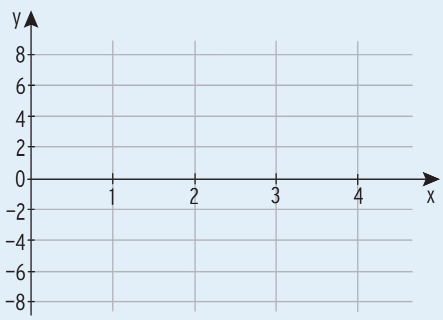
2 Der Graph der Funktion f mit $f(x)= x^2 + 1$ schließt mit der Abszissenachse auf dem Intervall [–1; 1] eine Fläche ein. Bei der Rotation dieser Fläche um die Abszissenachse entsteht ein Rotationskörper. Skizzieren Sie einen Querschnitt des Körpers.
Zeigen Sie, das Volumen beträgt $\frac{56}{15}\pi$.

3 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 4\sqrt{x}$ schließt mit der Abszissenachse auf dem Intervall [0; 4] eine Fläche ein. Bei der Rotation dieser Fläche um die Abszissenachse entsteht ein Rotationskörper in Form einer Schüssel.
Dabei sind x und f(x) in cm angegeben.

a) Fertigen Sie eine Skizze.

b) Die Schüssel ist 4,3 cm hoch. Überprüfen Sie.

c) Bestimmen Sie das Volumen der Schüssel.

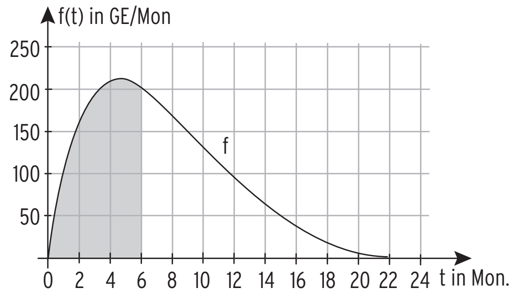


Lernsituation

2 Der Graph der abgebildeten Funktion f mit $f(t) = (-0{,}25t^3 + 121t)e^{-0{,}2t}$; $t \in D_{ök}$, prognostiziert die Umsatzentwicklung der BELFRUTI Gruppe. Dabei ist t die Zeit in Monaten und f(t) der Umsatz in ME/Monat.

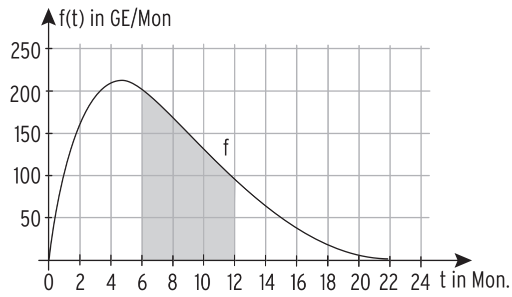
Berechnen Sie den Inhalt der hinterlegten Flächen. Interpretieren Sie den Inhalt ökonomisch.

Bearbeitung



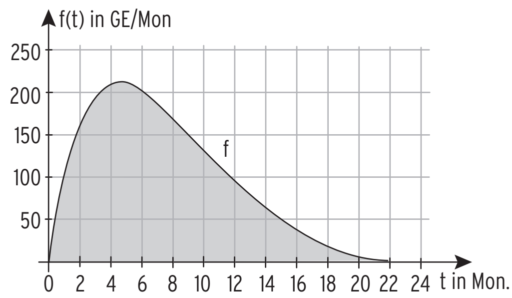
Flächenberechnung:

Interpretation:



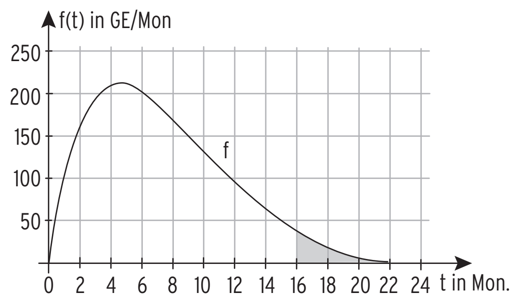
Flächenberechnung:

Interpretation:



Flächenberechnung:

Interpretation:



Flächenberechnung:

Interpretation:

Erwartungswert, Standardabweichung, Prognoseintervall

1 Es liegt eine binomialverteilte Zufallsvariable vor. Ergänzen Sie die Tabelle.

n	50	50	80		125
p	0,2	0,6		0,5	
μ	$n \cdot p = 10$		40	60	12,5
σ	$\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 2{,}83$				

2 Eine Maschine produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % fehlerfreie Schrauben. Bei einer Qualitätskontrolle werden 3 Schrauben überprüft. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl an fehlerfreien Schrauben bei der Qualitätskontrolle an.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert μ der Zufallsvariablen: ____________________

b) μ gibt ____ an.

c) Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X an.

k	0	1	2	3
P(X = k)				

d) Berechnen Sie μ erneut. Verwenden Sie hierzu jedoch die Wahrscheinlichkeitsverteilung. μ = ____

e) Berechnen Sie die Standardabweichung von X: ____________________

f) σ gibt ____ an.

3 In einem Hallenbad gibt der Eintrittskartenautomat jedem zwölften Besucher eine unbrauchbare Eintrittskarte aus. An einem Samstag Vormittag benutzen 155 Personen den Automat. X ist die Anzahl der Personen, die eine unbrauchbare Eintrittskarte erhalten. Berechnen Sie μ, σ und $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$.

μ = __________ σ = __________

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ = ______________________________

Bestimmen Sie das 95 %-Prognoseintervall: ____________________

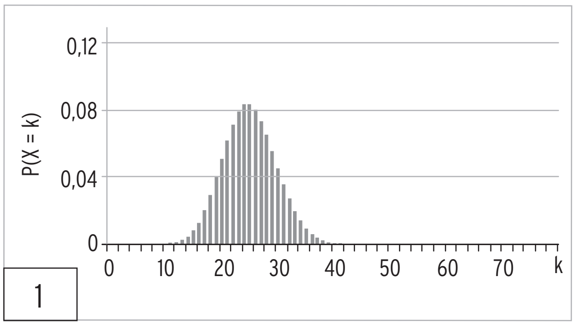
____

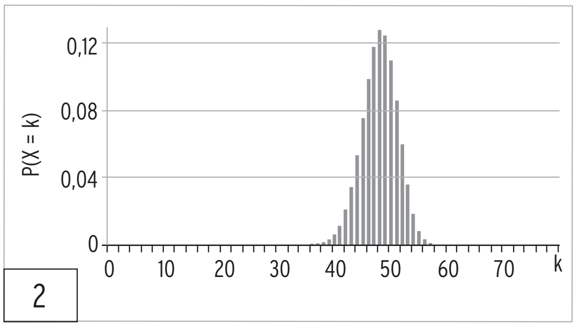
Interpretieren Sie diese Wahrscheinlichkeit. ____________________

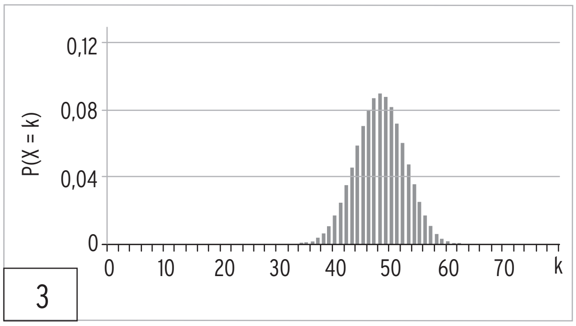
____

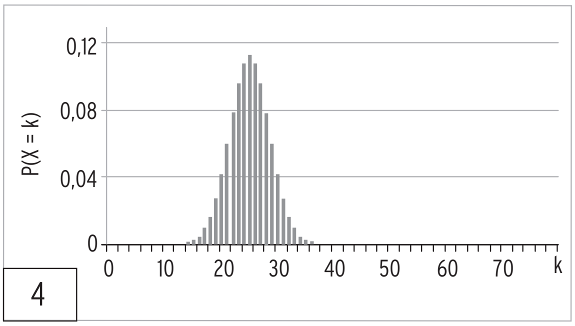
4 Vervollständigen Sie die Tabelle. Ordnen Sie dann die Schaubilder zu.

n	250	50	80	60
p	0,1	0,5	0,6	0,8
μ				
σ				
Schaubild				









5 Ein Glücksrad hat drei farbige Sektoren, die beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt werden: Rot 20 %; Grün 30 %; Blau 50 %.
Das Glücksrad wird n-mal gedreht. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Farbe Rot angezeigt wird.

a) Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist.

b) Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
P(X = k)	0,01	0,06	0,14	0,21	0,22	0,17	0,11	0,05	

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3-mal rot angezeigt wird.

Entscheiden Sie, welcher der folgenden Werte von n der Tabelle zugrunde liegen kann: 20, 25 oder 30. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

6 Auf dem Weg zur Arbeit kommt Stefan jeden Tag an einer Ampel vorbei, welche mit einer Wahrscheinlichkeit von 35 % auf Rot steht. Pro Jahr arbeitet Stefan an 220 Tagen.

a) Geben Sie an, mit wie vielen Tagen pro Jahr, an welchen die Ampel auf Rot steht, Stefan rechnen muss.

b) Bestimmen Sie, an wie vielen Tagen im nächsten Jahr die Ampel mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,4 % auf Rot steht. Geben Sie hierfür ein Intervall an.

Der gegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit ist der c-Wert in der Tabelle zugeordnet. Mit der Standardabweichung von σ =

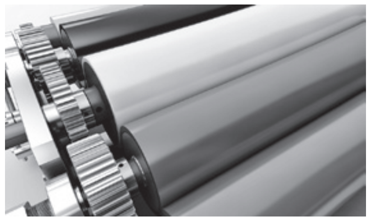
führt dies zu dem Intervall

c) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit γ = 0,92 an.

7 Sind die Aussagen, bezogen auf eine binomialverteilte Zufallsvariable, wahr (w) oder falsch (f)?

Der Erwartungswert gibt stets die Trefferanzahl an, die die höchste Wahrscheinlichkeit aufweist.	☐ (w) ☐ (f)
Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung der Werte einer Zufallsvariablen um den Erwartungswert.	☐ (w) ☐ (f)
Die Standardabweichung misst die Breite der Verteilung.	☐ (w) ☐ (f)
Ein Intervall, das mithilfe der Sigmaregeln berechnet wird, ist stets symmetrisch zum Erwartungswert.	☐ (w) ☐ (f)
Eine Binomialverteilung ist annähernd normalverteilt für $\sigma > 5$.	☐ (w) ☐ (f)
Die Sigmaregeln treffen umso besser zu, je größer der Stichprobenumfang ist.	☐ (w) ☐ (f)
Mit den Sigmaregeln können Wahrscheinlichkeiten abgeschätzt werden.	☐ (w) ☐ (f)

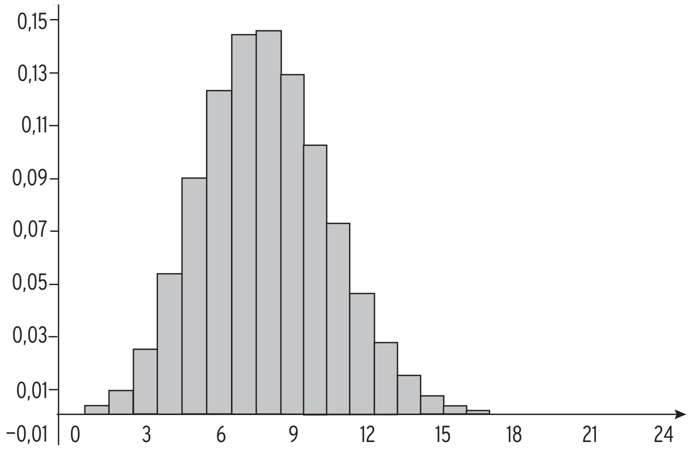
Lernsituation



Im Bereich Thermodruck verwendet die Druckfix GmbH neben den Walzen aus eigener Herstellung auch Walzen, die regional hergestellt werden und solche, die aus Asien importiert werden. Vor dem Einbau einer Walze durchläuft diese bei Druckfix eine Qualitätsanalyse. Defekte Walzen werden als Ausschuss aussortiert.

Einer Lieferung aus Asien wird eine Stichprobe von 100 Walzen entnommen und hinsichtlich ihrer Qualität untersucht. Die Verteilung derZufallsgröße X: „Anzahl der defekten Walzen in der Stichprobe" ist binomialverteilt mit einer Ausschussquote von 8 % .

- Bestimmen Sie den Erwartungswert der Verteilung und die Wahrscheinlichkeit, dass X tatsächlich den Erwartungswert annimmt.
- Das nebenstehende Histogramm zeigt die Verteilung der Zufallsgröße X.



  Prüfen Sie mit Hilfe des Histogramms folgende Aussagen der Qualitätsabteilung:

  A: Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 20 Walzen defekt sind, ist so gut wie Null.

  B: Die Wahrscheinlichkeit, dass 9 Walzen defekt sind, ist größer als die von jeder anderen Anzahl defekter Walzen.

  C: Es ist gleich wahrscheinlich 6 oder 9 defekte Walzen in der Stichprobe zu haben.

  D: Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Walzen defekt sind, ist kleiner als 3%.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Walzen defekt sind. Geben Sie einen geeigneten Term an.
- Es werden alle 100 Walzen einer regionalen Lieferung einer Qualitätsanalyse unterzogen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Defekt beträgt p = 0,05. Füllen Sie die Tabelle in der Anlage aus.
- In der Stichprobe sind 10 defekte Walzen. Entscheiden Sie mit bei einer Sicherheitwahrscheinlichkeit von 90 %, ob das Stichprobenergebnis mit den Angaben der Druckfix GmbH verträglich ist.

Bearbeitung

- Erwartungswert: Wahrscheinlichkeit:
- A:
- B:
- C:
- D:
- P(X) =

Anlage Tabelle

Ereignis	Wahrscheinlichkeit
A: Höchstens 2 Walzen sind defekt.	
B:	$P(X \geq 3) =$
C: Es befinden sich mindestens 4 und höchstens 7 defekte Walzen in der Stichprobe.	
D: In der Stichprobe befindet sich die erwartete Menge intakter Walzen.	
E:	$P(X = 0) =$
F: Es gibt mehr als 6 defekte Walzen.	
G:	$P(X < 8) =$
H: Es befinden sich genau 4 defekte Walzen in der Stichprobe.	

- 90 %-Prognoseintervall:

Produktions-und Verbrauchsvektoren

1 Ein Betrieb fertigt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3. Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sind gegeben durch

$A = A_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = B_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Verbrauch an Rohstoffen, um 6 ME von Z_1, 6 ME von Z_2 und 10 ME von Z_3 herzustellen.

Lösung: $\vec{r} = A_{RZ} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 22 \\ 70 \end{pmatrix}$

Es werden 40 ME R_1, 22 ME R_2 und 70 ME R_3 benötigt.

b) Bestimmen Sie den Bedarf an Zwischenprodukten, um jeweils 10 ME von E_1, E_2 und E_3 herzustellen.

Lösung: $\vec{z} = B_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 60 \\ 90 \end{pmatrix}$

Es werden 110 ME von Z_1, 60 ME von Z_2 und 90 ME von Z_3 benötigt.

c) Berechnen Sie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C.

Lösung: $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 19 \\ 9 & 6 & 11 \\ 24 & 15 & 32 \end{pmatrix}$ $\quad C = C_{RE}$

d) Berechnen Sie den Verbrauch an Rohstoffen zur Herstellung von 10 ME von E_1, 10 ME von E_2 und 5 ME von E_3.

Lösung: $\vec{r} = C_{RE} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 395 \\ 205 \\ 550 \end{pmatrix}$

Es werden 395 ME R_1, 205 ME R_2 und 550 ME R_3 benötigt.

2 Ein Betrieb fertigt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3. Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sind gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Verbrauch an Rohstoffen, um 5 ME von Z_1, 8 ME von Z_2 und 8 ME von Z_3 herzustellen.

$\vec{r} =$

b) Ermitteln Sie, wieviele Zwischenprodukte benötigt werden, um 5 ME von E_1, 8 ME von E_2 und 8 ME von E_3 herzustellen.

$\vec{z} =$

c) Berechnen Sie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C.

$C = A \cdot B =$

d) Bestimmen Sie den Bedarf an Rohstoffen zur Herstellung von 10 ME von E_1, 10 ME von E_2 und 5 ME von E_3.

$\vec{r} =$

4 Ein Betrieb fertigt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3.
A ist die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix,
B ist die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix,
C ist die Rohstoff-Endprodukt-Matrix,
$\vec{x}$ ist der Produktionsvektor (Endprodukte), $\vec{z}$ ist der Zwischenproduktvektor,
$\vec{r}$ ist der Verbrauchsvektor für die Rohstoffe.
Formulieren Sie eine geeignete Fragestellung. Ordnen Sie den Vektoren bzw. Matrizen einen Begriff zu.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \vec{z}$$

$$C \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 37 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ z_2 \\ 2z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 50 \end{pmatrix}$$

IV Analytische Geometrie

1 Raumanschauung und Koordinatisierung

Punkte im dreidimensionalen Raum

1 Eine quadratische Pyramide hat die Grundfläche ABCD und eine Höhe von 3.

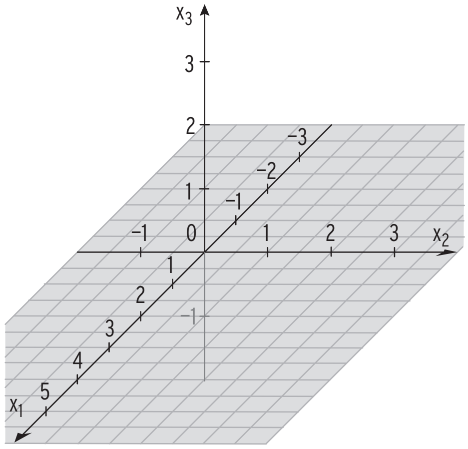
a) Geben Sie die fehlenden Koordinaten an und zeichnen Sie die Pyramide ein.

A(3 |0 |0); B(__ | __ | __); C(0 |3 |0)

D(0 |0 |0); S(0 | 0 | __)

b) Geben Sie den Mittelpunkt der Kante BC an.

M(__ | __ | __)

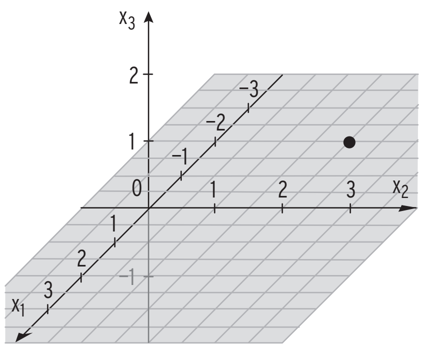


2 Geben Sie die fehlenden Koordinaten an.

Punkt	Spiegelung an der x_1x_2-Ebene	Spiegelung an der x_1x_3-Ebene	Spiegelung an der x_2x_3-Ebene	Spiegelung am Ursprung
A(2 |3 |4)	A_1(2 |3 |− 4)	A_2(2 |− 3 |4)	A_3(− 2 |3 |4)	A_4(−2 |−3 |−4)
A(__ | __ | __)	A_1(__ | __ | __)	A_2(− 1 |0 |3)	A_3(__ |__ |__)	A_4(__ |__ |__)
B(__ | __ | __)	B_1(__ | __ | __)	B_2(4 | 1 |− 2)	B_3(__ |__ |__)	B_4(__ |__ |__)
C(__ | __ | __)	C_1(__ | __ | __)	C_2(__ | __ | __)	C_3(__ | __ | __)	C_4(4 | 2| 0)
D(__ | __ | __)	D_1(__ | __ | __)	D_2(__ | __ | __)	D_3(3 |0 |0)	D_4(__ | __ | __)

3 Geben Sie die Koordinaten von 3 Punkten an, die zum im Koordinatensystem eingezeichneten Punkt gehören können.

A(0 | 3 |___); B(− 2|___| 0); C(1 | 3,5 |___)



2 Maße und Längen

Betrag eines Vektors

1 Berechnen Sie die Länge der Vektoren.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{18}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$: ______________________________

$\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$: ______________________________

2 Berechnen Sie den Abstand der Punkte A und B.

A(4 | − 1 | 1)
B(0 | 3 | 3)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 2^2} = 6$

A(− 1 | 2 | 0)
B(− 3| − 1 | 2)

A(2 | 6 | 9)
B(0 | 1 | − 1)

3 Die Punkte A(3 | 1 | 2), B(2 | 2 | 1), C(1 | 1 | 2) und D(2 | 0 |3) liegen in einer Ebene. Untersuchen Sie, ob das Viereck ABCD eine Raute ist.

$\overrightarrow{AB} =$

$\overrightarrow{DC} =$

Das Viereck ABCD ist ein ____________________

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\_\_\_)^2 + (\_\_\_)^2 + (\_\_\_)^2} =$

$\overrightarrow{AD} =$

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(\_\_\_)^2 + (\_\_\_)^2 + (\_\_\_)^2} =$

Das Viereck ABCD ist eine Raute: ☐ ja ☐ nein

Skalarprodukt

1 Berechnen Sie $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}=2\cdot3+(-1)\cdot1+1\cdot4=9$
$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$	
$\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\-1\\0\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\6\\-5\end{pmatrix}$	

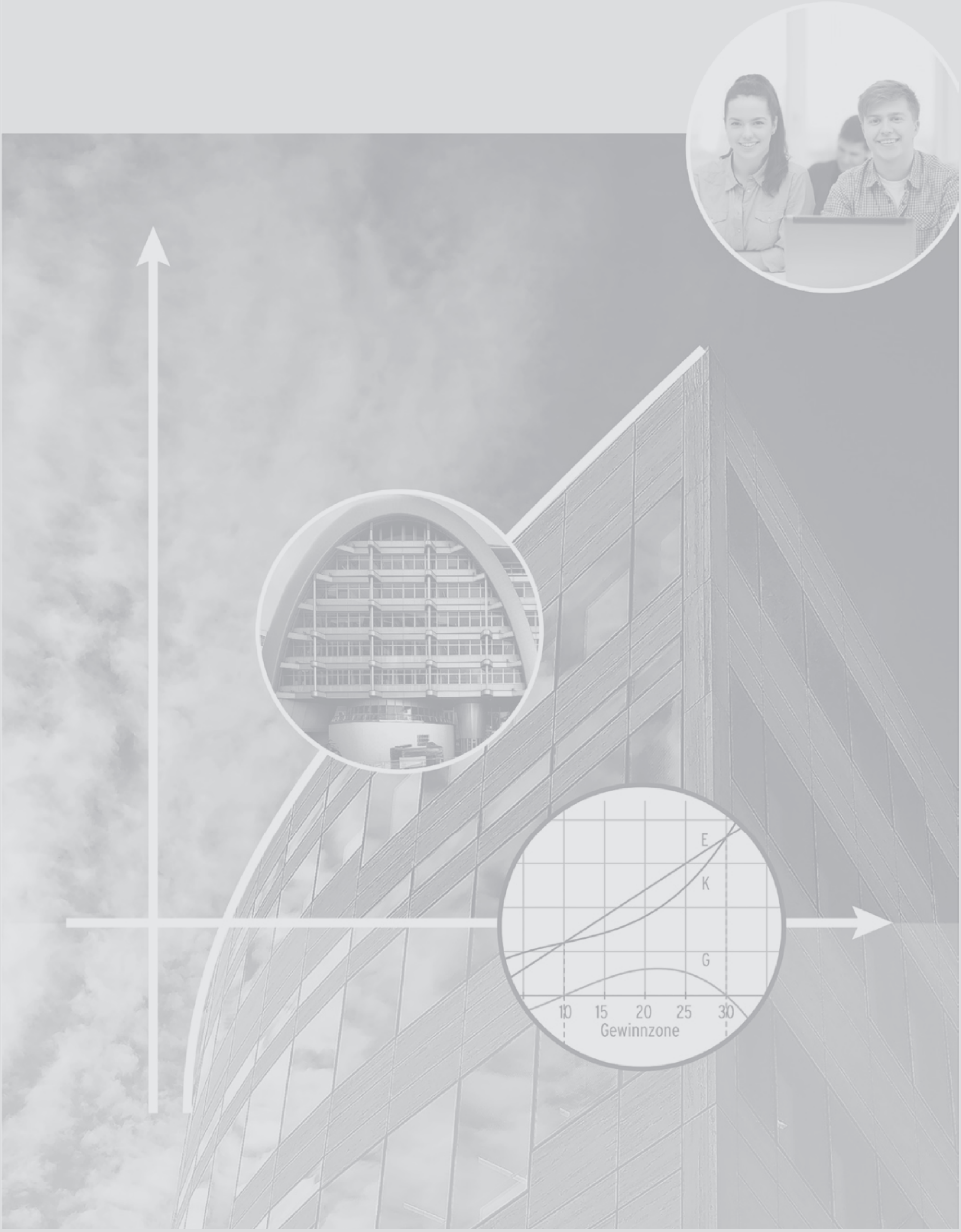
2 Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal zueinander. Überprüfen Sie.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot2+(-1)\cdot1+1\cdot2=9\neq0$ nicht orthogonal
$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix}$	
$\vec{a}=\begin{pmatrix}7\\-2\\0\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$	

3 Bestimmen Sie den Wert von t , sodass die Vektoren orthogonal zueinander sind.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}t\\1\\2\end{pmatrix}$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot t+(-1)\cdot1+1\cdot2=4t+1=0$ für $t=-\frac{1}{4}$
$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}t\\-1\\2\end{pmatrix}$	
$\vec{a}=\begin{pmatrix}7\\-2\\0\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\t\\2t\end{pmatrix}$	
$\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\t\\4\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}5\\1\\t\end{pmatrix}$	

Lösungen



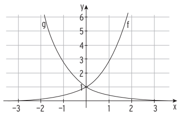
I Analysis

1 Differenzialrechnung

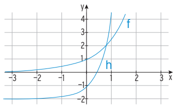
1.1 Exponentialfunktionen

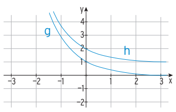
Graphen von Exponentialfunktionen

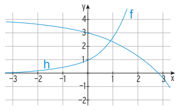
1 Die Abbildung zeigt die Graphen von f mit $f(x) = e^x$ bzw. g mit $g(x) = e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie den Graphen der gegebenen Funktion h.



a) $h(x) = e^{2x} - 2$ b) $h(x) = e^{-x} + 1$ c) $h(x) = 4 - e^{0{,}5x}$



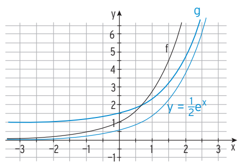


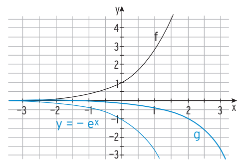


2 Der Graph von f mit $f(x) = e^x$ wird abgebildet und es entsteht der Graph von g. Zeichnen Sie den Graphen von g ein und geben Sie den Funktionsterm an.

a) Der Graph von f wird in Ordinatenrichtung mit Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckt und dann um eine Einheit nach oben verschoben.

b) Der Graph von f wird an der Abszissenachse gespiegelt und dann um 2 Einheiten nach rechts verschoben.





$g(x) = \frac{1}{2}e^x + 1$ $g(x) = -e^{x-2}$

3 Jo und Hans diskutieren darüber, wie man der Graph von g mit $g(x) = e^{x+1}$ aus dem Graph von f mit $f(x) = e^x$ erhält. Jo behauptet, dass man den Graphen von f um eine Einheit nach links verschieben muss. Hans entgegnet, dass man den Graphen von f mit dem Faktor e in Ordinatenrichtung strecken muss. Entscheiden Sie.

Verschiebung um 1 nach links: Ersetzen von x durch (x + 1), also $g(x) = e^{x+1}$

Streckung in Ordinatenrichtung mit Faktor e; $g(x) = e \cdot e^x = e^1 \cdot e^x = e^{x+1}$

Beide haben Recht.

4 Beschreiben Sie in Worten, wie der Graph von g aus dem Graphen von f mit $f(x) = e^x$ hervorgeht. Achten Sie auf die richtige Reihenfolge!

$g(x) = -e^x + 1$	Spiegelung an der Abszissenachse; Verschiebung um 1 nach oben
$g(x) = e^{-x} - 2$	Spiegelung a.d. Ordinatenachse; Verschiebung um 2 nach unten
$g(x) = 2e^x + 3$	Streckung in Ordinatenrichtung mit Faktor 2; Verschiebung um 3 nach oben
$g(x) = -\frac{1}{2}e^x + 4$	Spiegelung an der Abszissenachse; Streckung in Ordinatenrichtung mit Faktor $\frac{1}{2}$; Verschiebung um 4 nach oben
$g(x) = 3e^{x-1}$	Streckung in Ordinaten-Ri mit 3; Verschiebung um 1 nach rechts

5 Geben Sie die Gleichung der Asymptote, die Annäherungsrichtung und den Schnittpunkt mit der Ordinatenachse an.

Funktionsterm	Asymptote	für $x \to \infty$, für $x \to -\infty$	S_y
$f(x) = -e^x + 1$	y = 1	für $x \to -\infty$	$S_y(0 \mid 0)$
$f(x) = -e^{2x} + 3$	y = 3	für $x \to -\infty$	$S_y(0 \mid 2)$
$f(x) = 2 + e^{-0{,}25x}$	y = 2	für $x \to \infty$	$S_y(0 \mid 3)$
$f(x) = -2x\,e^x$	y = 0	für $x \to -\infty$	$S_y(0 \mid 0)$
$f(x) = (x - 2)\,e^{-3x}$	y = 0	für $x \to \infty$	$S_y(0 \mid -2)$
$f(x) = 5 - 2e^{0{,}45x}$	y = 5	für $x \to -\infty$	$S_y(0 \mid 3)$

6 Geben Sie einen möglichen Funktionsterm an.

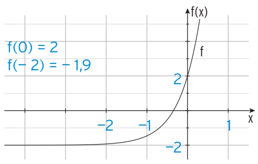
Asymptote	für $x \to \infty$, für $x \to -\infty$	S_y	Funktionsterm
y = 0	für $x \to -\infty$	$S_y(0 \mid 2)$	$f(x) = 2e^{0{,}4x}$
y = 2	für $x \to \infty$	$S_y(0 \mid 1)$	$f(x) = -e^{-2x} + 2$
y = − 4	für $x \to -\infty$	$S_y(0 \mid -2)$	$f(x) = 2e^{0{,}5x} - 4$
y = − 1	für $x \to \infty$	$S_y(0 \mid 0)$	$f(x) = e^{-0{,}25x} - 1$

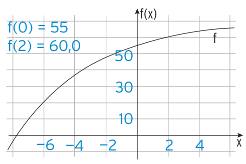
7 Ein Mitschüler versteht nicht, was mit dem Begriff „Asymptote“ gemeint ist. Notieren Sie eine verständliche Erklärung für diesen Begriff.

Der Graph einer Funktion nähert sich einer Geraden für $x \to \infty$ bzw. für $x \to -\infty$ immer mehr an. Diese Gerade heißt (waagrechte oder schiefe) Asymptote.

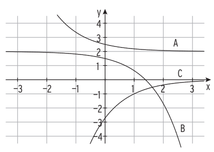
8 Skalieren Sie die Koordinatenachsen.

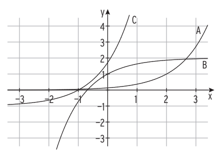
$f(x) = 4e^{2x} - 2$ $f(x) = 70 - 15e^{-0{,}2x}$





9 Ordnen Sie zu.





B : $f(x) = -0{,}5e^x + 2$

A : $g(x) = 0{,}5e^{-x} + 2$

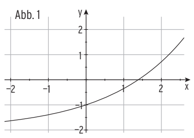
C : $h(x) = -e^{1-x}$

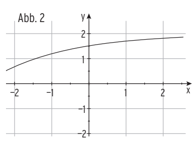
A : $f(x) = e^{x-2}$

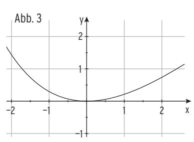
B : $g(x) = -e^{-x} + 2$

C : $h(x) = e^{x+1} - 1$

10 Geben Sie für jedes der abgebildeten Schaubilder, das nicht zu einer Funktion vom Typ $f(x) = a + be^{-0{,}5x}$ gehören kann, ein ausschließendes Argument an. Ansonsten bestimmen Sie die zugehörigen Werte für a und b.







Der Graph von f hat eine waagrechte Asympote mit y = a für $x \to \infty$.

Abb. 1 nicht, da Asymptote für $x \to -\infty$ Abb. 3 nicht, da schiefe Asymptote

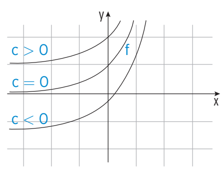
Abb. 2: Asymptote mit y = 2, also a = 2; $S_y(0 \mid 1{,}5)$: $2 + b = 1{,}5 \Rightarrow b = -0{,}5$

11 Entscheiden Sie, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.

	(w)	(f)
Beim beschränkten Wachstum bzw. Zerfall hat der Graph stets eine Asymptote, welche nicht die Abszissenachse ist.	☐	☒
Beim exponentiellen Wachstum nimmt die y-Größe zu Beginn am stärksten zu.	☐	☒
Beim beschränkten Zerfall nimmt die y-Größe zu Beginn am stärksten ab.	☒	☐
Eine Pizza wird bei 180 °C aus dem Ofen genommen und kühlt dann auf 20 °C Zimmertemperatur ab. Der Temperaturverlauf kann damit durch einen exponentiellen Zerfallsvorgang beschrieben werden.	☐	☒

Exponentialgleichungen

1 Bestimmen Sie die Werte von c, sodass die Gleichung $e^x + c = 0$ eine Lösung hat.
Antwort: Für $c < 0$
Begründen Sie mithilfe einer Skizze:
c bedeutet Verschiebung in Ordinatenrichtung.
Der Graph von f mit $f(x) = e^x$ hat die Abszissenachse als Asymptote. Der Graph von f muss also nach unten verschoben werden, $c < 0$



2 Berechnen Sie ohne Hilfsmittel.

a) $3^x = 27 \Rightarrow x = 3$ b) $2^x = 64 \Rightarrow x = 6$ c) $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

d) $\ln(e^3) = 3$, da $e^3 = e^3$ e) $\ln(e) = 1$, da $e^1 = e$ f) $\ln(\frac{1}{e}) = -1$, da $e^{-1} = \frac{1}{e}$

3 Lösen Sie die Gleichung mithilfe des Logarithmus .

$3e^{2x} = 15$	$2e^{-x} - 3 = 1$	$7 - 2e^{-0{,}2x} = 0$	$-e^{\frac{2}{5}x} + 2 = -1$
$e^{2x} = 5$	$2e^{-x} = 4$	$2e^{-0{,}2x} = 7$	$e^{\frac{2}{5}x} = 3$
$2x = \ln(5)$	$e^{-x} = 2$	$e^{-0{,}2x} = 3{,}5$	$\frac{2}{5}x = \ln(3)$
$x = \frac{1}{2}\ln(5)$	$-x = \ln(2)$	$-0{,}2x = \ln(3{,}5)$	$x = \frac{5}{2}\ln(3)$
	$x = -\ln(2)$	$x = -5\ln(3{,}5)$	