

# Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

## Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

---

Die Verfasser:

### **Roland Ott**

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

### **Kurt Bohner**

Lehrauftrag Mathematik am BSW Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

### **Ronald Deusch**

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

### **Stefan Rosner**

Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte in zumutbarem Umfang untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.

Stand: Juni 2022

Umschlag: © frhuynh - Fotolia.com

\* \* \* \* \*

6. Auflage 2022

© 1997 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: [info@merkur-verlag.de](mailto:info@merkur-verlag.de); [lehrer-service@merkur-verlag.de](mailto:lehrer-service@merkur-verlag.de)

Internet: [www.merkur-verlag.de](http://www.merkur-verlag.de)

Merkur-Nr. 0338-06

ISBN 978-3-8120-0338-4

# Vorwort

## Vorbemerkungen

Der vorliegende Band „Mathematik für berufliche Gymnasien - Jahrgangsstufen 1 und 2“ ist ein Lehr- und Arbeitsbuch für alle beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg für beide Anforderungsniveaus (gA und eA).

Das Lehrbuch richtet sich exakt nach dem neuen Bildungsplan für die gymnasiale Oberstufe, Mathematik, in Baden-Württemberg, der am 01.08.2021 in Kraft getreten ist.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam sowohl die im Lehrplan geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen (modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die im Bildungsplan aufgeführten Kompetenzen und Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

## Der Aufbau dieses Buches

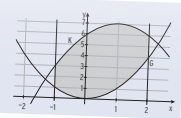
Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.

Integralrechnung 191

### 4.4.2 Fläche zwischen zwei Kurven

**Beispiel 1**

$K$  ist der Graph von  $f$  mit  $f(x) = -x^2 + 2x + 6$  und  $G$  ist der Graph von  $g$  mit  $g(x) = x^2$ .  $K$  und  $G$  umschließen die markierte Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.



**Lösung**

**K verläuft oberhalb der x-Achse.**  
Inhalt der Fläche zwischen der Kurve  $K$  und der  $x$ -Achse in den Grenzen  $x = -1$  und  $x = 2$ :  $\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + 2x + 6) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 6x\right]_{-1}^2 = 18$   
 $A_1 = 18$

**G verläuft oberhalb der x-Achse.**  
Inhalt der Fläche zwischen der Kurve  $G$ , der  $x$ -Achse und den Geraden mit  $x = -1$  und  $x = 2$ :  $\int_{-1}^2 g(x) dx = \int_{-1}^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^2 = 3$   
 $A_2 = 3$

$f(x) \geq g(x)$  für  $-1 \leq x \leq 2$ .  $K$  verläuft oberhalb von  $G$  für  $-1 \leq x \leq 2$ .  
Inhalt der Fläche zwischen  $K$  und  $G$ :  $A = A_1 - A_2 = 18 - 3 = 15$

Berechnung mit einem Integral:  
 $\int_{-1}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + 2x + 6 - x^2) dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 6) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 6x\right]_{-1}^2 = 15$

Jede Lerneinheit schließt mit einer ausreichenden Anzahl von **Aufgaben** ab. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Aufgaben aus dem Alltag, aus der Wirtschaft und der Technik stellen einen praktischen Bezug her. Eine Differenzierung der Aufgaben ist durch Farben gegeben:

- grün:** Lösung ohne Hilfsmittel
- blau:** keine Vorgabe zur Lösung

Themen und Aufgaben für das **erhöhte Anforderungsniveau (eA)** sind farblich gelb hinterlegt.

**Definitionen, Festlegungen, Merksätze** und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

Die Aufgaben „**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**“ sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Sie werden im Anhang ausführlich gelöst.



Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Webseite <https://www.merkur-verlag.de>.



Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Im Buch wird **Geogebra** in vielfältiger Weise, zur Erarbeitung von mathematischen Inhalten und zur Lösung von Aufgaben eingesetzt.



**Videos** dienen der Veranschaulichung von Problemen und Erläuterung von Lösungswegen. Sie unterstützen die Lernenden beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge.

50 | Analysis

**Aufgaben**

- Bestimmen Sie alle Lösungen exakt, die im Intervall  $[0; 2\pi]$  liegen.
  - a)  $5\sin(x) = 0$
  - b)  $\sin(x) = 0,5\sqrt{2}$
  - c)  $\sin(x) = -0,5$
  - d)  $-4\sin(\frac{1}{2}x) = 4$
  - e)  $\sin(x + \pi) = 1$
  - f)  $\sin(\frac{3}{2}x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- Bestimmen Sie alle Lösungen, die im Intervall  $[-\pi; 6,5]$  liegen.
  - a)  $3\sin(x) - 2 = 0$
  - b)  $\sin(x) = \frac{1}{3}$
  - c)  $-5\sin(2x) = 3$
- Berechnen Sie  $x$  ungerundet so, dass die Gleichung im Intervall  $[-4; 4]$  erfüllt ist.
  - a)  $2\sin(2x) = \sin(2x) - 1$
  - b)  $-4\sin(x) + 2\sqrt{2} = 0$
  - c)  $\sqrt{3}\sin(x) - \sqrt{3} = 0$
  - d)  $2\sin(\frac{1}{2}x) + \sqrt{2} = 0$
  - e)  $2\sin(\frac{3}{2}x) = 3\sin(\frac{1}{2}x)$
  - f)  $1 = 2\sin(x - \pi) = 0$
- Welche Gleichung hat eine Lösung, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.
  - a)  $\sin(2x + \pi) - 3 = 0$
  - b)  $4\sin(x) - 3 = 0$
  - c)  $\sin(2x) = 3 + \sin(x)$
- Für welchen Wert von  $a$  ist  $x = \frac{\pi}{6}$  Lösung der Gleichung  $a \cdot \sin(x) - 2 = 0$ ? Berechnen Sie für diesen Wert von  $a$  alle Lösungen für  $0 < x < \pi$ .
- Bestimmen Sie die exakten Lösungen, die im Intervall  $[-\pi; \pi]$  liegen.
  - a)  $1 = \cos(x) = 0$
  - b)  $\cos(x) = 0,5$
  - c)  $2 \cos(x) = \sqrt{2}$
- Bestimmen Sie alle Lösungen  $x$ , die im Intervall  $[0; 6,5]$  liegen.
  - a)  $1 + 2 \cos(x) = 0$
  - b)  $3 - 3 \cos(x) = 0$
  - c)  $-4 \cos(x) = -1$

4.5.3 Rotationskörper

Die Bilder zeigen **Rotationskörper** aus dem Alltag. Bei diesen Körpern ist das Volumen eine wichtige Größe. Das Volumen kann mithilfe der Integralrechnung bestimmt werden.

**Ableitungsregeln**

**Faktorregel:** Konstante Faktoren bleiben beim Ableiten erhalten.  
 $f(x) = a \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = a \cdot g'(x)$

**Summenregel:** Die Ableitung einer Summe ist die Summe der Ableitungen der Summanden.  
 $f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

**Potenzregel:**  $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}; n \in \mathbb{Q}$

**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**

- Untersuchen Sie das Schaubild der Funktion  $f$  auf Hoch- und Tiefpunkte.
  - a)  $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + 3; x \in \mathbb{R}$
  - b)  $f(x) = (x - 3)e^x; x \in \mathbb{R}$
  - c)  $f(x) = \sin(\pi x - 2); x \in ]-0,5; 2,5[$
  - d)  $f(x) = e^x - e^x + x; x \in \mathbb{R}$
- Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.
  - a)  $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1; x \in \mathbb{R}$
  - b)  $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + 3; x \in \mathbb{R}$
- Machen Sie eine Aussage über das Krümmungsverhalten des Graphen  $K$  von  $f$ . Skizzieren Sie  $K$ .
  - a)  $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}x^3; x \in \mathbb{R}$
  - b)  $f(x) = \cos(2x) + 1; x \in ]-\pi; \pi[$

**Aufgaben**

- Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von  $f$ .
  - a)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 2$
  - b)  $f(x) = \frac{2}{3}(x^3 - 9x)$
  - c)  $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5$
  - d)  $f(x) = -x - 2 + e^{0,5x}$
  - e)  $f(x) = 2 \sin(2x) + 1; x \in ]-\pi; \pi[$
  - f)  $f(x) = \frac{1}{2} + x; x \neq 0$

Gleichungen der Form  $\sin(z) = u$  bzw.  $\cos(z) = u$

**Beispiel 1**

Bestimmen Sie alle Lösungen von  $\sin(x) = \frac{1}{2}$  im Intervall  $[0; 3\pi]$ .

**Lösung**

Der WTR gibt eine exakte Lösung an:  $x_1 = \frac{\pi}{6}$

**Hinweis:** Der Wert kann auch der Tabelle (\*) (Formelsammlung) entnommen werden.  $\sin^{-1}$  nennt man auch Arcussinus.

Bestimmen einer weiteren Lösung mithilfe der Sinuskurve.

1.4 Trigonometrische Gleichungen und deren geometrische Interpretation

1.4.1 Lösung von trigonometrischen Gleichungen

Gleichungen der Form  $\sin(z) = 0$  bzw.  $\cos(z) = 0$

**Vorbetrachtung**

Man liest ab:  $\sin(0) = 0; \sin(\pi) = 0; \sin(2\pi) = 0$

# Inhaltsverzeichnis

I Analysis		10
1	Trigonometrische Funktionen und zugehörige Gleichungen .....	10
1.1	Definition der Winkelfunktionen .....	12
1.1.1	Definition der Winkelfunktionen für Winkel von $0^\circ$ bis $90^\circ$ .....	12
1.1.2	Definition der Winkelfunktionen für beliebige Winkel .....	16
1.1.3	Das Bogenmaß eines Winkels .....	20
1.2	Trigonometrische Funktionen .....	21
1.2.1	Sinus- und Kosinusfunktion .....	21
1.2.2	Transformationen .....	23
1.3	Aufstellen von Funktionstermen .....	38
1.4	Trigonometrische Gleichungen und deren geometrische Interpretation .....	41
1.4.1	Lösung von trigonometrischen Gleichungen .....	41
1.4.2	Gemeinsame Punkte .....	51
1.5	Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben .....	59
2	Verknüpfung, Verkettung und Umkehrung von Funktionen .....	64
2.1	Verknüpfung von Funktionen .....	66
2.1.1	Summe von Funktionen .....	66
2.1.2	Produkt von Funktionen .....	69
2.2	Verkettung von Funktionen .....	70
2.3	Umkehrung von Funktionen .....	72
2.3.1	Bestimmung einer Umkehrfunktion .....	72
2.3.2	Umkehrbarkeit .....	75
2.3.3	Umkehrung einer Exponentialfunktion - Logarithmusfunktion .....	78
3	Differenzialrechnung .....	80
3.1	Ableitungen von Funktionen .....	82
3.1.1	Definition der Ableitung .....	82
3.1.2	Ableitungsregeln .....	86
3.1.3	Tangente .....	100
3.2	Untersuchung von Funktionsgraphen mithilfe der Differenzialrechnung .....	105
3.2.1	Monotonie .....	105
3.2.2	Extrempunkte .....	110
3.2.3	Wendepunkte .....	118
3.2.4	Kurvenuntersuchung .....	127
3.3	Aufstellen von Kurvengleichungen aus gegebenen Bedingungen .....	134
3.4	Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben .....	144
3.5	Optimieren .....	154
4	Integralrechnung .....	160
4.1	Einführung .....	162
4.2	Stammfunktion, grafisches Ableiten und Aufleiten .....	164
4.2.1	Stammfunktion .....	164
4.2.2	Grafisches Ableiten und grafisches Aufleiten .....	170

## 8 Inhaltsverzeichnis

4.3	Das bestimmte Integral	175
4.4	Flächeninhaltsberechnung mithilfe der Integralrechnung	184
4.4.1	Fläche zwischen Kurve und x-Achse	184
4.4.2	Fläche zwischen zwei Kurven	191
4.4.3	Besondere Aufgabenstellungen bei der Flächeninhaltsberechnung	200
4.5	Anwendungen der Integralrechnung	208
4.5.1	Flächen in anwendungsorientierten Aufgaben	208
4.5.2	Interpretation von Flächen	210
4.5.3	Rotationskörper	218

## II Vektorielle Geometrie

222

1	Lineare Gleichungssysteme	222
1.1	Einführung	224
1.2	Umformung und Lösung eines linearen Gleichungssystems	226
1.2.1	Das LGS ist eindeutig lösbar	226
1.2.2	Das LGS ist unlösbar	230
1.2.3	Das LGS ist mehrdeutig lösbar	231
1.2.4	Lineare Gleichungssysteme mit Parameter	234
2	Vertiefung der Vektoriellen Geometrie	240
2.1	Geraden	242
2.1.1	Geradengleichung in Parameterform	242
2.1.2	Lage einer Geraden im Koordinatensystem	247
2.1.3	Gegenseitige Lage von zwei Geraden	251
2.2	Ebenen	261
2.2.1	Ebenengleichung in Parameterform	261
2.2.2	Ebenengleichung in Normalen- und Koordinatenform	270
2.3	Gegenseitige Lage	284
2.3.1	Gegenseitige Lage einer Geraden und einer Ebene	284
2.3.2	Gegenseitige Lage von zwei Ebenen	292
2.4	Abstandsberechnungen	300
2.4.1	Abstand von zwei Punkten	300
2.4.2	Abstand eines Punktes von einer Geraden	304
2.4.3	Abstand eines Punktes von einer Ebene	307
2.5	Volumenberechnungen	312

## III Stochastik

320

1	Umgang mit Zufall und Wahrscheinlichkeit	320
1.1	Zufallsexperiment	322
1.1.1	Einstufiges Zufallsexperiment	322
1.1.2	Mehrstufiges Zufallsexperiment	324
1.2	Ereignisse	326
1.3	Wahrscheinlichkeit	331
1.3.1	Definition der Wahrscheinlichkeit	331

1.3.2	Wahrscheinlichkeit bei Gleichverteilung (Laplace-Experiment)	335
1.3.3	Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten	338
1.3.4	Additionssatz	345
1.3.5	Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit	348
1.4	Kombinatorik	358
1.4.1	Produktregel	358
1.4.2	Stichproben	359
1.5	Zufallsvariable	367
1.5.1	Einführung	367
1.5.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung	370
1.5.3	Erwartungswert einer Zufallsvariablen	373
1.5.4	Varianz und Standardabweichung einer Zufallsvariablen	378
2	Binomial- und Normalverteilung	386
2.1	Binomialverteilung	388
2.1.1	Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Ketten	388
2.1.2	Die Bernoulli-Formel	390
2.1.3	Erwartungswert und Standardabweichung einer Binomialverteilung	402
2.2	Normalverteilung	409
2.2.1	Von der Binomialverteilung zur Normalverteilung	409
2.2.2	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Normalverteilung	412
2.3	Sigma-Regeln	419
2.4	Prognoseintervall	423
2.5	Konfidenzintervall (Vertrauensintervall)	426
<b>IV Matrizen – Grundlagen</b>		<b>440</b>
1	Rechnen mit Matrizen	442
1.1	Einführung	442
1.2	Addition und skalare Multiplikation	444
1.3	Multiplikation von Matrizen	447
2	Inverse Matrix	452
2.1	Einführung	452
2.2	Berechnung der inversen Matrix	453
<b>Anhang</b>		<b>460</b>
1	Lösungen der Tests	460
2	Einführung in Geogebra, Geogebra- und Videolisten	480
	Mathematische Zeichen	487
	Stichwortverzeichnis	488
	Abbildungsverzeichnis	492