Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik am BSW Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG behält sich eine Nutzung ihrer Inhalte für kommerzielles Text- und Data Mining (TDM) im Sinne von § 44 b UrhG ausdrücklich vor. Für den Erwerb einer entsprechenden Nutzungserlaubnis wenden Sie sich bitte an copyright@merkur-verlag.de.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte in zumutbarem Umfang untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.
Stand: Juni 2022

Umschlag: © frhuynh – Fotolia.com

* * * * * * * * *

6. Auflage 2022
© 1997 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0338-06
ISBN 978-3-8120-0338-4

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band „Mathematik für berufliche Gymnasien – Jahrgangsstufen 1 und 2“ ist ein Lehr- und Arbeitsbuch für alle beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg für beide Anforderungsniveaus (gA und eA).
Das Lehrbuch richtet sich exakt nach dem neuen Bildungsplan für die gymnasiale Oberstufe, Mathematik, in Baden-Württemberg, der am 01.08.2021 in Kraft getreten ist.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam sowohl die im Lehrplan geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen (modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

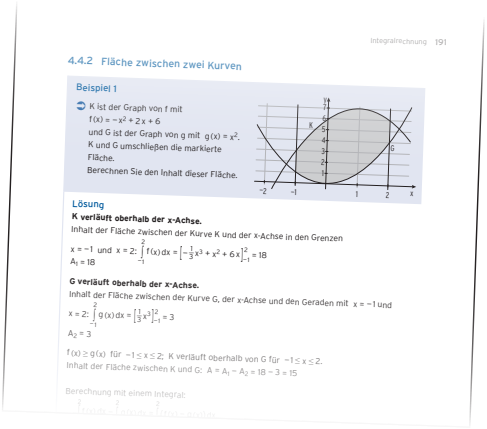
Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die im Bildungsplan aufgeführten Kompetenzen und Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.


Integralrechnung 191

4.4.2 Fläche zwischen zwei Kurven

Beispiel 1

K ist der Graph von f mit
$f(x) = -x^2 + 2x + 6$
und G ist der Graph von g mit $g(x) = x^2$.
K und G umschließen die markierte Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Lösung

K verläuft oberhalb der x-Achse.
Inhalt der Fläche zwischen der Kurve K und der x-Achse in den Grenzen
$x = -1$ und $x = 2$: $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 6x\right]_{-1}^{2} = 18$
$A_1 = 18$

G verläuft oberhalb der x-Achse.
Inhalt der Fläche zwischen der Kurve G, der x-Achse und den Geraden mit $x = -1$ und
$x = 2$: $\int_{-1}^{2} g(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = 3$
$A_2 = 3$

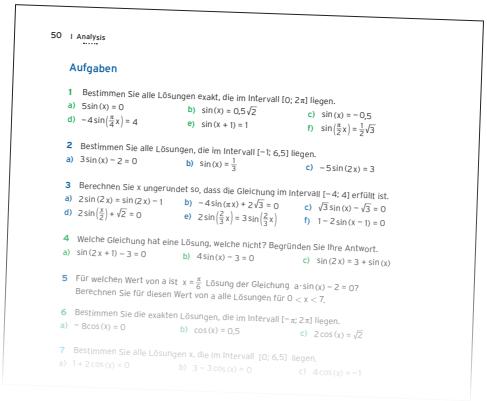
$f(x) \geq g(x)$ für $-1 \leq x \leq 2$; K verläuft oberhalb von G für $-1 \leq x \leq 2$.
Inhalt der Fläche zwischen K und G: $A = A_1 - A_2 = 18 - 3 = 15$

Berechnung mit einem Integral:

Jede Lerneinheit schließt mit einer ausreichenden Anzahl von **Aufgaben** ab. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Aufgaben aus dem Alltag, aus der Wirtschaft und der Technik stellen einen praktischen Bezug her. Eine Differenzierung der Aufgaben ist durch Farben gegeben:

grün: Lösung ohne Hilfsmittel

blau: keine Vorgabe zur Lösung


50 I Analysis

Aufgaben

1 Bestimmen Sie alle Lösungen exakt, die im Intervall [0; 2π] liegen.
a) $5\sin(x) = 0$ b) $\sin(x) = 0{,}5\sqrt{2}$ c) $\sin(x) = -0{,}5$
d) $-4\sin\left(\frac{5}{2}x\right) = 4$ e) $\sin(x+1) = 1$ f) $\sin\left(\frac{5}{2}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

2 Bestimmen Sie alle Lösungen, die im Intervall [−1; 6,5] liegen.
a) $3\sin(x) - 2 = 0$ b) $\sin(x) = \frac{1}{3}$ c) $-5\sin(2x) = 3$

3 Berechnen Sie x ungerundet so, dass die Gleichung im Intervall [−4; 4] erfüllt ist.
a) $2\sin(2x) = \sin(2x) - 1$ b) $-4\sin(\pi x) + 2\sqrt{3} = 0$ c) $\sqrt{3}\sin(x) - \sqrt{3} = 0$
d) $2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{2} = 0$ e) $2\sin\left(\frac{1}{3}x\right) = 3\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$ f) $1 - 2\sin(x-1) = 0$

4 Welche Gleichung hat eine Lösung, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.
a) $\sin(2x+1) - 3 = 0$ b) $4\sin(x) - 3 = 0$ c) $\sin(2x) = 3 + \sin(x)$

5 Für welchen Wert von a ist $x = \frac{\pi}{6}$ Lösung der Gleichung $a \cdot \sin(x) - 2 = 0$?
Berechnen Sie für diesen Wert von a alle Lösungen für $0 < x < 7$.

6 Bestimmen Sie die exakten Lösungen, die im Intervall [−π; 2π] liegen.
a) $-8\cos(x) = 0$ b) $\cos(x) = 0{,}5$ c) $2\cos(x) = \sqrt{2}$

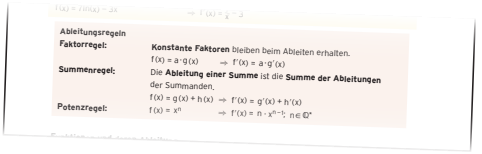
7 Bestimmen Sie alle Lösungen x, die im Intervall [0; 6,5] liegen.
a) $1 + 2\cos(x) = 0$ b) $3 - 3\cos(x) = 0$ c) $4\cos(x) = -1$

Themen und Aufgaben für das **erhöhte Anforderungsniveau (eA)** sind farblich gelb hinterlegt.

4.5.3 Rotationskörper

Die Bilder zeigen **Rotationskörper** aus dem Alltag. Bei diesen Körpern ist das Volumen eine wichtige Größe. Das Volumen kann mithilfe der Integralrechnung bestimmt werden.

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

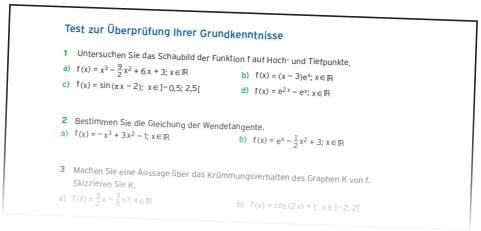

Ableitungsregeln

Faktorregel: **Konstante Faktoren** bleiben beim Ableiten erhalten.
$f(x) = a \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = a \cdot g'(x)$

Summenregel: Die **Ableitung einer Summe** ist die **Summe der Ableitungen** der Summanden.
$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Potenzregel: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1};\ n \in \mathbb{Q}^*$

Die Aufgaben **„Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse“** sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Sie werden im Anhang ausführlich gelöst.

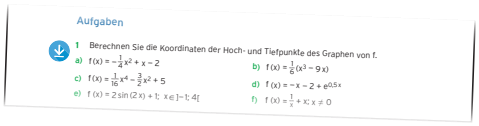

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Untersuchen Sie das Schaubild der Funktion f auf Hoch- und Tiefpunkte.
a) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + 3;\ x \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = (x-3)e^x;\ x \in \mathbb{R}$
c) $f(x) = \sin(\pi x - 2);\ x \in]-0{,}5; 2{,}5[$ d) $f(x) = e^{2x} - e^x;\ x \in \mathbb{R}$

2 Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.
a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1;\ x \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + 3;\ x \in \mathbb{R}$

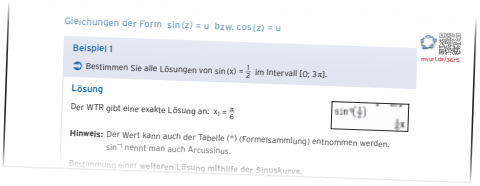
3 Machen Sie eine Aussage über das Krümmungsverhalten des Graphen K von f. Skizzieren Sie K.
a) $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^3;\ x \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = \cos(2x) + 1;\ x \in]-2; 2[$

Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese im Downloadbereich zum Buch auf unserer Webseite https://www. merkur-verlag.de.


Aufgaben

1 Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f.
a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 2$ b) $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 9x)$
c) $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5$ d) $f(x) = -x - 2 + e^{0{,}5x}$
e) $f(x) = 2\sin(2x) + 1;\ x \in]-1; 4[$ f) $f(x) = \frac{1}{x} + x;\ x \neq 0$

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Im Buch wird **Geogebra** in vielfältiger Weise, zur Erarbeitung von mathematischen Inhalten und zur Lösung von Aufgaben eingesetzt.


Gleichungen der Form sin (z) = u bzw. cos (z) = u

Beispiel 1

Bestimmen Sie alle Lösungen von $\sin(x) = \frac{1}{2}$ im Intervall [0; 3π].

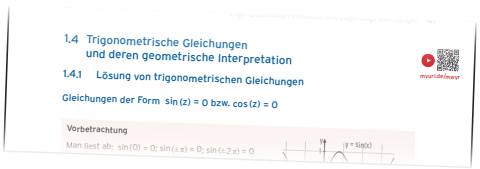
Lösung

Der WTR gibt eine exakte Lösung an: $x_1 = \frac{\pi}{6}$

Hinweis: Der Wert kann auch der Tabelle (*) (Formelsammlung) entnommen werden. $\sin^{-1}$ nennt man auch Arcussinus.

Bestimmung einer weiteren Lösung mithilfe der Sinuskurve.

Videos dienen der Veranschaulichung von Problemen und Erläuterung von Lösungswegen. Sie unterstützen die Lernenden beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge.


1.4 Trigonometrische Gleichungen und deren geometrische Interpretation

1.4.1 Lösung von trigonometrischen Gleichungen

Gleichungen der Form sin (z) = 0 bzw. cos (z) = 0

Vorbetrachtung

Man liest ab: $\sin(0) = 0$; $\sin(\pm\pi) = 0$; $\sin(\pm 2\pi) = 0$

Inhaltsverzeichnis

I Analysis 10

1 Trigonometrische Funktionen und zugehörige Gleichungen 10
1.1 Definition der Winkelfunktionen 12
1.1.1 Definition der Winkelfunktionen für Winkel von 0° bis 90° 12
1.1.2 Definition der Winkelfunktionen für beliebige Winkel 16
1.1.3 Das Bogenmaß eines Winkels 20
1.2 Trigonometrische Funktionen 21
1.2.1 Sinus- und Kosinusfunktion 21
1.2.2 Transformationen 23
1.3 Aufstellen von Funktionstermen 38
1.4 Trigonometrische Gleichungen und deren geometrische Interpretation 41
1.4.1 Lösung von trigonometrischen Gleichungen 41
1.4.2 Gemeinsame Punkte 51
1.5 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben 59

2 Verknüpfung, Verkettung und Umkehrung von Funktionen 64
2.1 Verknüpfung von Funktionen 66
2.1.1 Summe von Funktionen 66
2.1.2 Produkt von Funktionen 69
2.2 Verkettung von Funktionen 70
2.3 Umkehrung von Funktionen 72
2.3.1 Bestimmung einer Umkehrfunktion 72
2.3.2 Umkehrbarkeit 75
2.3.3 Umkehrung einer Exponentialfunktion – Logarithmusfunktion 78

3 Differenzialrechnung 80
3.1 Ableitungen von Funktionen 82
3.1.1 Definition der Ableitung 82
3.1.2 Ableitungsregeln 86
3.1.3 Tangente 100
3.2 Untersuchung von Funktionsgraphen mithilfe der Differenzialrechnung 105
3.2.1 Monotonie 105
3.2.2 Extrempunkte 110
3.2.3 Wendepunkte 118
3.2.4 Kurvenuntersuchung 127
3.3 Aufstellen von Kurvengleichungen aus gegebenen Bedingungen 134
3.4 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben 144
3.5 Optimieren 154

4 Integralrechnung 160
4.1 Einführung 162
4.2 Stammfunktion, grafisches Ableiten und Aufleiten 164
4.2.1 Stammfunktion 164
4.2.2 Grafisches Ableiten und grafisches Aufleiten 170

4.3 Das bestimmte Integral ... 175
4.4 Flächeninhaltsberechnung mithilfe der Integralrechnung ... 184
4.4.1 Fläche zwischen Kurve und x-Achse ... 184
4.4.2 Fläche zwischen zwei Kurven ... 191
4.4.3 Besondere Aufgabenstellungen bei der Flächeninhaltsberechnung ... 200
4.5 Anwendungen der Integralrechnung ... 208
4.5.1 Flächen in anwendungsorientierten Aufgaben ... 208
4.5.2 Interpretation von Flächen ... 210
4.5.3 Rotationskörper ... 218

II Vektorielle Geometrie 222

1 Lineare Gleichungssysteme ... 222
1.1 Einführung ... 224
1.2 Umformung und Lösung eines linearen Gleichungssystems ... 226
1.2.1 Das LGS ist eindeutig lösbar ... 226
1.2.2 Das LGS ist unlösbar ... 230
1.2.3 Das LGS ist mehrdeutig lösbar ... 231
1.2.4 Lineare Gleichungssysteme mit Parameter ... 234
2 Vertiefung der Vektoriellen Geometrie ... 240
2.1 Geraden ... 242
2.1.1 Geradengleichung in Parameterform ... 242
2.1.2 Lage einer Geraden im Koordinatensystem ... 247
2.1.3 Gegenseitige Lage von zwei Geraden ... 251
2.2 Ebenen ... 261
2.2.1 Ebenengleichung in Parameterform ... 261
2.2.2 Ebenengleichung in Normalen- und Koordinatenform ... 270
2.3 Gegenseitige Lage ... 284
2.3.1 Gegenseitige Lage einer Geraden und einer Ebene ... 284
2.3.2 Gegenseitige Lage von zwei Ebenen ... 292
2.4 Abstandsberechnungen ... 300
2.4.1 Abstand von zwei Punkten ... 300
2.4.2 Abstand eines Punktes von einer Geraden ... 304
2.4.3 Abstand eines Punktes von einer Ebene ... 307
2.5 Volumenberechnungen ... 312

III Stochastik 320

1 Umgang mit Zufall und Wahrscheinlichkeit ... 320
1.1 Zufallsexperiment ... 322
1.1.1 Einstufiges Zufallsexperiment ... 322
1.1.2 Mehrstufiges Zufallsexperiment ... 324
1.2 Ereignisse ... 326
1.3 Wahrscheinlichkeit ... 331
1.3.1 Definition der Wahrscheinlichkeit ... 331

1.3.2 Wahrscheinlichkeit bei Gleichverteilung (Laplace-Experiment) ... 335
1.3.3 Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten ... 338
1.3.4 Additionssatz ... 345
1.3.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit ... 348
1.4 Kombinatorik ... 358
1.4.1 Produktregel ... 358
1.4.2 Stichproben ... 359
1.5 Zufallsvariable ... 367
1.5.1 Einführung ... 367
1.5.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung ... 370
1.5.3 Erwartungswert einer Zufallsvariablen ... 373
1.5.4 Varianz und Standardabweichung einer Zufallsvariablen ... 378

2 Binomial- und Normalverteilung ... 386
2.1 Binomialverteilung ... 388
2.1.1 Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Ketten ... 388
2.1.2 Die Bernoulli-Formel ... 390
2.1.3 Erwartungswert und Standardabweichung einer Binomialverteilung ... 402
2.2 Normalverteilung ... 409
2.2.1 Von der Binomialverteilung zur Normalverteilung ... 409
2.2.2 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Normalverteilung ... 412
2.3 Sigma-Regeln ... 419
2.4 Prognoseintervall ... 423
2.5 Konfidenzintervall (Vertrauensintervall) ... 426

IV Matrizen – Grundlagen 440

1 Rechnen mit Matrizen ... 442
1.1 Einführung ... 442
1.2 Addition und skalare Multiplikation ... 444
1.3 Multiplikation von Matrizen ... 447

2 Inverse Matrix ... 452
2.1 Einführung ... 452
2.2 Berechnung der inversen Matrix ... 453

Anhang 460

1 Lösungen der Tests ... 460

2 Einführung in Geogebra, Geogebra- und Videolisten ... 480

Mathematische Zeichen ... 487

Stichwortverzeichnis ... 488

Abbildungsverzeichnis ... 492