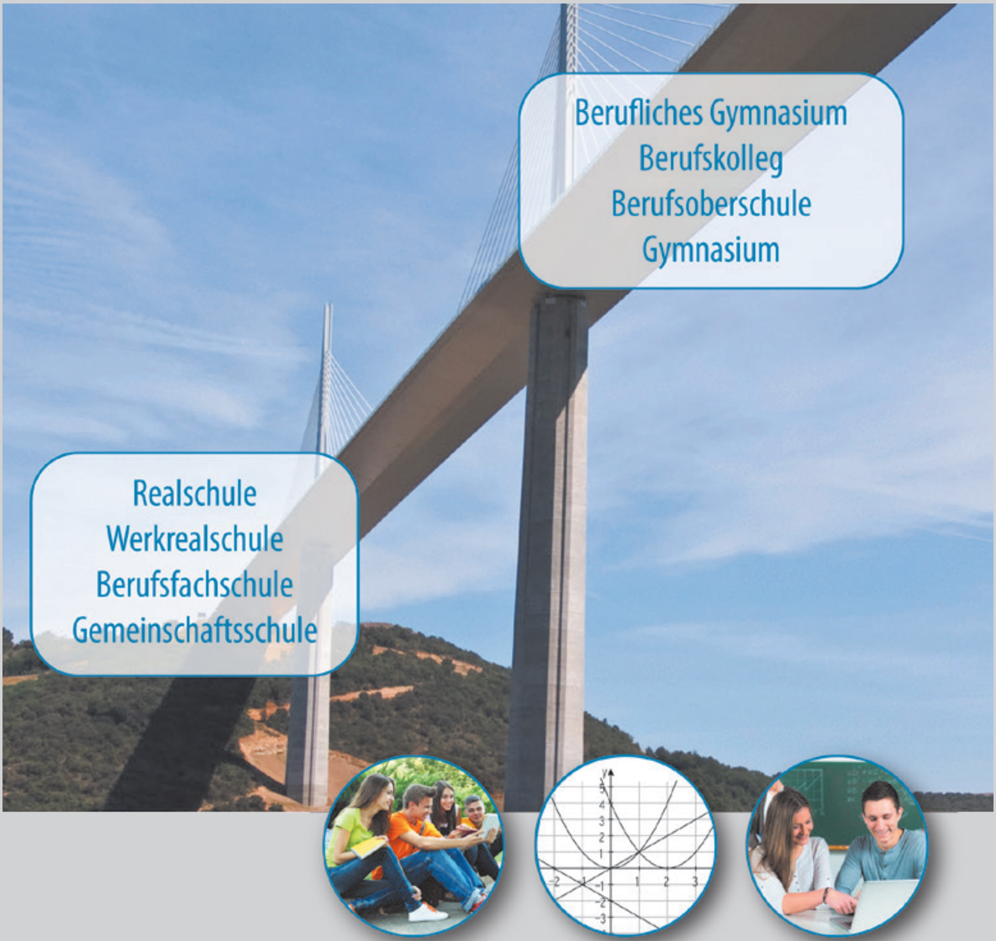
Ott
Deusch

Schnittstelle Mathematik

Vorbereitungskurs



Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Ronald Deusch

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

* * * * *

2. Auflage 2018

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-0033-8

2 Rechnen mit Termen

2.1 Algebraische Begriffe

Beachten Sie:

Ein **Term** ist ein mathematischer Ausdruck.

Terme sind Zahlen	$2;\ 3^2;\ \sqrt{12};\ 4{,}5;\ \ldots$
oder Variablen	$a;\ b;\ x^3;\ \sqrt{x};\ \ldots$
oder sinnvolle Kombinationen von Variablen, Zahlen und Rechenzeichen.	$5 \cdot \frac{6}{7} + 8;\ \ 4x + 5y;\ \ldots$

Addition

Summanden

$$\underbrace{a + b}_{\text{Summe}}$$

Subtraktion

$$\underbrace{a - b}_{\text{Differenz von a und b}}$$

Multiplikation mit Variablen:

Variable

$$3 \cdot x$$

Koeffizient

$$\underbrace{x + x + x}_{\text{Summe}} = \underbrace{3 \cdot x}_{\text{Produkt}}$$

Faktoren

$$\underbrace{x \cdot x \cdot x}_{\text{Produkt}} = \underbrace{x^3}_{\text{Potenz}}$$

Division

Zähler $\rightarrow$ $\left.\frac{a}{b}\right\}$ Quotient (Bruch)

Nenner $\rightarrow$ $b \neq 0$

$\frac{1}{a};\ a \neq 0$

Kehrwert von a

Beachten Sie:

Die **Quadratwurzel** aus einer nichtnegativen Zahl a ist die Zahl größer oder gleich null, die mit sich selbst multipliziert a ergibt.

Für $a \geq 0$ gilt $\sqrt{a} \geq 0$ und $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$.

Aufgaben

1 Berechnen Sie die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten aus den beiden Zahlen.

a) 14; 22 b) 3,5; 2,5 c) $\frac{3}{4}; \frac{5}{8}$

2 Zerlegen Sie in ein Produkt.

a) 3^4 b) $4\pi + 4$ c) $2x + 5x + 4{,}5x$

3 Kürzen Sie den Bruch soweit wie möglich.

a) $\frac{156}{9}$ b) $\frac{24}{176}$ c) $\frac{102}{60}$

4 Bilden Sie den Kehrwert.

a) 5 b) 2,3 c) $\frac{3}{7}$ d) $5\frac{1}{2}$ e) $\frac{a}{3}$

5 Vereinfachen Sie.

a) $\frac{\frac{13}{7}}{3}$ b) $\frac{\frac{2}{5}}{9}$ c) $(4 + \frac{3}{7}) \cdot \frac{7}{6}$ d) $\frac{5}{17} \cdot 2 + \frac{5}{17} \cdot 8$

6 Vereinfachen Sie.

a) $(\sqrt{3})^2$ b) $\sqrt{50} + \sqrt{2}$ c) $(\sqrt{a})^3$ d) $\frac{1}{2}(\sqrt{2})^3$

7 Berechnen Sie ohne Hilfsmittel.

a) $1{,}02 \cdot 15$ b) 12 % von 550 c) $\frac{4}{5}$ von 30

d) $9{,}018 : 9$ e) $\frac{3}{4}$ von − 200 f) $\frac{12}{5}$ von 40

g) $(\frac{9}{11})^2$ h) $\frac{1}{2}$ von $\frac{3}{4}$ i) $2{,}6 \cdot (-1{,}2)$

8 Ergänzen Sie die folgende Tabelle

x	y	$x + 2y$	$x - 2y$	$1{,}2(x - y)$	$(x + y)^2$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	$\frac{1}{2} \cdot x^2$	$x \cdot y$	$-1 - y^2$
3	5								
− 2	− 6								
− 4	3								
0	− 12								
	− 5	0							
		6	− 2						
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$								
5	$\frac{1}{5}$								
− 0,2	1,4								
0,6	− 3								
a	2a								
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{3}$								

2.2 Rechnen mit Summen und Differenzen

1) Gleichartige Glieder lassen sich zusammenfassen.

$2x + 5y - 4x - 15y - 23x + 2{,}5y = 2x - 4x - 23x + 5y - 15y + 2{,}5y = -25x - 7{,}5y$

2) Rechenzeichen und Vorzeichen vor der Klammer beachten.

$-(4a - 2b) - (b - a) + 5a = -4a + 2b - b + a + 5a = 2a + b$

3) Jedes Glied der Summe wird mit dem Faktor multipliziert.

Gliedweise ausmultiplizieren.

$6(x - 2y) - 8(3 - 4x - 2y) + 1 = 6x - 12y - 24 + 32x + 16y + 1 = 38x + 4y - 23$

4) Faktoren dürfen vertauscht werden.

$\frac{2}{3}xy \cdot (-3x) = \frac{2}{3} \cdot (-3) \cdot x \cdot x \cdot y = -2x^2y$

5) Klammern werden von innen nach außen aufgelöst.

$a - \frac{1}{2}[5a - (b - 8a)] = a - \frac{1}{2}[5a - b + 8a] = a - \frac{1}{2}(13a - b) = a - \frac{13}{2}a + \frac{1}{2}b = -\frac{11}{2}a + \frac{1}{2}b$

6) Multiplikation von Summen.

$(a - 3)(a + 8) = a^2 - 3a + 8a - 3 \cdot 8 = a^2 + 5a - 24$

Beachten Sie:

Ausmultiplizieren von Summen heißt, jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multiplizieren.

Unterscheiden Sie: $(x - 4)(x - 2) = x^2 - 6x + 8$

$x - 4 \cdot (x - 2) = x - 4x + 8 = -3x + 8$

Punktrechnung vor Strichrechnung

Aufgaben

1 Vereinfachen Sie.

a) $18a - 3x + 6a - 3(x + a) - 5(a - 2x)$

b) $15ax + 3ax - 7a \cdot (-2x)$

c) $2 \cdot 4a \cdot 3b + 5a \cdot 2b - 18ab$

d) $-3(x^2 - x) + (x^2 - 2x + 3) \cdot (-2)$

e) $6{,}5x^2 - [5x - x(3 - 4x) + 2] \cdot (-0{,}5)$

f) $x - 5x(x^2 - 3x) \cdot (-4) - 5x^2$

g) $1{,}2 \cdot (x + x \cdot 1{,}2) + 1{,}2^2 \cdot x$

h) $-\frac{a^2}{2} - (\frac{3}{2}a)^2 + \frac{1}{4}(2 - 2a^2)$

i) $\frac{1}{5}x - 3 \cdot [x - x(1 - 4a) + ax]$

j) $\frac{3}{2} \cdot [5 \cdot (x - 2 \cdot (x - 4)) + 2]$

2 Multiplizieren Sie aus.

a) $(x - 5)(x - 2)$

b) $\frac{2}{3}(x - 2)(x + 3)$

c) $\frac{1}{2}(x - 5)(x + 5)$

d) $\frac{3}{2}(x + 4)(x + 4)$

e) $(4 - 2x) \cdot (-2x + 4)$

f) $\frac{x - 5}{2} \cdot (4x + 8)$

3.4 Quadratische Gleichungen

3.4.1 Lösung mit Formel

Beachten Sie:

Eine **quadratische Gleichung** in x kann auf die Form $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$, gebracht werden. Die Lösungsvariable x tritt in der 2. Potenz auf.

Beispiel 1

Lösen Sie die Gleichung.

a) $6x^2 - 3x - 2 = 0$ b) $-0{,}5x^2 + 5x - 12{,}5 = 0$ c) $3x^2 - 2x = -5$.

Lösung

Beachten Sie:

Lösungsformel für $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$: $x_{1|2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$D = b^2 - 4ac$ heißt Diskriminante.

a) Mit $a = 6$, $b = -3$ und $c = -2$: $x_{1|2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \dfrac{3 \pm \sqrt{57}}{12}$

Diskriminante $D = 57$

Wegen $D > 0$ gibt es **zwei Lösungen** $x_{1|2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{57}}{12}$.

b) Mit (− 2) multiplizieren: $-0{,}5x^2 + 5x - 12{,}5 = 0$

Nullform: $x^2 - 10x + 25 = 0$

Mit $a = 1$, $b = -10$ und $c = 25$: $x_{1|2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \dfrac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = 5$

Diskriminante $D = 0$

Wegen $D = 0$ gibt es **eine (doppelte) Lösung** $x_{1|2} = 5$.

c) Quadratische Gleichung in Nullform: $3x^2 - 2x + 5 = 0$

Mit $a = 3$, $b = -2$ und $c = 5$: $x_{1|2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-56}}{6}$

Diskriminante $D = -56$

Wegen $D < 0$ hat die Gleichung **keine Lösung**.

Die Wurzel aus einer negativen Zahl kann in $\mathbb{R}$ nicht gezogen werden.

Beispiel 2

Lösen Sie die Gleichung.

a) $x^2 - 3x - 2 = 0$

b) $-0{,}5x^2 + 3x - 4{,}5 = 0$

Lösung

Lösungsformel für $x^2 + px + q = 0$: $x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ mit $D = \frac{p^2}{4} - q$

a) Mit $p = -3$ und $q = -2$: $x_{1|2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{(-3)^2}{4} - (-2)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$

Diskriminante $D = \frac{17}{4}$

Wegen $D > 0$ gibt es zwei Lösungen $x_{1|2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$.

b) Mit (-2) multiplizieren: $-0{,}5x^2 + 3x - 4{,}5 = 0$

Geeignete Nullform: $x^2 - 6x + 9 = 0$

Mit $p = -6$ und $q = 9$: $x_{1|2} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3 \pm \sqrt{0} = 3$

Diskriminante $D = 0$

Wegen $D = 0$ gibt es eine (doppelte) Lösung $x_{1|2} = 3$.

Die Anzahl der Lösungen hängt von der Diskriminante (D) ab.

$\boxed{D = b^2 - 4ac}$ $\boxed{D = \frac{p^2}{4} - q}$

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
zwei Lösungen	eine (doppelte) Lösung	keine Lösung

Aufgaben

1 Lösen Sie die quadratische Gleichung mit der abc-Formel.

a) $4x^2 + 8x - 48 = 0$
b) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}$
c) $3 + \frac{1}{3}x^2 = 2x$
d) $x^2 + x + 7 = -3x + 2$
e) $-2x^2 - 3x = 2{,}5$
f) $(x-3)^2 - 9 = 0$
g) $3x^2 + 5x - 8 = 0$
h) $\frac{1}{2}(x^2 - 4x - 5) = 0$
i) $-x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{5}{4}$
j) $0 = 1{,}5x(x+2) - 3$
k) $(2x+5)^2 = 4$
l) $x(2x+1) - 5 = 0$
m) $x^2 - 4x + 2 = 5$
n) $\frac{1}{2}(x^2 - 2) = 0$
o) $-6x^2 + 2x - 2 = 0$

2 Lösen Sie die quadratische Gleichung mit der pq-Formel.

a) $x^2 + 2x - 24 = 0$
b) $\frac{1}{2}x^2 + 4x = 4$
c) $1 - x + \frac{1}{3}x^2 = 0$
d) $x^2 - x = 2$
e) $x(x-5) + 1 = 0$
f) $(x+3)^2 - 2 = 0$

3.4.2 Lösung ohne Formel

1) $ax^2 + c = 0$

Beispiel

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $0{,}5x^2 - 5 = 0$.

Lösung

Quadratische Gleichung:	$0{,}5x^2 - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 10$
Wurzelziehen ergibt:	$x_1 = \sqrt{10};\ x_2 = -\sqrt{10}$
Die Gleichung hat zwei Lösungen:	$x_{1\|2} = \pm\sqrt{10}$

2) $ax^2 + bx = 0$

Beispiel

Lösen Sie durch Ausklammern: $x^2 + 3x = 0$

Lösung

Gleichung:	$x^2 + 3x = 0$
x ausklammern:	$x(x + 3) = 0$
Satz vom Nullprodukt anwenden:	$x = 0$ oder $x + 3 = 0$
Die Gleichung hat zwei Lösungen:	$x_1 = 0;\ x_2 = -3$

Beachten Sie:

Satz vom Nullprodukt: Ein **Produkt ist null,** wenn **mindestens ein Faktor null** ist:

$$u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee v = 0$$ („$\vee$" bedeutet „oder")

3) $a(x - u)(x - v) = 0$

Beispiel 1

Lösen Sie die Gleichung. a) $4(2x - 6)(5 - x) = 0$ b) $x^2 + 6x + 9 = 0$

Lösung

a) **Hinweis:** $4 \neq 0$ ist ein konstanter Faktor.

Nullprodukt:	$(2x - 6)(5 - x) = 0.$
Satz vom Nullprodukt anwenden:	$2x - 6 = 0 \vee 5 - x = 0$
Die Gleichung hat zwei Lösungen:	$x_1 = 3;\ x_2 = 5$

b) Der Term kann mit Hilfe einer binomischen Formel faktorisiert werden.

Quadratische Gleichung:	$x^2 + 6x + 9 = 0$
Binom:	$(x + 3)^2 = 0$
Faktorform:	$(x + 3)(x + 3) = 0$

Die Gleichung hat eine (doppelte) Lösung: $x_{1|2} = -3$.

Beispiel 2

Lösen Sie die Gleichung a) $x^2 + 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x - 5 = 0$

Lösung

Für die Lösungen von $x^2 + px + q = 0$ gilt: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$

Damit kann der Term $x^2 + px + q$ faktorisiert werden: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = 0$

a) Aus $x_1 + x_2 = -6$ und $x_1 \cdot x_2 = 8$ ergibt sich $x_1 = -4$ und $x_2 = -2$

Gleichung in Faktorform: $(x + 4)(x + 2) = 0$

b) Aus $x_1 + x_2 = -4$ und $x_1 \cdot x_2 = -5$ ergibt sich $x_1 = -5$ und $x_2 = 1$

Gleichung in Faktorform: $(x + 5)(x - 1) = 0$

Aufgaben

1 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen.

a) $x^2 + 3x = 0$ b) $4x^2 - x = 0$ c) $\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}x^2$

d) $\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}x^2 = 0$ e) $\frac{14}{15}(x^2 - 7x) = 0$ f) $\frac{x^2}{7} + \frac{x}{7} = 0$

g) $-\frac{1}{8}x^2 + tx = 0$ h) $x^2 - tx = 0$ i) $tx - \frac{x^2}{t} = 0;\ t \neq 0$

j) $3x(x - 4) = 0$ k) $(5x + 2)x = 0$ l) $ax - 2x^2 = 0$

m) $-\frac{1}{8}(x^2 - 8x) = 0$ n) $4x^2 = (t - 1)x$ o) $\frac{x - 5x^2}{12} = 0$

p) $5 - (x^2 + 4x + 5) = 0$ q) $(2x + 1)x = 3$ r) $5(\frac{5}{4}x - \frac{1}{2}x^2) = 0$

s) $0{,}5k^2 - 2k = -3$ t) $\frac{u^2 + u}{2} = 4$ u) $x^2 + 9x + 20 = 0$

2 Lösen Sie möglichst ohne Formel.

a) $(x + 4)(x - 5) = 0$ b) $(2x + 7)(4x - 1) = 0$ c) $(x + t)(x - 2t) = 0$

d) $x^2 + 8x + 16 = 0$ e) $x^2 = 14x - 49$ f) $3a(2x - x^2) = 0;\ a \neq 0$

g) $x(x - 12) = -36$ h) $3(1 - x)^2 - 3 = 9$ i) $k^2 + k - 12 = 0$

j) $n^2 - 16n + 60 = 0$ k) $(x - 1)^2 - 2x = 0$ l) $1 = a + a^2$

3 Lösen Sie die quadratische Gleichung nach x auf.

a) $2 - x^2 = 0$ b) $\frac{4}{5}(x^2 - 5) = 0$ c) $\frac{5}{4} - \frac{1}{2}x^2 = x^2$

d) $3x^2 + 6 = 15$ e) $\frac{1}{2}x^2 = 9$ f) $\frac{4}{5}x^2 = 2x^2$

g) $6x^2 = 0$ h) $3x^2 + 4 = -x^2 + 1$ i) $7(x - 1)^2 = -14x$

j) $x^2 - 2t^2 = 0$ k) $x^2 = \frac{a^2}{2}$ l) $ax = x(x + a)$

4 Für welche Werte von a ($a \in \mathbb{R}$) hat die Gleichung $ax^2 + 1 = 0$ keine Lösung?

Was man wissen sollte… zum Lösen quadratischer Gleichungen

Die quadratische Gleichung wird in Nullform umgeformt (wenn nötig).

Lösung mit Formel:

$ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$ Lösung mit der abc-Formel

$$x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{mit } D = b^2 - 4ac$$

$x^2 + px + q = 0$ Lösung mit der pq-Formel

$$x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{mit } D = \frac{p^2}{4} - q$$

Die Anzahl der Lösungen hängt von der Diskriminante D ab.

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
zwei Lösungen	eine Lösung	keine Lösung

Lösung ohne Formel:

$ax^2 + c = 0;\ a \neq 0$ Umformung zu $x^2 = -\frac{c}{a}$

Lösung durch **Wurzelziehen.**

$ax^2 + bx = 0;\ a \neq 0$ Lösung durch **Ausklammern**

$x \cdot (ax + b) = 0$

Satz vom Nullprodukt anwenden.

Zerlegung in Linearfaktoren $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = 0$

(Faktorisieren)

mithilfe der **Binomischen Formeln:** $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$

$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$

$(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$

oder

mithilfe des **Satzes von Vieta:** $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$

Seite 28

1 a) $-3; 0$ b) $0; \frac{1}{4}$ c) $0; \frac{3}{2}$

d) $-0{,}4; 0$ e) $0; 7$ f) $-1; 0$

g) $0; 8t$ h) $0; t$ i) $0; t^2$

j) $0; 4$ k) $-0{,}4; 0$ l) $0; \frac{a}{2}$

m) $0; 8$ n) $\frac{t-1}{4}; 0$ o) $0; 0{,}2$

p) $0; -4$ q) $-1{,}5; 1$ r) $0; \frac{5}{2}$

s) keine Lösung t) $-3{,}37; 2{,}37$ u) $-4; -5$

2 a) $-4; 5$ b) $-3{,}5; \frac{1}{4}$ c) $-t; 2t$

d) -4 e) 7 f) $2; 0$

g) 6 h) $-1; 3$ i) $-4; 3$

j) $10; 6$ k) $0{,}27; 3{,}73$ l) $-1{,}62; 0{,}62$

3 a) $\pm\sqrt{2}$ b) $\pm\sqrt{5}$ c) $\pm 0{,}91$

d) $\pm\sqrt{3}$ e) $\pm\sqrt{18}$ f) 0

g) 0 h) keine Lösung i) keine Lösung

j) $\pm t\sqrt{2}$ k) $\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ l) 0

4 $a \geq 0$

Seite 30

1

Gleichung	a	b	c
$3x^2 + 4x - 12 = 0$	3	4	-12
$x^2 + 2x - 6 = 0$	1	2	-6
$-\frac{1}{6}x^2 + x = 0$	$-\frac{1}{6}$	1	0
$\frac{1}{2}(x^2 + 2x - 7) = 0$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{7}{2}$
$-x^2 + 2 = 0$	-1	0	2
$x^2 + 2x - 2 = x - 4 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0$	1	1	2
$-2x^2 - x + 1 = 0$	-2	-1	1

2 a) $-1; 11$ b) $-2; -\frac{2}{3}$ c) $-5; 0$

d) $0; 4$ e) $0; 24$ f) $0; -2t$

g) $2t^2; 0$ h) $0{,}5a$ i) $\pm\sqrt{t} + 1$

Seite 30

3 a) $0; \frac{8}{5}$ b) $0; 9$ c) $0; -\frac{6}{7}$
d) $0; 16a$ e) $0; \frac{1}{a}$ f) $0; \frac{1}{3}$
g) $0; 3$ h) $\pm 1 + a$ i) $0; -2$

4 Für $a = 1$ ist $x = -1$ doppelte Lösung.

5 a) $0 ; 5$ b) $-7; \frac{1}{2}$ c) $-0{,}73; 2{,}73$

6 a) $D = 4 + 4a = 0$ für $a = -1$.
b) $a(x^2 + x - 1) = 0$; $D = 5 > 0$; Für alle $a \neq 0$ zwei Lösungen, es gibt also kein a.
c) $x = \frac{a-2}{2}$; Für alle $a \neq -2$ gibt es eine Lösung.

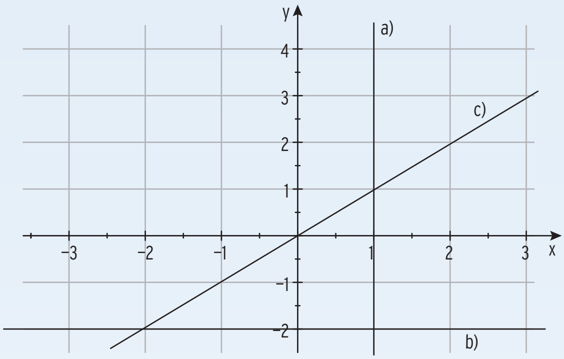
7 Division beider Seiten durch x ist keine Äquivalenzumformung. $x = 0$ ist auch Lösung.

8 a) $x^2 - 1 = 0$ b) $x^2 - 5x = 0$ c) $(x + 3)^2 = 0$
d) $x^2 + 1 = 0$

9 $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = -0{,}5$
b) $L = \{1\}$ ist die richtige Lösungsmenge.

Seite 31

1 a) bis c)



d)

e) Kreis um O
mit Radius 1