

Patyna

Mathematik

für das Berufliche Gymnasium in Niedersachsen
Kerncurriculum und Bildungsstandards
Einführungsphase – Schwerpunkt Wirtschaft



Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasserin:

Marion Patyna

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG behält sich eine Nutzung ihrer Inhalte für kommerzielles Text- und Data Mining (TDM) im Sinne von § 44 b UrhG ausdrücklich vor. Für den Erwerb einer entsprechenden Nutzungserlaubnis wenden Sie sich bitte an copyright@merkur-verlag.de.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte in zumutbarem Umfang untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.
Stand: Februar 2026

Umschlag: Hintergrund: ECE, Ernst-August-Galerie, Hannover,
Kreis rechts oben: Candy Box – Fotolia.com, Kreis Mitte: Colourbox.de,
Kreis links: Syda Productions – Colourbox.de, Grafik: Colourbox.de

* * * * *

5. Auflage 2026

© 2018 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

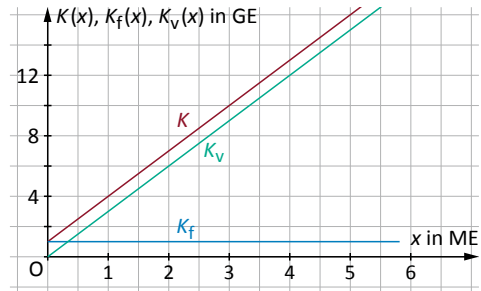
Merkur-Nr. 0685-05

ISBN 978-3-8120-0885-3

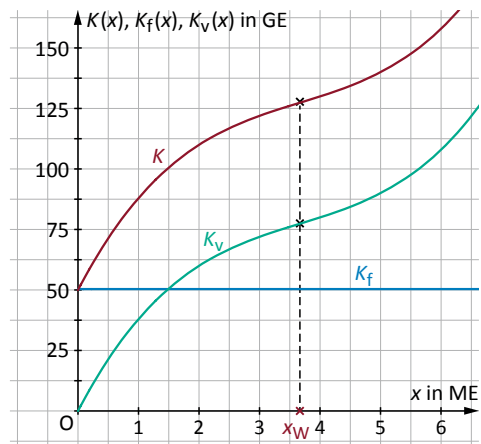


4.2 Wirtschaftliche Zusammenhänge

Die **Gesamtkosten** K für eine Produktion setzen sich aus Fixkosten und variablen Kosten zusammen. **Fixkosten** K_f sind Kosten, die unabhängig von der Produktionsmenge x anfallen, z. B. für Miete, Grundsteuern, Versicherungen etc. Da die Fixkosten K_f auch bei einer Ausbringungsmenge von $x = 0$ anfallen, stellen sie den positiven Ordinatenabschnitt dar, d. h. das Absolutglied der Gesamtkostenfunktion K , und bewirken damit eine Verschiebung des Graphen der Gesamtkostenfunktion entlang der Ordinatenachse. Die **variablen Gesamtkosten** K_v sind die Kosten, die von der Produktionsmenge x abhängen und dazu führen, dass eine Gesamtkostenfunktion immer monoton steigend verläuft.



Die **s-förmige oder ertragsgesetzliche Kostenkurve** zeigt ebenfalls die Gesamtkosten eines Betriebes in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge x . Bei steigender Ausbringungsmenge nehmen die Gesamtkosten K bis zur Kapazitätsgrenze x_{Kap} des Unternehmens unterschiedlich stark zu. Dadurch spiegelt der Kurvenverlauf eine größere Realitätsnähe wider, da die Gesamtkosten bei unterschiedlichen Produktionsmengen auch unterschiedlich stark steigen.



Die s-förmige Gesamtkostenkurve ist der

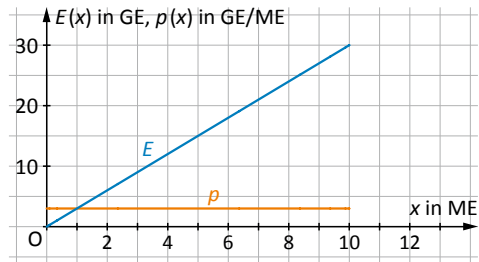
Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades: $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, c, d > 0$ und $b < 0$.

Bis zur Wendestelle¹ (x_W) steigt der Graph der Gesamtkostenfunktion degressiv², von der Wendestelle bis zur Kapazitätsgrenze progressiv². Bei geringen Produktionszahlen steigen die Kosten bei einer Ausweitung der Produktion wegen des effizienteren Arbeitskräfte-, Maschineneinsatzes etc. zunächst langsam an. Von einer bestimmten Produktionsmenge an steigen die Gesamtkosten bei einer Ausweitung der Produktion bedingt durch erhöhten Energieverbrauch und Maschinenverschleiß, Überstundenzuschläge etc. stärker an.

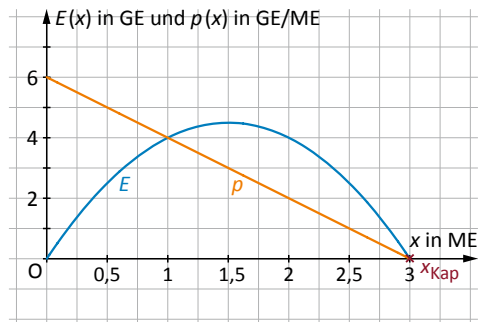
1 Wendestelle, siehe Seite 91f.

2 „degressiv“ und „progressiv“, siehe Seite 91f.

Die **Preis-Absatz-Funktion** p ist eine lineare Funktion $p(x) = mx + b$. Ob diese konstant ist oder fallend, hängt davon ab, ob ein **Polypol**¹ oder ein **Monopol**² betrachtet wird. Die Preis-Absatz-Funktion eines Polypolisten ist eine konstante Funktion der Form $p(x) = b$, denn aufgrund der hohen Konkurrenz agiert der Polypolist als Mengenanpasser; den Preis kann er jedoch nicht bestimmen.



In einem Monopol zeigt die Preis-Absatz-Funktion, welche Menge eines Gutes zu den verschiedenen Preisen abgesetzt werden kann. Da der Monopolist der einzige Anbieter für das Gut ist, wird er nur so viel anbieten, wie auch nachgefragt wird. Damit ist die Preis-Absatz-Funktion identisch mit der gesamtwirtschaftlichen Nachfragefunktion $p(x) = mx + b$, $m < 0$.



Die **Erlösfunktion** E ergibt sich aus der Multiplikation der Preis-Absatz-Funktion $p(x)$ mit der Menge x (Preis · Menge): $E(x) = p(x) \cdot x$.

Beim Polypol ist der Graph der Erlösfunktion eine Gerade mit positiver Steigung, die durch den Ursprung verläuft: $E(x) = b \cdot x$, $b > 0$. Beim Monopol sinkt die Nachfrage nach einem Gut mit steigendem Preis und umgekehrt. Dieser Zusammenhang wird durch die Gesamtnachfragefunktion beschrieben, die im Monopol – wie oben beschrieben – gleichzeitig die Preis-Absatz-Funktion ist. Der Graph der Erlösfunktion im Angebotsmonopol ist eine nach unten geöffnete Parabel:

$$p(x) = mx + b; \quad m < 0, \quad b > 0 \Rightarrow E(x) = (mx + b) \cdot x.$$

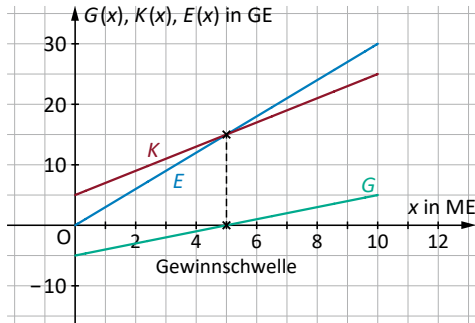
Die Nullstellen der Erlösfunktion geben den **ökonomischen Definitionsbereich** $D_{\text{ök}}$ für die Produktion an: $D_{\text{ök}} = [0; x_{\text{Kap}}]$.

Aus der Differenz der Erlös- und der Gesamtkostenfunktion ergibt sich die **Gewinnfunktion** $G(x) = E(x) - K(x)$. Die erste Schnittstelle der Erlös- mit der Gesamtkostenfunktion ist identisch mit der ersten Nullstelle der Gewinnfunktion und wird **Gewinnschwelle** (GS) genannt. Wird diese Produktionsmenge vollständig am Markt abgesetzt, dann erzielt der Produzent weder Gewinn noch Verlust. Wird eine kleine Einheit mehr produziert und abgesetzt, dann wird Gewinn erzielt; wird eine kleine Einheit weniger produziert, dann wird Verlust erwirtschaftet. Die **Gewinngrenze** (GG) ist die zweite Schnittstelle (wenn diese vorhanden ist) der Erlös- mit der Gesamt-

1 In einem Polypol handeln viele Anbieter und viele Nachfrager; es entspricht der vollständigen Konkurrenz.

2 In einem Monopol agieren ein Anbieter und viele Nachfrager.

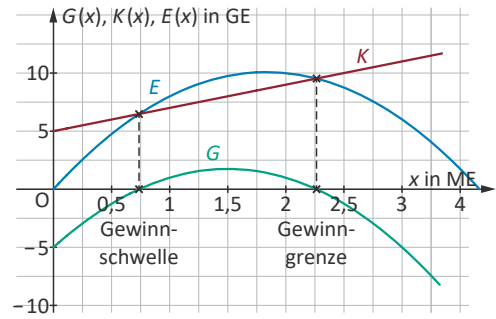
kostenfunktion und somit die zweite Nullstelle der Gewinnfunktion. Daraus ergeben sich die Gewinn- und Verlustintervalle. Es werden vier Fälle unterschieden:



Lineare Gesamtkosten im Polypol

Verlust: $[0; x_{GS}]$

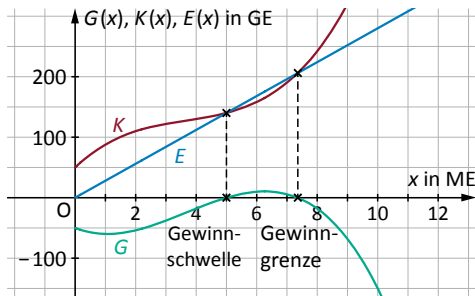
Gewinn: $(x_{GS}; x_{Kap})$



Lineare Gesamtkosten im Monopol

Verlust: $[0; x_{GS}]$ und $(x_{GG}; x_{Kap})$

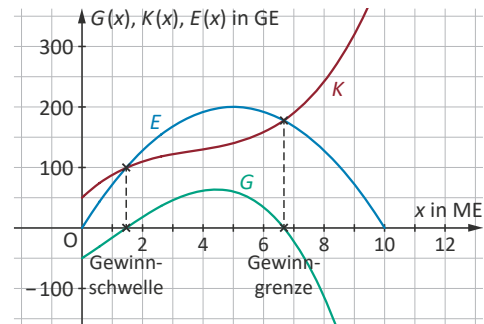
Gewinn: $(x_{GS}; x_{GG})$



Ertragsgesetzlicher Gesamtkostenverlauf im Polypol

Verlust: $[0; x_{GS}]$ und $(x_{GG}; x_{Kap})$

Gewinn: $(x_{GS}; x_{GG})$

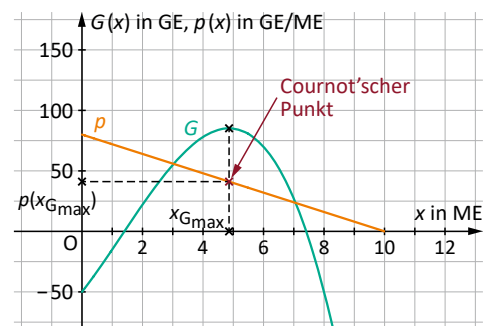


Ertragsgesetzlicher Gesamtkostenverlauf im Monopol

Verlust: $[0; x_{GS}]$ und $(x_{GG}; x_{Kap})$

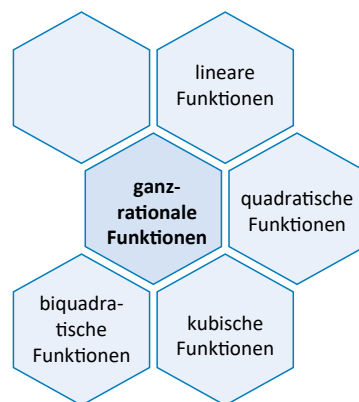
Gewinn: $(x_{GS}; x_{GG})$

Der **Cournot'sche Punkt** gibt den Preis an, den der Monopolist verlangen muss, damit er das Gewinnmaximum erzielt. Die gewinnmaximale Menge $x_{G_{max}}$ wird in die Preis-Absatz-Funktion eingesetzt $p(x_{G_{max}})$ und so der zugehörige Preis ermittelt.



4.3 Definitions- und Wertebereich

Der **Definitionsbereich** gibt die Menge aller Zahlen an, die für die **unabhängige Variable** x eingesetzt werden dürfen. Die Werte liegen auf der Abszissenachse. Der **Wertebereich** gibt die Menge aller Zahlen an, die für die **Funktionswerte (abhängige Variable)** $f(x)$ verwendet werden können, sie liegen auf der Ordinatenachse.



Mathematisch betrachtet, dürfen bei **ganzrationalen Funktionen** – das sind alle Funktionen, bei denen die unabhängige Variable x weder im Nenner noch im Exponenten vorkommt – alle reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) verwendet werden: $D_{\text{math}} = \mathbb{R}$. Wenn alle reellen Zahlen für x eingesetzt werden dürfen, dann ergibt sich daraus für den Wertebereich, dass die Funktionswerte ebenfalls alle reellen Zahlen umfassen: $W_{\text{math}} = \mathbb{R}$. Der Definitions- und Wertebereich sind stetig, weil jede reelle Zahl verwendet werden kann. Der zugehörige Funktionsgraph besteht aus einer durchgezogenen Linie.

Von dem **mathematischen Definitionsbereich**, der auch maximal möglicher Definitionsbereich genannt wird, wird der **ökonomische Definitionsbereich** abgegrenzt. Je nach ökonomischer Fragestellung werden nur die Zahlen zugelassen, die wirtschaftlich sinnvoll sind. Wird eine Aufgabenstellung betrachtet, bei der Produktionsmengen in Mengeneinheiten (ME) analysiert werden, dann ergibt sich der ökonomische Definitionsbereich wie folgt: $D_{\text{ök}} = [0; x_{\text{Kap}}]$. Weniger als 0 ME können nicht produziert werden und auch nicht mehr ME als die **Kapazitätsgrenze** x_{Kap} erlaubt. Alle reellen Zahlen in diesem Intervall einschließlich 0 und x_{Kap} können für die unabhängige Variable x eingesetzt werden, der ökonomische Definitionsbereich ist **stetig** genauso wie der zugehörige Wertebereich $W_{\text{ök}} = [f(0); f(x_{\text{Kap}})]$.

Wird hingegen eine ökonomische Problemstellung betrachtet, bei der die Produktionsmenge z. B. in Stück angegeben wird, dann dürfen nur natürliche Zahlen ($\mathbb{N}$) und nicht reelle Zahlen für x verwendet werden, weil halbe Stück oder zehntel Stück nicht produziert werden können, sondern nur ganze Stückzahlen:

$$D_{\text{ök}} = \{x \mid 0 \leq x \leq x_{\text{Kap}} \wedge x \in \mathbb{N}\}.$$

Der Definitionsbereich ist **diskret**. Der zugehörige Funktionsgraph besteht nur aus Punkten, die nicht miteinander verbunden werden dürfen. Der Wertebereich ist ebenfalls diskret: $W_{\text{ök}} = \{x \mid f(0) \leq f(x) \leq f(x_{\text{Kap}}) \wedge f(x) \in \mathbb{N}\}$.

5.5 Quadratische Funktionen

Wird die Angebots- und Nachfragesituation eines Produktes mithilfe von quadratischen Funktionen modelliert, sind nicht nur die Schnittpunkte relevant, sondern es müssen auch die Scheitelpunkte der Graphen beachtet werden.

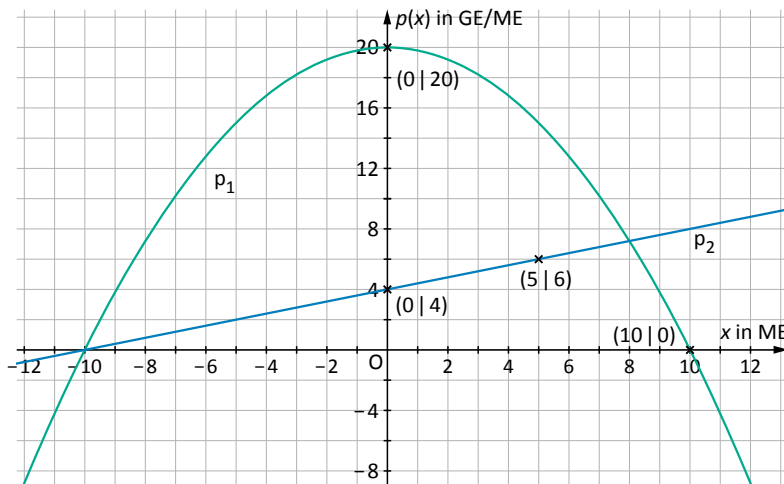
Beispiel 1

Die abgebildete Grafik zeigt zwei Graphen, mit deren Hilfe die Marktsituation für Erdbeeren auf dem Wochenmarkt untersucht werden soll.

Beschreiben Sie den Verlauf der Graphen im ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich.



Bestimmen Sie die Terme der zugehörigen Funktionsgleichungen und berechnen Sie die für die Analyse relevanten Punkte.



Lösungen

Je höher der Preis, desto niedriger ist die Nachfragemenge. Daraus folgt, dass die **Nachfragesituation** im ökonomisch sinnvollen Bereich (also für positive x -Werte) monoton fallend sein muss. Die Nachfragefunktion wird demnach durch die quadratische Funktion modelliert. Der Scheitelpunkt der Parabel liegt auf der Ordinatenachse, die Parabel ist nach unten geöffnet. Der Scheitelpunkt liegt bei $S(0 | 20)$, d. h., der Höchstpreis liegt bei 20 GE/ME. Der Graph schneidet die Abszissenachse im positiven Bereich bei $S_x(10 | 0)$, d. h., die Sättigungsmenge beträgt 10 ME. Aus diesen beiden Angaben lässt sich mithilfe der Scheitelpunktform für quadratische Funktionen der Funktionsterm ermitteln:

Fortsetzung

$p_N(x) = a(x - u)^2 + v$. Das Einsetzen des Scheitelpunktes führt zu

$$p_N(x) = a(x - 0)^2 + 20.$$

Durch das Einsetzen der Koordinaten des Schnittpunktes mit der Abszissenachse folgt

$$p_N(x) = a(10 - 0)^2 + 20 = 0 \Rightarrow 100a = -20 \Rightarrow a = -0,2.$$

Die Nachfragesituation auf dem Erdbeermarkt wird modelliert durch die ganzrationale Funktion 2. Grades p_N mit $p_N(x) = -0,2x^2 + 20$.

Je höher der Preis, desto höher ist die Angebotsmenge, d. h., der Graph muss monoton steigend verlaufen. Die **Angebotsfunktion** wird durch eine lineare Funktion modelliert. Die Gerade schneidet die Ordinatensachse bei 4, d. h., der Mindestangebotspreis liegt bei 4 GE/ME.

$$\Rightarrow p_A(x) = mx + b \Rightarrow p_A(x) = mx + 4. \text{ Die Gerade verläuft durch den Punkt } P(5|6)$$

$$\Rightarrow p_A(5) = m \cdot 5 + 4 = 6 \Rightarrow m = 0,4.$$

Die Angebotsituation auf dem Erdbeermarkt wird modelliert durch eine lineare Funktion p_A mit $p_A(x) = 0,4x + 4$.

Da die Angebotsfunktion monoton steigend ist und die Nachfragefunktion eine Nullstelle bei $x = 10$ hat, ergibt sich $D_{ök} = [0; 10]$. Aus dem Vergleich der Funktionswerte $p_N(0) = 20$ und $p_A(10) = 8$ ergibt sich $W_{ök} = [0; 20]$.

Das **Marktgleichgewicht** berechnet sich aus $p_A(x) = p_N(x)$:

$$0,4x + 4 = -0,2x^2 + 20 \Rightarrow 0 = -0,2x^2 - 0,4x + 16.$$

Diese quadratische Gleichung kann mithilfe der **p-q-Formel**, der **quadratischen Ergänzung** oder dem **CAS** gelöst werden: $x_1 = -10 \notin D_{ök} \vee x_2 = 8$ und

$$p_A(8) = p_N(8) = 7,2.$$

Der Gleichgewichtspreis liegt bei 7,2 GE/ME und die Gleichgewichtsmenge bei 8 ME.

Beispiel 2

Eine weitere Analyse wird auf dem Wochenmarkt für Frühlirschen durchgeführt. Der aktuelle Marktpreis liegt bei 4 GE/ME. Folgende Funktionsgleichungen sind zur Modellierung erstellt worden:

$$p_1(x) = 0,1(x - 9)^2 \text{ und}$$

$$p_2(x) = -0,1(x + 1)(x - 20).$$

Untersuchen Sie rechnerisch die vollständige Marktsituation.

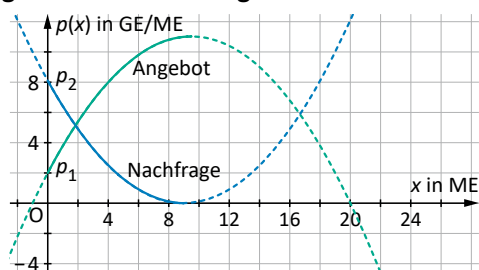


Lösung

Zuordnen der Funktionsgleichungen zur Angebots- und Nachfragesituation

Mithilfe des CAS werden die Graphen gezeichnet und dann zugeordnet.

Der Term von p_2 ist eine Linearfaktordarstellung, die Nullstellen liegen bei $x = -1$ und bei $x = 20$. Der Steigungsfaktor ist negativ, d. h., die Parabel ist nach unten geöffnet. Demnach modelliert diese Funktion die Angebotsfunktion, denn der Graph steigt im Intervall



$[0; x_{\text{Hochpunkt}}]$.

Der Term von p_1 ist eine Scheitelpunktform, weist einen positiven Steigungsfaktor auf, d. h., die Parabel ist nach oben geöffnet und hat eine doppelte Nullstelle bei $x = 9$. Der Graph dieser Funktion repräsentiert die Nachfragefunktion, weil der Graph im Intervall $[0; 9]$ fällt.

Ökonomische Definitions- und Wertebereiche

Die Schnittpunkte des Graphen von p_N mit den Koordinatenachsen liegen bei $S_y(0|8,1)$ und $S_x(0|9)$

$$\Rightarrow D_{\text{ök}}(p_N) = [0; 9] \text{ und } W_{\text{ök}}(p_N) = [0; 8,1].$$

Die Extremstelle des Graphen von p_A liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen

$$x_H = -1 + \frac{20 - (-1)}{2} = 9,5 \Rightarrow p_A(9,5) = 11,025.$$

Der Schnittpunkt mit der Ordinatenachse liegt bei $S_y(0|2)$

$$\Rightarrow D_{\text{ök}}(p_A) = [0; 9,5] \text{ und } W_{\text{ök}}(p_A) = [2; 11,025].$$

Ein Vergleich der Bereiche ergibt, dass die Marktsituation durch die Intervalle

$$D_{\text{ök}} = [0; 9] \text{ und } W_{\text{ök}} = [0; 11] \text{ begrenzt wird, weil } p_A(9) = 11 \text{ ist.}$$

Es werden mehr Kirschen angeboten, als nachgefragt werden, denn die Sättigungsmenge liegt bei 9 ME und der Definitionsbereich der Angebotsfunktion geht bis zu 9,5 ME.

Analyse der Graphen

Höchstpreis: Schnittpunkt der Nachfragefunktion mit der Ordinatenachse

$$p_N(0) \Rightarrow S_y(0|8,1).$$

Der Höchstpreis liegt bei 8,1 GE/ME.

Sättigungsmenge: Nullstelle der Nachfragefunktion $p_N(x) = 0 \Rightarrow S_x(0|9)$.

Die Sättigungsmenge liegt bei 9 ME.

Mindestangebotspreis: Schnittpunkt der Angebotsfunktion mit der Ordinatenachse

$$p_A(0) \Rightarrow S_y(0|2).$$

Der Mindestangebotspreis liegt bei 2 GE/ME.

Fortsetzung



mvurl.de/4ur6

Marktgleichgewicht und Umsatz

$$p_N(x) = p_A(x)$$

$$0,1(x-9)^2 = -0,1(x+1)(x-20) \Rightarrow (x-9)^2 = -(x+1)(x-20)$$

$$\text{CAS: } S_1(1,83|5,14) \text{ und } S_2(16,67|5,88)$$

Der Punkt S_2 liegt außerhalb des $D_{\text{ök}}$, deshalb liegt der Gleichgewichtspreis für Kirschen bei 5,14 GE/ME und die Gleichgewichtsmenge bei 1,83 ME. Daraus ergibt sich der Umsatz in Höhe von $U = p_G \cdot x_G = 1,83 \cdot 5,14 \approx 9,41$ GE.

Marktsituation bei 4 GE/ME

$$p_N(x) = 0,1(x-9)^2 \Rightarrow 4 = 0,1(x-9)^2 \Rightarrow 40 = (x-9)^2 \Rightarrow \pm 6,32 \approx x-9$$

$$x_1 \approx 2,68 \vee x_2 \approx 15,32 \notin D_{\text{ök}}$$

$$p_A(x) = -0,1(x+1)(x-20) \Rightarrow 4 = -0,1(x+1)(x-20) \Rightarrow 0 = -0,1(x^2 - 19x - 20) - 4$$

$$0 = -0,1x^2 + 1,9x - 2$$

$$\text{CAS: } x_1 \approx 1,12 \vee x_2 \approx 17,88 \notin D_{\text{ök}}$$

Die Nachfragemenge ist größer als die Angebotsmenge; es liegt ein Nachfrageüberschuss vor.

Übungen

1 Ermitteln Sie die Schnittpunkte der beiden Graphen miteinander.

a) $f_1(x) = 2x - 8$ und $f_2(x) = \frac{1}{4}(x+8)(x-4)$

b) $f_1(x) = 1,6x - 2$ und $f_2(x) = -\frac{1}{10}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{61}{10}$

c) $f_1(x) = -4x + 6$ und $f_2(x) = (x+4)^2 + 0,95$

d) $f_1(x) = 0,25x^2 - 2x - 3,2$ und $f_2(x) = -0,05(x-2)^2 + 5$

2 Stellen Sie die quadratische Funktionsgleichung auf, die jeweils die nachfolgenden Bedingungen erfüllt.

a) Eine nach unten geöffnete Parabel, die um den Faktor 0,75 gestaucht ist und ihre Nullstellen bei $x = 3$ und $x = -5$ hat.

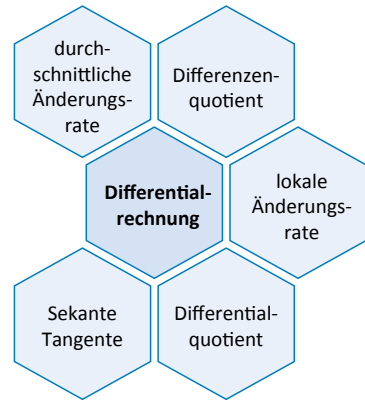
b) Eine Parabel, die im Vergleich mit der Normalparabel um 4 Einheiten nach rechts und 3 Einheiten nach unten verschoben ist. Sie ist außerdem gestreckt um den Faktor 2.

c) Der rechte Parabelast einer Normalparabel kann zur Modellierung einer Nachfragefunktion dienen. Der Scheitelpunkt liegt auf der Ordinatenachse. Der Höchstpreis liegt bei 55 GE/ME.

d) Der rechte Parabelast einer gestauchten Parabel kann zur Modellierung einer Angebotsfunktion dienen. Die doppelte Nullstelle liegt bei $x = -4$ und der Mindestangebotspreis bei 12 GE/ME.

8.3 Durchschnittliche und momentane Änderungsrate

Änderungsraten beschreiben das Ausmaß der Veränderung der abhängigen Variablen, wenn sich die unabhängige Variable ändert. Mit ihrer Hilfe wird diese Veränderung messbar. Änderungsraten geben die Steigung eines Graphen in einem Intervall oder an einer Stelle an. Sie geben an, wie schnell sich die Funktionswerte ändern, wie stark ein Graph ansteigt oder fällt.



Beispiel 1

Der Bio-Getränketrieb *Limo* ordnet für die Herstellung von Ingwerlimonade jeder Produktionsmenge x in 1 000 Hektoliter (hl) die dabei jeweils entstehenden Gesamtkosten $K(x)$ in 1.000 Geldeinheiten (GE) zu. Für die Produktion gilt die Gesamtkostenfunktion K mit $K(x) = x^3 - 12x^2 + 48x + 100$.

Die Kapazitätsgrenze des Betriebes liegt für diese Produktion bei 14 000 hl.

Die Gesamtkostenentwicklung wird im Rahmen der Produktionsplanung für das nächste Jahr analysiert.



Geben Sie die Funktionsgleichungen für die variablen Gesamtkosten K_v an. Bestimmen Sie die Höhe der Fixkosten.

Ermitteln Sie den durchschnittlichen Gesamtkostenanstieg für folgende Produktionsausweitungen:

Produktionsausweitung I
von 2 000 hl auf 4 000 hl
von 2 000 hl auf 3 000 hl
von 2 000 hl auf 2 500 hl
von 2 000 hl auf 2 100 hl

Produktionsausweitung II
von 4 000 hl auf 6 000 hl
von 4 000 hl auf 5 000 hl
von 4 000 hl auf 4 500 hl
von 4 000 hl auf 4 100 hl

Der **durchschnittliche Gesamtkostenanstieg** wird auch als **mittlere Änderungsrate** bezeichnet.

Beschreiben Sie, wie sich jeweils die mittlere Änderungsrate bei einer kleiner werdenden Produktionsausweitung verändert und welche Schlussfolgerung daraus für den Verlauf des Graphen der Gesamtkostenfunktion gezogen werden kann.

Lösungen

Die Gesamtkostenfunktion $K(x) = x^3 - 12x^2 + 48x + 100$ setzt sich aus den variablen Gesamtkosten und den Fixkosten zusammen:

$$K_v(x) = x^3 - 12x^2 + 48x \quad \text{und} \quad K_f(x) = 100, \quad \text{weil} \quad K(0) = 0^3 - 12 \cdot 0^2 + 48 \cdot 0 + 100 = 100.$$

Mittlere Änderungsraten ermitteln und Entwicklung beschreiben

Produktionsausweitung I	durchschnittlicher Gesamtkostenanstieg
von 2 000 hl auf 4 000 hl	$m = \frac{K(x_2) - K(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{K(4) - K(2)}{4 - 2} = \frac{164 - 156}{4 - 2} = \frac{8}{2} = 4$ Wird die Produktion von 2 000 hl auf 4 000 hl ausgeweitet, steigen die Gesamtkosten insgesamt um 8.000 GE und damit durchschnittlich um 4.000 GE pro 1 000 hl.
von 2 000 hl auf 3 000 hl	$m = \frac{K(3) - K(2)}{3 - 2} = \frac{163 - 156}{3 - 2} = \frac{7}{1} = 7$ Wird die Produktion von 2 000 hl auf 3 000 hl ausgeweitet, steigen die Gesamtkosten insgesamt um 7.000 GE und damit durchschnittlich um 7.000 GE pro 1 000 hl.
von 2 000 hl auf 2 500 hl	$m = \frac{K(2,5) - K(2)}{2,5 - 2} = \frac{160,625 - 156}{2,5 - 2} = \frac{4,625}{0,5} = 9,25$ Wird die Produktion von 2 000 hl auf 2 500 hl ausgeweitet, steigen die Gesamtkosten insgesamt um 4.625 GE und damit durchschnittlich um 9.250 GE pro 1 000 hl.
von 2 000 hl auf 2 100 hl	$m = \frac{K(2,1) - K(2)}{2,1 - 2} = \frac{157,141 - 156}{2,1 - 2} = \frac{1,141}{0,1} = 11,41$ Wird die Produktion von 2 000 hl auf 2 100 hl ausgeweitet, steigen die Gesamtkosten insgesamt um 1.141 GE und damit durchschnittlich um 11.410 GE pro 1 000 hl.

Die vier Sekanten verlaufen monoton steigend. Je kleiner die Produktionsausweitung ist, desto größer ist die Steigung der Sekante, d. h. der durchschnittliche Gesamtkostenanstieg wird größer. Mit zunehmender Produktionsausweitung steigen die Gesamtkosten demnach geringer an. Die Gesamtkostenentwicklung ist **degressiv**.

Produktionsausweitung II	durchschnittlicher Gesamtkostenanstieg
von 4 000 hl auf 6 000 hl	$m = \frac{K(x_2) - K(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{K(6) - K(4)}{6 - 4} = \frac{172 - 164}{6 - 4} = \frac{8}{2} = 4$ Wird die Produktion von 4 000 hl auf 6 000 hl ausgeweitet, steigen die Gesamtkosten insgesamt um 8.000 GE und durchschnittlich um 4.000 GE pro 1 000 hl.
von 4 000 hl auf 5 000 hl	$m = \frac{K(5) - K(4)}{5 - 4} = \frac{165 - 164}{5 - 4} = \frac{1}{1} = 1$ Wird die Produktion von 4 000 hl auf 5 000 hl ausgeweitet, steigen die Gesamtkosten insgesamt um 1.000 GE und durchschnittlich um 1.000 GE pro 1 000 hl.
von 4 000 hl auf 4 500 hl	$m = \frac{K(4,5) - K(4)}{4,5 - 4} = \frac{164,125 - 164}{4,5 - 4} = \frac{0,125}{0,5} = 0,25$ Wird die Produktion von 4 000 hl auf 4 500 hl ausgeweitet, steigen die Gesamtkosten insgesamt um 125 GE und durchschnittlich um 250 GE pro 1 000 hl.
von 4 000 hl auf 4 100 hl	$m = \frac{K(4,1) - K(4)}{4,1 - 4} = \frac{164,001 - 164}{4,1 - 4} = \frac{0,001}{0,1} = 0,01$ Wird die Produktion von 4 000 hl auf 4 100 hl ausgeweitet, steigen die Gesamtkosten insgesamt um 1 GE und durchschnittlich um 10 GE pro 1 000 hl.

Fortsetzung

Die vier Sekanten verlaufen monoton steigend, je kleiner das Intervall wird, desto geringer wird die Steigung der Sekante. Je kleiner die Produktionsausweitung ist, desto kleiner ist der durchschnittliche Gesamtkostenanstieg. Daraus folgt, dass mit zunehmender Produktionsausweitung die Gesamtkosten stärker ansteigen. Die Gesamtkostenentwicklung ist **progressiv**.

Durchschnittliche Änderungsrate

Die **durchschnittliche Steigung** eines Funktionsgraphen in einem Intervall $[x_1; x_2]$ wird berechnet, indem die Steigung m_s der **Sekante**¹, die durch die Punkte $(x_1 | f(x_1))$ und $(x_2 | f(x_2))$ verläuft, ermittelt wird. Eine Sekante schneidet den Funktionsgraphen in zwei Punkten. Diese Steigung m_s wird als **durchschnittliche Änderungsrate** oder **mittlere Änderungsrate** bezeichnet. Zur Berechnung der Sekantensteigung wird der **Differenzenquotient** verwendet:

$$m_s = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{Horizontalunterschied}}, \text{ alternativ wird auch die Schreibweise}$$

$$m_s = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{x_1 + h - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \text{ genutzt, dabei gilt } x_2 = x_1 + h \text{ bzw. } x_2 - x_1 = h.$$

In diesem Fall wird die durchschnittliche Steigung im Intervall $[x_1; x_1 + h]$ ermittelt.

