Bohner | Ott | Deusch

Mathematik

für das Berufskolleg – Berufliches Gymnasium
Jahrgangsstufe 12 und 13

Nordrhein-Westfalen

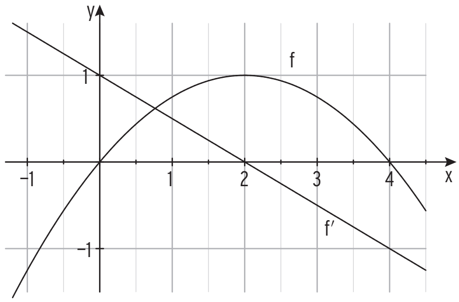
Ausführliche Lösungen
zu im Buch gekennzeichneten Aufgaben

Lösungsheft
2. Auflage 2024
Merkur-Nr. 0666-02
ISBN 978-3-8120-1065-8

Merkur
Verlag Rinteln

Lehrbuch Seite 18

3 Der Graph von f hat einen Hochpunkt in $x = 2$, die Steigung wechselt das Vorzeichen von + nach −.
Der Graph von f ist wachsend für $x < 2$, danach fallend.
Der Graph von f ist eine Parabel, das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 2. Grades.



Lehrbuch Seite 21

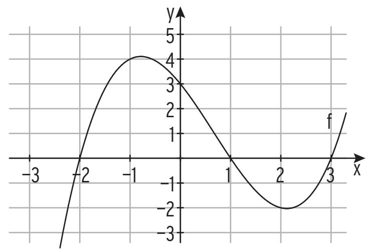
1 a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 3$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2}$; $f''(x) = 3x - 2$

$H(-0{,}79 \mid 4{,}10)$; $T(2{,}12 \mid -2{,}03)$

$N_1(-2 \mid 0)$; $N_2(1 \mid 0)$; $N_3(3 \mid 0)$

$S_y(0 \mid 3)$



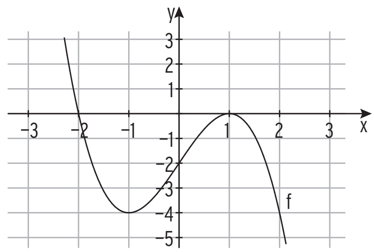
b) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

$f'(x) = -3x^2 + 3$; $f''(x) = -6x$

$H(1 \mid 0)$; $T(-1 \mid -4)$

$N_1(-2 \mid 0)$; $N_{2|3}(1 \mid 0)$

$S_y(0 \mid -2)$

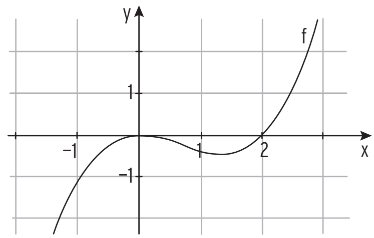


c) $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2$

$f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$; $f''(x) = \frac{9}{4}x - \frac{3}{2}$

$H(0 \mid 0) = N_1$; $T(\frac{4}{3} \mid -\frac{4}{9})$

$N_2(2 \mid 0)$



Lehrbuch Seite 29

2 a) $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$; $f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$; $f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$; $f'''(x) = -\frac{3}{4} \neq 0$

$W(\frac{2}{3} \mid \frac{128}{27})$

b) $f(x) = 6x^2 - \frac{2}{3}x^3$; $f'(x) = 12x - 2x^2$; $f''(x) = 12 - 4x$; $f'''(x) = -4 \neq 0$

$W(3 \mid 36)$

Lehrbuch Seite 32

2 b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$; $f''(x) = -6x + 12$

$f'''(x) = -6 \neq 0$

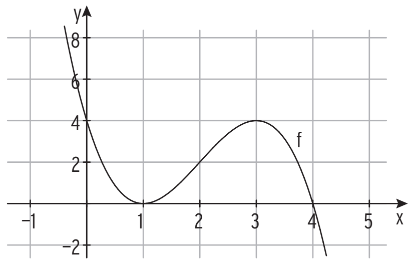
$f(x) = 0$

Mit CAS

oder Polynomdivision mit $(x - 1)$

$N_{1|2}(1 \mid 0) = T$; $N_3(4 \mid 0)$; $S_y(0 \mid 4)$

$H(3 \mid 4)$; $W(2 \mid 2)$



Lehrbuch Seite 46

2 $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 2x^2 + 60x - 98$

a) $G(7{,}9) = 7{,}8 > 0$ und $G(8{,}1) = -12{,}2 < 0$ VZW von G(x) von + nach −

b) $G(x) = 110 \Leftrightarrow -x^3 + 2x^2 + 60x - 208 = 0$

Mit CAS

oder Polynomdivision mit $(x - 4)$: $(-x^3 + 2x^2 + 60x - 208) : (x - 4) = -x^2 - 2x + 52$

$-x^2 - 2x + 52 = 0$ für $x_2 = 6{,}28$, $(x_3 = -8{,}28)$

Bei der Produktionsmenge 6,28 ME beträgt der Gewinn auch 110 GE.

c) $G'(x) = -3x^2 + 4x + 60$; $G''(x) = -6x + 4$

$G'(x) = 0$ für $x_1 = 5{,}19$ ($x_2 = -3{,}85$ ökonomisch nicht sinnvoll)

Gewinnmaximum $G_{max} = G(5{,}19) = 127{,}47$

d) gewinnmaximaler Preis: $\frac{E(5{,}19)}{5{,}19} = \frac{353{,}44}{5{,}19} = 68{,}1$

Cournot'scher Punkt $C(5{,}19 \mid 68{,}1)$

Lehrbuch Seite 53

1 $K(x) = \frac{1}{4}x^3 - 6x^2 + 50x + 280$; $k(x) = \frac{1}{4}x^2 - 6x + 50 + \frac{280}{x}$; $k'(x) = \frac{1}{2}x - 6 - \frac{280}{x^2}$

a) $k'(14{,}5) = -0{,}08 < 0$; $k'(14{,}7) = 0{,}06 > 0$

VZW von $k'(x)$ von − nach + , also Tiefpunkt bei $x \approx 14{,}6$

Das Betriebsoptimum liegt bei etwa 14,6.

langfristige Preisuntergrenze $k(14{,}6) = 34{,}87$

b) $k_v(x) = \frac{1}{4}x^2 - 6x + 50$; $k_v'(x) = \frac{1}{2}x - 6$

Betriebsminimum: $k_v'(x) = 0$ $x_{BM} = 12$

kurzfristige Preisuntergrenze: $k_v(12) = 14$

Lehrbuch Seite 72

4 $E(x) = 69{,}5x$

Bedingungen für a, c und d in $K(x) = ax^3 - 30x^2 + cx + d$

$k_v(x) = ax^2 - 30x + c$; $k_v'(x) = 2ax - 30$

$K(0) = 100$: $d = 100$

$k_v'(7{,}5) = 0$ $15a - 30 = 0$ $\Rightarrow a = 2$

$k_v(7{,}5) = 37$ $56{,}25a - 225 + c = 37$

Einsetzen von a = 2 ergibt $56{,}25 \cdot 2 - 225 + c = 37$

$c = 149{,}5$

$K(x) = 2x^3 - 30x^2 + 149{,}5x + 100$

Lehrbuch Seite 80

1 a) $f(x) = (x + 1)e^x$

Mit der Produktregel

$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x + 1) \cdot e^x = (x + 2)e^x$

b) $f(x) = x^2\, e^{-0,25x}$

Mit der Produktregel

$f'(x) = 2x \cdot e^{-0,25x} + x^2 \cdot (-0,25)\, e^{-0,25x} = (-0,25x^2 + 2x)\, e^{-0,25x}$

Lehrbuch Seite 86

3 $f(x) = e^{0,5x}(x - 3)$; $f'(x) = e^{0,5x}(0,5x - 0,5)$;

$f''(x) = e^{0,5x}(0,25x + 0,25)$

Wertemenge von f : $T(1 \mid -2e^{0,5})$;

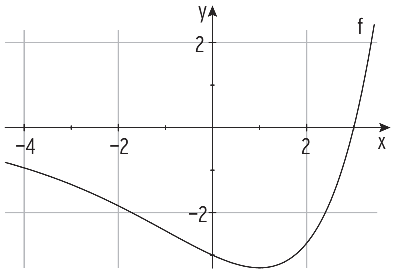
absolutes Minimum: $-2e^{0,5}$

$W_f = [-2e^{0,5}; \infty)$

$W(-1 \mid -4e^{-0,5})$; $f'(-1) = -e^{-0,5}$

Gleichung der Wendetangente:

$y = -e^{-0,5}(x + 1) - 4e^{-0,5} = -e^{-0,5}x - 5e^{-0,5}$



Lehrbuch Seite 98

4 $f(t) = a\,te^{bt}$

Bedingungen: $f(2) = 33{,}8$ $\quad 2ae^{2b} = 33{,}8 \quad (1)$

$f(4) = 24{,}9 \quad 4ae^{4b} = 24{,}9 \quad (2)$

Lösung mit CAS: $a = 45{,}88$; $b = -0{,}5$

$f(t) = 45{,}88\,te^{-0{,}5t}$; $f'(t) = e^{-0{,}5t}(-22{,}94t + 45{,}88)$

$f'(t) = 0$ für $t = 2$

$f(0) = 0$; $f(t) \to 0$ für $t \to \infty$ $\quad \Rightarrow t = 2$ ist Maximalstelle

Die Behauptung stimmt.

Lehrbuch Seite 107

5 F mit $F(x) = -2x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x + c$

Punktprobe mit $A(-1 \mid 2)$ ergibt $c = \frac{4}{3}$

$F(x) = -2x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x + \frac{4}{3}$

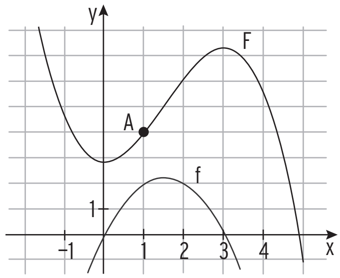
Lehrbuch Seite 111

9 Nullstelle von f mit VZW ist Extremstelle von F

x = 0: Minimalstelle von F

x = 3: Maximalstelle von F

In x = 1,5 hat der Graph von F die größte Steigung 2,25.



In x = 1,5 hat F eine Wendestelle.

Ein Schaubild einer Stammfunktion zeichnen und so nach oben verschieben, dass es durch A(1 I 4) verläuft.

Lehrbuch Seite 119

1 a) $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (2x + 1)dx = [x^2 + x]_0^2 = 6$

b) $\int_{-1}^3 f(x)dx = \int_{-1}^3 (0{,}5x^3)dx = \left[\frac{1}{8}x^4\right]_{-1}^3 = 10$

c) $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 (x^2 - \frac{x}{3})dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2\right]_0^4 = \frac{56}{3}$

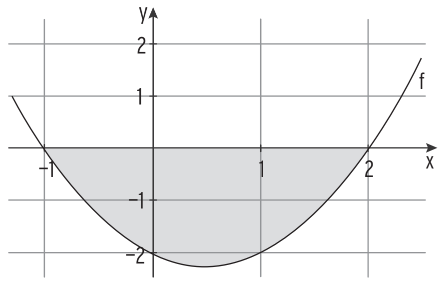
Lehrbuch Seite 128

3 a) Nullstellen: f(x) = 0

$(x-2)(x+1) = 0$

$x = -1;\ x = 2$

Skizze:



Stammfunktion:

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$\int_{-1}^{2} (x-2)(x+1)dx$

$= \int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)dx = -\frac{9}{2};\ A = \frac{9}{2}$

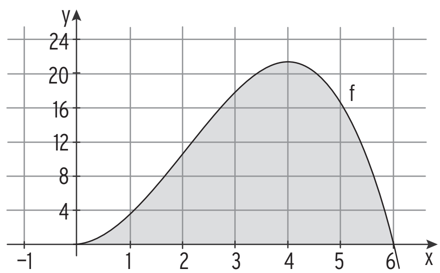
b) Nullstellen: f(x) = 0

$-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 = 0$

$x^2(-\frac{2}{3}x + 4) = 0$

$x = 0\ ;\ x = 6$

Skizze:

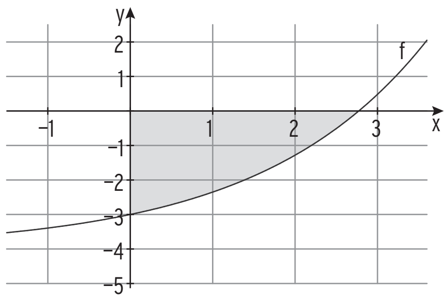


Stammfunktion: $F(x) = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{4}{3}x^3$

$\int_{0}^{6} (-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2)dx = 72$

c) Nullstelle von f: $2\ln(4) \approx 2{,}77$

Skizze:



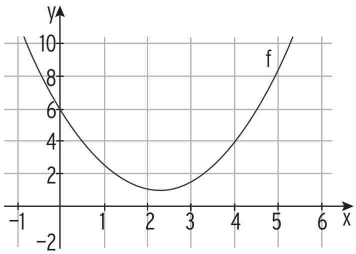
$F(x) = 2e^{0,5x} - 4x$

$\int_{0}^{2,77} (e^{0,5x} - 4)dx = -5{,}09$

$A \approx 5{,}09$

Lehrbuch Seite 129

11 $f(x) = x^2 - 4{,}5x + 6$



Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 6x$

$F(6) - F(0) = 27$

$\int_0^6 f(x)\,dx = F(6) - F(0)$

f hat keine Nullstelle auf [0; 6].

F(6) − F(0) ist der Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild von f und der x-Achse auf [0; 6].

Lehrbuch Seite 132

5 a) $f(x) = 0{,}5(x^2 - 1)$; $g(x) = -0{,}5x - 1$ kein Schnittpunkt

$\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = 4{,}67$; $A = 4{,}67$

b) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$; $g(x) = 2$

Schnittstellen: $x = 0$ und $x = 1$

$\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = \frac{5}{3}$; $A = \frac{5}{3}$

Lehrbuch Seite 134

1 a) $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = -x + 3$

Schnittstelle der Graphen von f und g: $x_1 = 1$

$\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = -\frac{7}{6}$; $\int_1^2 (f(x) - g(x))\,dx = \frac{11}{6}$

$A = \frac{7}{6} + \frac{11}{6} = 3$

b) $f(x) = x^3 - x$; $g(x) = 3x$

Schnittstelle der Graphen von f und g: $x_1 = 0$; $x_{2|3} = \pm 2$

$\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx = -4$

Wegen der Symmetrie der beiden Kurven zum Ursprung: $A = 8$

Lehrbuch Seite 200

3 X: Folgekosten in €

E(X) = 20 € · 0,05 + 30 € · 0,02 + 150 € · 0,005 = 2,35

Die Folgekosten betragen 2,35 €.

Hinweis: $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$

Lehrbuch Seite 206

7 a) X: Durchmesser in mm

$\mu = E(X) = 3{,}18 \cdot 0{,}03 + 3{,}19 \cdot 0{,}21 + 3{,}20 \cdot 0{,}43 + 3{,}21 \cdot 0{,}29 + 3{,}22 \cdot 0{,}04 = 3{,}201$

Der mittlere Durchmesser beträgt 3,201 mm.

Varianz: $\sigma^2 = (3{,}18 - 3{,}201)^2 \cdot 0{,}03 + \ldots + (3{,}22 - 3{,}201)^2 \cdot 0{,}04 = 7{,}69 \cdot 10^{-5}$

Standardabweichung: $\sigma = 8{,}77 \cdot 10^{-3}$ (in mm)

Ausschuss: 0,03 + 0,04 = 0,07 = 7 %

Es entsteht 7 % Ausschuss.

b) Der mittlere Durchmesser ist gleich geblieben, die Standardabeichung hat sich verringert. Die Durchmesser, die im Februar gemessen wurden, streuen weniger um den mittleren Durchmesser 3,201 mm als die Werte, die im Januar gemessen wurden.

Lehrbuch Seite 210

2 X: Anzahl der roten Kugeln

Mit Zurücklegen: $P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 0{,}4219$

Bernoulli-Kette: Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Kugel bleibt gleich.

Ohne Zurücklegen: $P(X = 2) = 3 \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} = 0{,}5357$

Keine Bernoulli-Kette: Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Kugel ändert sich.

Lehrbuch Seite 219

8 X: Anzahl der vorzeitig ausgefallenen Batterien

a) n = 100; p = 0,2

$P(A) = P(X < 25) = P(X \leq 24) = \sum_{k=0}^{24} B_{100;\,0,2}(k) = F_{100;\,0,2}(24) = 0{,}8686$

n = 50; p = 0,2

$P(B) = P(X \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} B_{50;\,0,2}(k) = F_{50;\,0,2}(10) = 0{,}5836$

n = 5; p = 0,05

$P(C) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_{5;\,0,05}(1) = 1 - 0{,}7373 = 0{,}2627$

b) Unter 100 Batterien sollen mindestens eine und höchstens k Batterien ausfallen.

$P(1 \leq X \leq k) = P(X \leq k) - P(X = 0) = P(X \leq k) \geq 0{,}99$

Mithilfe z. B. der Tabelle für die Summenfunktion $F_{100;\,0,2}$: $k \geq 30$

Der Anteil muss mindestes 30 % betragen.

c) n = 100; p = 0,05

$P(4 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 3) = 0{,}9369 - 0{,}2578 = 0{,}6791$

Lehrbuch Seite 225

3 a) X: Anzahl der defekten Dichtungen; X ist $B_{500;\,0,05}$-verteilt

$E(X) = 25$

b) $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 4{,}87$

$P(20{,}13 \leq X \leq 29{,}87) = P(21 \leq X \leq 29) = 0{,}8235 - 0{,}1789 = 0{,}6446$

c) X ist $B_{50;\,0,05}$-verteilt;

$P(A) = P(X = 0) = 0{,}0769$

$P(B) = P(X \leq 3) = 0{,}7604$

$P(C) = P(X > 35) = 1 - P(X \leq 35) = 0$

$P(D) = P(4 \leq X \leq 6) = 0{,}9882 - 0{,}7604 = 0{,}2278$

Lehrbuch Seite 235

4 X: Ausgangsleistung in Watt; $\mu = 200$; $\sigma = 6$

$P(X < 190) = P(X \leq 190) \approx 0{,}04779$

$P(X < 200 + c) \geq 0{,}975$; $P(X \leq 211) \approx 0{,}967 <‹ 0{,}975$; $P(X \leq 212) \approx 0{,}977 > 0{,}975$

$c = 12$

Hinweis: Bestimmung von c mit CAS.

Lehrbuch Seite 250

3 X: Anzahl der fehlerhaften Metallscheiben. X ist $B_{50;\,0,1}$-verteilt

$P(X \leq 5) \approx 0{,}6161$

Rechtsseitiger Hypothesentest: X ist $B_{100;\,0,1}$-verteilt

$P(X \geq g) \leq 0{,}05 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq g - 1) \leq 0{,}05$

$P(X \leq g - 1) \geq 0{,}95$

Mit Hilfsmittel: $g - 1 = 15$, also $g = 16$

Hinweis: $P(X \leq 15) \approx 0{,}961 > 0{,}95$

Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{16; ...; 100\}$

$16 \in \overline{A}$; Die Lieferung sollte nicht angenommen werden.

Fehler 2. Art: X ist $B_{100;\frac{1}{6}}$-verteilt

$P(X \leq 15) \approx 0{,}3877$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 38,77 % hält der Einkäufer die Metallscheiben-lieferung fälschlicherweise für akzeptabel.

Lehrbuch Seite 262

1 a)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ \cdot(-2) \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ + \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & 23 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} + \\ \cdot 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 20 & 80 \end{array}\right)$$

Dreiecksform

Letzte Gleichung: $20x_3 = 80$

$x_3 = 4$

Einsetzen von $x_3 = 4$ in die

zweite Gleichung $3x_2 + 5x_3 = 11$: $3x_2 + 5 \cdot 4 = 11$

$x_2 = -3$

Einsetzen von $x_3 = 4$ und $x_2 = -3$ in

die erste Gleichung $2x_1 + x_2 - x_3 = -3$: $2x_1 - 3 - 4 = -3$

$x_1 = 2$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ + \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot 2 \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 4 & 6 & 11 \end{array}\right) \quad +$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Letzte Gleichung: $-2x_3 = -5 \Rightarrow x_3 = 2{,}5$

Einsetzen von $x_3 = 2{,}5$ ergibt: $-4x_2 - 8 \cdot 2{,}5 = -16 \Rightarrow x_2 = -1$

Einsetzen von $x_3 = 2{,}5$ und $x_2 = -1$: $x_1 - 1 + 2 \cdot 2{,}5 = 5 \Rightarrow x_1 = 1$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 263

7 Es können x_1 ME an W_1, x_2 ME an W_2 und x_3 ME an W_3 hergestellt werden.

	W_1	W_2	W_3
T_1	3	1	2
T_2	0	4	1
T_3	1	0	3

Gleichungen

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 448 \\ 4x_2 + x_3 &= 442 \\ x_1 + 3x_3 &= 330 \end{aligned}$$

LGS in Matrixschreibweise

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 1 & 0 & 3 & 330 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 0 & 1 & -7 & -542 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 0 & 0 & 29 & 2610 \end{array}\right)$$

Ergebnis: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 60 \\ 88 \\ 90 \end{pmatrix}$

Es können 60 ME an W_1, 88 ME an W_2 und 90 ME an W_3 hergestellt werden.

Lehrbuch Seite 270

2 c)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \end{array} \quad :2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \quad \cdot(-3)\ +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \quad +\ :2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

Aus der 2. Zeile: $-4x_2 - 8x_3 = 1$

Wir wählen z. B. $x_3 = r$, $r \in \mathbb{R}$ (x_3 ist frei wählbar).

Durch Einsetzen berechnet man x_2 in

Abhängigkeit von r: $-4x_2 - 8r = 1$

$x_2 = -0{,}25 - 2r$

Einsetzen in $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ ergibt: $x_1 + 2 \cdot (-0{,}25 - 2r) + 3r = 0$

$x_1 = 0{,}5 + r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 + r \\ -0{,}25 - 2r \\ r \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

Lösungsmenge: $L = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 + r \\ -0{,}25 - 2r \\ r \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}\}$

Lehrbuch Seite 270

2 d)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 1 & 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 12 \end{array}\right) \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ \cdot(-2) \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ \cdot(-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 0 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} + \\ \cdot(-5) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 0 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

Aus der 2. Zeile: $5x_2 - 15x_3 = 5$

Wir wählen z. B. $x_3 = r$, $r \in \mathbb{R}$ (x_3 ist frei wählbar).

x_2 in Abhängigkeit von r: $5x_2 - 15r = 5$

$x_2 = 1 + 3r$

Einsetzen in $2x_1 + 5x_2 - x_3 = 25$ ergibt: $2x_1 + 5 \cdot (1 + 3r) - r = 25$

$x_1 = 10 - 7r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 - 7r \\ 1 + 3r \\ r \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

Lösungsmenge: $L = \{ \vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 - 7r \\ 1 + 3r \\ r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}\}$

Lehrbuch Seite 271

9 $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -9 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

$x_3 = r,\ r \in \mathbb{R}$ (frei wählbar): $x_2 + 3r = 2$

x_2 in Abhängigkeit von r: $x_2 = 2 - 3r$

x_1 berechnen: $2x_1 - (2 - 3r) + r = -2$

$x_1 = -2r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r \\ 2-3r \\ r \end{pmatrix}$

Vergleich der Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r \\ 2-3r \\ r \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen ergibt: $\begin{pmatrix} -2r \\ 2-3r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} r = 7{,}5 \\ r = 8 \\ r = 8 \end{array}$

Es gibt kein r, so dass alle drei Gleichungen erfüllt sind.

Der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist kein Lösungsvektor.

Gleichung: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$x_1 = -2r;\ x_2 = 2 - 3r;\ x_3 = r$: $-2r + 2 - 3r + r = 1$

$r = 0{,}25$

Lehrbuch Seite 280

1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

b) $2A - B = 2\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & -2 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 5 \\ -4 & 15 & 3 \\ 3 & -3 & 10 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & -0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -2{,}5 & 0{,}5 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1{,}5 & 0 & 5{,}5 \end{pmatrix}$

d) $3A - 4B = 3\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 6 \\ -6 & 15 & 9 \\ 0 & -3 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 0 & -20 & 12 \\ -12 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

$3A - 4B = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 10 \\ -6 & 35 & -3 \\ 12 & -7 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\vec{x} - \vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

f) $2\vec{x} + 3\vec{y} = 2\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 286

1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = (2 \;\; 3 \;\; -4)$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 5 \\ 15 & -6 & -28 \\ -17 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ Berechnung im Schema

b) $B \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$

c) $B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -2 & 10 \\ 5 & -14 & -2 \\ -6 & 18 & 21 \end{pmatrix}$ Berechnung im Schema

d) $(A + E) \cdot B = \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$(A + E) \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & -12 & 6 \\ 18 & -6 & -29 \\ -19 & 4 & 15 \end{pmatrix}$

e) $\frac{1}{20} \cdot A \cdot \vec{a} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0 \\ -0{,}45 \end{pmatrix}$

f) $\vec{b} \cdot A = (2 \;\; 3 \;\; -4) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} = (1 \;\; 20 \;\; -19)$

g) $\vec{b} \cdot B \cdot A = (2 \;\; 3 \;\; -4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} = (19 \;\; -16 \;\; -21) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{b} \cdot B \cdot A = (54 \;\; 16 \;\; 59)$

h) $\vec{b} \cdot \vec{a} = (2 \;\; 3 \;\; -4) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Lehrbuch Seite 287

15 a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 210 & 120 \\ 180 & 220 \\ 320 & 300 \end{pmatrix}$

Maschinenlaufzeiten der Automaten je Arbeitsperiode:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1600 & 1500 \\ 1640 & 1640 \\ 1390 & 1380 \end{pmatrix}$

Automat I braucht für die Produktion von 210 E_1, 180 E_2 und 320 E_3

in Periode I:

$210 \cdot 2 + 180 \cdot 3 + 320 \cdot 2 = 1600$ (Minuten)

In Periode I läuft Automat I 1600 Minuten, Automat II 1640 Minuten und

Automat III 1390 Minuten.

In Periode II läuft Automat I 1500 Minuten, Automat II 1640 Minuten und

Automat III 1380 Minuten.

b) Maschinenlaufzeit in Periode I: 4630 Minuten.

Maschinenlaufzeit in Periode II: 4520 Minuten.

Auslastung in Periode I: $\frac{4630}{7200} \cdot 100\% = 64{,}3\%$

Auslastung in Periode II: $\frac{4520}{6000} \cdot 100\% = 75{,}3\%$

Lehrbuch Seite 292

1 a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Berechnung der Inversen

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \cdot (-7)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad | : 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Berechnung der Inversen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot(-2) \quad \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \cdot(-4) \quad \cdot 4 \quad \cdot(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 8 & 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 24 & 0 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \cdot 3 \quad \cdot(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 24 & 0 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad | \cdot 6$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 24 & 0 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 24 & -6 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 \\ 7 & -3 & 2 \\ -6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Lehrbuch Seite 296

1 a) $X \cdot B = C$ | $\cdot B^{-1}$ von rechts

$X \cdot B \cdot B^{-1} = C \cdot B^{-1}$

$X \cdot E = C \cdot B^{-1}$

$X = C \cdot B^{-1}$

b) $A \cdot X + B = C$ | $- B$

$A \cdot X = C - B$ | $\cdot A^{-1}$ von links

$X = A^{-1} \cdot (C - B)$

c) $A \cdot X - A = X$ | $+ A$

$A \cdot X = X + A$ | $- X$

$A \cdot X - X = A$

$(A - E) \cdot X = A$ | $\cdot (A - E)^{-1}$ von links

$X = (A - E)^{-1} \cdot A$

d) $X \cdot A = E + A$ | $\cdot A^{-1}$ von rechts

$X = (E + A) \cdot A^{-1}$

$X = A^{-1} + E$

e) $A \cdot (E + X) = 4X$

$A + A \cdot X = 4X$ | $- AX$

$A = 4X - A \cdot X$

$A = (4E - A) \cdot X$ | $\cdot (4E - A)^{-1}$ von links

$X = (4E - A)^{-1} \cdot A$

f) $A + B \cdot X = A \cdot X - B$ | $- AX$

$A + B \cdot X - A \cdot X = - B$ | $- A$

$B \cdot X - A \cdot X = - B - A$

$(B - A) \cdot X = - (B + A)$ | $\cdot (B - A)^{-1}$ von links

$X = - (B - A)^{-1} \cdot (B + A)$

oder: $A \cdot X - B \cdot X = B + A$

$(A - B)X = A + B$

$X = (A - B)^{-1} (A + B)$

Lehrbuch Seite 296

9 Matrizengleichung $M \cdot X = N + X$

$M \cdot X - X = N$

Ausklammern von X: $(M - E) \cdot X = N$

$X = (M - E)^{-1} \cdot N$

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$M - E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$(M - E)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot(-5)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \end{array}\right) \quad |:(-1)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 307

2 A: Rohstoff-Steckteile-Matrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

B: Steckteile-Endprodukt-Matrix: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

C: Rohstoff-Endprodukt-Matrix:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 & 16 \\ 7 & 9 & 13 & 22 \\ 3 & 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Lehrbuch Seite 313

3 a) Für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C gilt: $A \cdot B = C$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 11 & 33 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}$$

Tabelle:

	M_1	M_2
R_1	7	15
R_2	11	33
R_3	8	22

b) Aus $B \cdot \vec{x} = \vec{z}$ folgt $B \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10500 \\ 7100 \\ 7400 \end{pmatrix}$

Es müssen 10500 ME S_1, 7100 ME S_2 und 7400 ME S_3 vorrätig sein.

c) Aus $A \cdot \vec{z} = \vec{r}$ folgt: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 660 \\ 1140 \\ r_3 \end{pmatrix}$

Ausmultiplizieren ergibt ein lineares Gleichungssystem:

$s_1 + 2s_2 + 2s_1 = 660$

$4s_1 + 3s_2 + 2s_1 = 1140$

$s_1 + 5s_2 + s_1 = r_3$

Vereinfacht: $3s_1 + 2s_2 = 660$ I)

$6s_1 + 3s_2 = 1140$ II)

$2s_1 + 5s_2 - r_3 = 0$ III)

Auflösung I) | ·2 – II) ergibt: $s_2 = 180$

Einsetzen z. B. in Gleichung I) ergibt $s_1 = 100$.

Einsetzen z. B. in Gleichung III) ergibt $r_3 = 1100$.

Das LGS ist eindeutig lösbar mit $s_1 = 100$; $s_2 = 180$; $r_3 = 1100$

Es müssen 100 ME S_1, 180 ME S_2 und 100 ME S_3 vorrätig sein.

Vom Rohstoff R_3 müssen 1100 ME bestellt werden.

Lehrbuch Seite 324

3 $A = A_{RB}$; $B = B_{BE}$; $C = C_{RE}$

a) $A \cdot B = C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

b) LGS: $B \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 42 \\ 51 \end{pmatrix}$ Auflösung ergibt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$

c) $C \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ t \\ t \end{pmatrix}$, dabei ist t jeweils der Rohstoffvorrat von R_2 und von R_3

$$(C \mid \vec{r}\,) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 100 \\ 9 & 3 & t \\ 5 & 5 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 100 \\ 0 & 15 & 900 - 4t \\ 0 & -5 & 500 - 4t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 100 \\ 0 & 15 & 900 - 4t \\ 0 & 0 & 2400 - 16t \end{array}\right)$$

Das LGS ist lösbar für $2400 - 16t = 0 \Leftrightarrow t = 150$.

Von R_2 und R_3 benötigt man 150 ME.

Lösung des LGS: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$

Dann müssen 20 ME E_2 und 10 ME E_1 produziert werden.

Alternative: LGS für die Unbekannten x_1, x_2 und y:

$4x_1 + 3x_2 = 100 \wedge 9x_1 + 3x_2 - y = 0 \wedge 5x_1 + 5x_2 - y = 0$

Lösung ergibt: $x_1 = 10$; $x_2 = 20$; $y = 150$

d) Variable Kosten: $K_v = (\vec{k}_R \cdot C + \vec{k}_B \cdot B + \vec{k}_E) \cdot \vec{x}$

$$= (13{,}7 \quad 10{,}9) \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} = 1230$$

Durchschnittliche variable Kosten in GE/ME: $\frac{1230}{100} = 12{,}30$

Lehrbuch Seite 341

3 a) Input-Output-Tabelle

	W_1	W_2	W_3	Konsum	Produktion
W_1	0	200	150	850	1200
W_2	480	0	300	220	1000
W_3	300	250	0	950	1500

b) Produktionsvektor $\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y} = (E - A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 850 \\ 330 \\ 950 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1230 \\ 1130 \\ 1540 \end{pmatrix}$

Produktionssteigerung bei W_1 von 1200 auf 1230, also um 2,5 %.

Produktionssteigerung bei W_2 von 1000 auf 1130, also um 13 %.

Produktionssteigerung bei W_3 von 1500 auf 1540, also um etwa 2,67 %.

Lehrbuch Seite 342

1 a) $x_1 = 120$; $x_{23} = 60$; $x_{33} = 0$; $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{7} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{7} & 0 \end{pmatrix}$

b) Input-Output-Tabelle

	A_1	A_2	A_3	Konsum	Produktion
A_1	15	38	30	67	150
A_2	45	19	60	9	133
A_3	15	57	0	18	90

c) $(E - A) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 1{,}5x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 3y_1 \\ 38 \end{pmatrix}$

LGS für x_1, x_3 und y_1:
$$\begin{aligned} \tfrac{33}{70}x_1 - \tfrac{1}{3}x_3 - y_1 &= 0 \\ \tfrac{69}{70}x_1 - \tfrac{2}{3}x_3 - 3y_1 &= 0 \\ -\tfrac{26}{35}x_1 + x_3 &= 38 \end{aligned}$$
hat die Lösung $x_1 = 70$, $x_3 = 90$, $y_1 = 3$.

Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 70 \\ 105 \\ 90 \end{pmatrix}$ und Konsumvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 38 \end{pmatrix}$

d) $(E - A) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 263 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ 65 - y_2 \end{pmatrix}$

LGS für x_1, x_3 und y_1:
$$\begin{aligned} \tfrac{9}{10}x_1 + \tfrac{1}{21}x_2 &= \tfrac{263}{3} \\ -\tfrac{3}{10}x_1 + \tfrac{32}{21}x_2 - y_2 &= \tfrac{526}{3} \\ -\tfrac{1}{10}x_1 - \tfrac{10}{7}x_2 + y_2 &= -198 \end{aligned}$$
hat die Lösung $x_1 = 90$, $x_2 = 140$, $y_2 = 54$.

Produktionsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 90 \\ 140 \\ 123 \end{pmatrix}$; Konsumvektor: $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 54 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 354

2 In einem Zeitabschnitt findet folgendes Wechselverhalten statt:

25 % der Teilchen im Energiezustand I bleiben im Energiezustand I; 25 % der Teilchen wechseln in den Energiezustand II; 50 % der Teilchen wechseln in den Energiezustand III;

100 % der Teilchen im Energiezustand II wechseln in den Energiezustand III

25 % der Teilchen im Energiezustand III bleiben im Energiezustand III; 25 % der Teilchen wechseln in den Energiezustand I; 50 % wechseln in den Energiezustand II.

Lehrbuch Seite 355

3 $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

Startvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ oder auch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}333 \\ 0{,}500 \\ 0{,}167 \end{pmatrix}$

Stimmverteilung: $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}333 \\ 0{,}450 \\ 0{,}217 \end{pmatrix}$

Erwartete Stimmverteilung nach der nächsten Wahl :

33,3 % P1, 45 % P2 und 21,7 % P3

Lehrbuch Seite 361

3 a) Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,2 \\ 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0,8 \end{pmatrix}$

b) Anfangsverteilung $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 500 \\ 250 \\ 250 \end{pmatrix}$

Bedingung für die Verteilung der Vorwoche: $A \cdot \vec{x}_{-1} = \vec{x}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}_{-1} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Verteilung der 1. Folgewoche: $A\vec{x}_0 = \vec{x}_1 \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 362,5 \\ 250 \\ 387,5 \end{pmatrix}$

In der Folgewoche hat die Waschanlage W1 voraussichtlich etwa 363 Kunden,

W2 250 Kunden und W3 etwa 387 Kunden.

(Gesamtzahl: 1000 Kunden)

c) Stabile Verteilung $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$

ergibt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,296 \\ 0,148 \\ 0,556 \end{pmatrix}$ und damit die Grenzmatrix $G = \begin{pmatrix} 0,296 & 0,296 & 0,296 \\ 0,148 & 0,148 & 0,148 \\ 0,556 & 0,556 & 0,556 \end{pmatrix}$

Langfristige Verteilung $G \begin{pmatrix} 500 \\ 250 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 296 \\ 148 \\ 556 \end{pmatrix}$

oder $G \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 296 \\ 148 \\ 556 \end{pmatrix}$

Langfristig waschen etwa 296 Autofahrer ihr Fahrzeug in der Anlage W1,

148 in W2 und 556 in W3.

Dies ist unabhängig von der Anfangsverteilung.

Lehrbuch Seite 379

3 Es werden x freistehende Einfamilienhäuser und y Reihenhäuser gebaut.

Nichtnegativitätsbedingungen: $x \geq 0$; $y \geq 0$

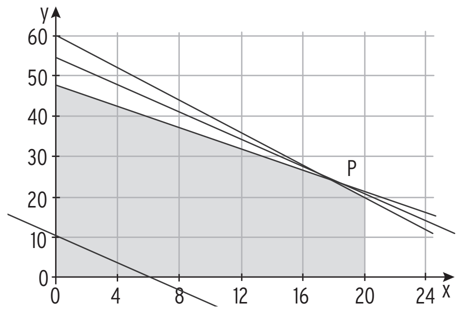
Restriktionen:

$500x + 250y \leq 15000 \Leftrightarrow y \leq 60 - 2x$

$x \leq 20$

$240000x + 180000y \leq 8640000$

$\Leftrightarrow y \leq 48 - \frac{4}{3}x$



a) Zielfunktion: $Z = 50000x + 30000y \Leftrightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{Z}{30000}$

Der Gewinn Z wird maximal für x = 18 und y = 24 (vgl. P).

Größter Gewinn: $Z = 50000 \cdot 18 + 30000 \cdot 24 = 1620000$

b) Zielfunktion:

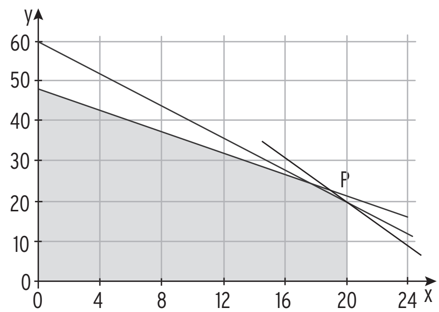
$Z = 50000x + 20000y$

$\Leftrightarrow y = -2{,}5x + \frac{Z}{20000}$

Der Gewinn Z wird maximal für x = 20 und y = 20.

Größter Gewinn:

$Z = 50000 \cdot 20 + 20000 \cdot 20 = 1400000$



Lehrbuch Seite 395

3 Es werden x ME von Produkt I und y ME von Produkt II hergestellt.

Schlupfvariable: u, v, w

Nichtnegativität: $x, y, u, v, w \geq 0$

Gleichungssystem:

$2x + 10y + u = 70$

$6x + 6y + v = 66$

$10x + 5y + w = 90$

Zielfunktion: $Z = 15x + 10y$

Z soll maximiert werden,

d.h. der Gewinn soll maximiert werden.

x	y	u	v	w	b	EB
2	10	1	0	0	70	70 : 2 = 35
6	6	0	1	0	66	66 : 6 = 11
10	5	0	0	1	90	90 : 10 = 9
15	10	0	0	0	Z	
0	−45	−5	0	1	−260	5,7...
0	**−15**	0	−5	3	−60	4
10	5	0	0	1	90	18
0	5	0	0	−3	2Z − 270	
0	0	−5	15	-8	−80	
0	−15	0	−5	3	−60	
30	0	0	−5	6	210	
0	0	0	−5	−6	6Z − 870	

Ergebnis: $v = w = 0; u = 16$

$30x = 210 \Leftrightarrow x = 7$

$-15y = -60 \Leftrightarrow y = 4$

$6Z - 870 = 0 \Leftrightarrow Z = 145$

Es werden 7 ME von Produkt I und 4 ME von Produkt II hergestellt.

Der maximale Gewinn beträgt dann 145 GE.

Lehrbuch Seite 396

5 x_1: Mischung M_1 in ME; x_2: Mischung M_2 in ME; x_3: Mischung M_3 in ME

Zielfunktion $Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$; Z wird maximiert

Nichtnegativität: $x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Nebenbedingungen:
$$3x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 3150$$
$$4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 2710$$
$$6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 3000$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 2275$$

Ausgangstableau

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b
3	**6**	1	1	0	0	0	3150
4	4	2	0	1	0	0	2710
6	3	4	0	0	1	0	3000
2	3	4	0	0	0	1	2275
3	5	4	0	0	0	0	Z

1. Tableau

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b
3	6	1	1	0	0	0	3150
6	0	4	− 2	3	0	0	1830
9	0	7	− 1	0	2	0	2850
1	0	7	− 1	0	0	2	1400
3	0	19	− 5	0	0	0	6Z − 15750

Zwischenlösung:

$x_1 = 0$; $x_2 = 525$; $x_3 = 0$; $s_1 = 0$

$6Z - 15750 = 0 \Leftrightarrow Z = 2625$

Interpretation:

Durch Aufnahme der Mischung M_2 in den Verkauf kann der Erlös auf 2626 GE erhöht werden. Da in der Zielfunktionszeile weitere positive Werte vorhanden sind, ist der Erlös noch zu steigern.

Aufnahme von M_3, da $\frac{19}{6}$ den höchsten Zielfunktionsbeitrag liefert.

Der Engpass ist durch Zeile 4 bestimmt: $x_3 = 700 : \frac{7}{2} = 200$