Ott
Lengersdorf

Abitur 2023 | *Leistungskurs*

Aufgabensammlung zur zentralen Abiturprüfung
Mathematik am Berufskolleg – Berufliches Gymnasium
– Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung –

Nordrhein-Westfalen

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Oberstudienrat

Norbert Lengersdorf

Oberstudienrat am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

* * * * *

15. Auflage 2022

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0447-15
ISBN 978-3-8120-1094-8

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält nur auf die neue Prüfungsordnung für das Berufskolleg in Nordrhein-Westfalen abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur 2023 im Fach Mathematik an beruflichen Gymnasien im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung.

Die Aufgaben behandeln nur Themen, die in den Abiturvorgaben 2023 für den Leistungskurs Mathematik, Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung, aufgeführt sind.

Die zentrale Abiturprüfung 2023 besteht aus zwei Teilen, einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil A und einem Prüfungsteil B mit Hilfsmittel (GTR bzw. CAS)

Die Aufgaben für den Leistungskurs sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten: Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra.

Durch die Vorgaben für die schriftliche Abiturprüfung 2023 werden inhaltliche Schwerpunkte festgelegt.

Die **Analysis** behandelt im Abitur 2023 als Schwerpunkt ganzrationale Funktionen und Exponentialfunktionen und die Modellierung von berufsbezogenen Anwendungen mithilfe dieser Funktionstypen: Marktpreistheorie, Konsumenten- und Produzentenrente, Modelle der vollständigen Konkurrenz und des Monopols, Absatz- und Umsatzentwicklung.

Die **Lineare Algebra** hat die Schwerpunkte Lineare Gleichungssysteme und stochastische Matrizen. Innerbetriebliche Verflechtungen, mehrstufige Produktionsprozesse und logistische Zusammenhänge werden als Anwendungen behandelt.

Schwerpunkt in der **Stochastik** ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, die Binomialverteilung und ökonomische Anwendungen wie die Preiskalkulation.

Die Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.

Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben. An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung 2023

Leistungskurs

Aufgaben-teil	Aufgabentyp	Aufgaben-zahl	Dauer	Punkte
Teil A	Der Aufgabenteil A besteht aus einer Aufgabe mit vier Teilaufgaben, zwei zur Analysis und je eine zur Linearen Algebra und Stochastik. Mindestens zwei der Teilaufgaben sind mit Anwendungsbezug.	1	max. 60 Minuten	24
Teil B	Der Aufgabensatz B umfasst eine Aufgabe zur Analysis, eine Aufgabe zur Linearen Algebra und eine Aufgabe zur Stochastik . Die Aufgabenstellung des Aufgabenteils B ist entweder zur Lösung mit grafik-fähigen Taschenrechnern (GTR) oder mit einem Computeralgebrasystem (CAS) konzipiert.	3	min. 210 Minuten	96
	Darstellungsleistung Teil A und B			5
Summe		4	270 Minuten	125

Die Aufgaben sowohl im Teil A als auch im Teil B bestehen jeweils aus Teilaufgaben.

Organisation

Zu Beginn der Bearbeitungszeit erhalten die Prüflinge die beiden zu bearbeitenden Aufgabenteile A und B. Die zugelassenen Hilfsmittel (GTR oder CAS; Formelsammlung) werden noch nicht ausgegeben.
Die Prüflinge geben individuell nach Bearbeitung, jedoch nach spätestens 60 Minuten der Bearbeitungszeit, ihre Ausarbeitungen zum Aufgabenteil A ab und erhalten im Gegenzug Zugang zu den zugelassenen Hilfsmitteln (GTR oder CAS; Formelsammlung).
Die Gesamtbearbeitungszeit für beide Prüfungsteile beträgt im Leistungskurs 270 Minuten.
Für Prüflinge, die die Aufgaben und die Lösungen des Prüfungsteils A vorzeitig abgeben, verlängert sich entsprechend die Bearbeitungszeit für den Prüfungsteil B.
Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist in beiden Prüfungsteilen der Klausur zugelassen.

Operatoren und Dokumentation von Lösungen

1 Allgemeine Bemerkungen zu den Aufgabenstellungen

Der Prüfling wird nicht zur Nutzung einer bestimmten Technologie aufgefordert, da das Erkennen der Sinnhaftigkeit des Einsatzes des Taschenrechners eine selbstständige Leistung ist. Die Vorgehensweise und Darstellung der Lösung muss unabhängig von der gewählten Technik nachvollziehbar dokumentiert werden. Der Schüler hat zu verdeutlichen, wie er mit welchen Eingaben mit der genutzten Technik zu welchen Ergebnissen gelangt ist. Die Dokumentation erfolgt immer mit mathematischen Regeln unter Nutzung der Fachsprache.

2 Beispiele zu einigen der häufig genutzten Operatoren

2.1

Operator	Beschreibung
Angeben, Nennen	Objekte, Sachverhalte, Begriffe, Daten ohne nähere Erläuterungen bzw. Begründungen und ohne Darstellung von Lösungsansätzen oder Lösungswegen aufzählen

Erläuterungen: Der Prozess der Ergebnisermittlung bleibt gegebenenfalls im Dunkeln- somit auch die Wahl des Hilfsmittels. „Angeben /Nennen“ erfordert Einsicht in den Sachzusammenhang oder den mathematischen Zusammenhang.

Beispiel: …und geben Sie eine mögliche Kostenfunktion an.

(Abitur 2017 LK CAS, Analysis 2.1.3)

Erwartungshorizont:

Kostenfunktion z.B. mit c = 12: $K(x) = \frac{1}{400}x^3 - \frac{1}{15}x^2 + 12x + 200$

2.2

Operator	Beschreibung
Erläutern	Strukturen und Zusammenhänge erfassen, in Einzelheiten verdeutlichen und durch zusätzliche Informationen verständlich machen

Erläuterungen: Beispielsweise kann zur Problemlösung ein Sachzusammenhang durch zusätzlich hergeleitete Informationen mit eigenen Worten dargelegt werden oder aber auch ein Vorgehen verständlich beschrieben werden.

Beispiel:

Erläutern Sie anhand der kurzfristigen und der langfristigen Preisuntergrenze, ob die Rasolux GmbH einen Preis von 700GE/ME unterbieten kann.

(Abitur 2017 GK Analysis 2.2.1)

Erwartungshorizont:

kPUG: Minimierung der variablen Stückkosten $k_v(x) = 10x^2 - 240x + 1920$

Notwendige und hinreichende Bedingung bei quadratischen Funktionen mit positivem Leitkoeffizient: $k'_v(x) = 0$ $\quad 20x - 240 = 0 \Leftrightarrow x = 12$ $\quad$ kPUG: $k_v(12) = 480$ (GE/ME)

LPUG: Minimierung der Stückkosten $k(x) = 10x^2 - 240x + 1920 + \frac{7840}{x}$

Darstellung des Graphen im Intervall von 0 bis 20 liefert den Tiefpunkt (14 | 1080)

LPUG 1080 GE/ME. Ein Preis von 700GE/ME kann kurzfristig, aber nicht langfristig unterschritten werden.

2.3

Operator	Beschreibung
Berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen

Erläuterungen: Der Ansatz, der auf der symbolischen Ebenen zur Lösung führt, ist zu dokumentieren. Der sich anschließende Lösungsweg muss unter Beibehaltung mathematischer Regeln nachvollziehbar dargestellt werden. Wenn ein GTR/CAS für einen Lösungsschritt verwendet wird, ist der Ansatz und der logische Schritt zu dokumentieren.

Beispiel: Berechnen Sie den maximalen Gewinn (Abitur 2017 LK GTR, Analysis 2.2.1.2)

Erwartungshorizont

Gewinnmaximum: $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$

Ableitungen: $G'(x) = -3x^2 + 12x - 1{,}25$; $G''(x) = -6x + 12$

Notwendige Bedingung: $G'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 3{,}89 \vee x_2 = 0{,}11$

Mit $G''(3{,}89) < 0$ und $G(3{,}89) = 23{,}32$ gilt:

Bei einer Produktion von 3,89 ME wird der maximale Gewinn von 23,32 GE erzielt.

2.4

Operator	Beschreibung
Bestimmen, Ermitteln	Zusammenhänge bzw. Lösungswege finden und die Ergebnisse formulieren.

Erläuterungen: Die Wahl der Mittel (z.B. ob graphisch oder numerisch) bleibt offen. Durch Spezifizierung wie „Ermitteln Sie graphisch" oder „Bestimmen Sie rechnerisch" würde die Verwendung der Werkzeugebene des GTR bzw. CAS beschränkt.

Beim graphischen ermitteln von Lösungen kann dies durch Anfertigung einer Zeichnung auf Papier oder durch Darlegung der Lösungsschritte beim graphischen Lösen mit GTR bzw. CAS erfolgen.

Beispiel: Gehen Sie davon aus, dass gilt: $a = \frac{1}{225}c - \frac{23}{450}$ und $b = -30a$

Ermitteln Sie den Bereich, in dem der Parameter c liegen muss, damit K eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion ist … . (Abitur 2017 LK CAS, Analysis 2.1.3)

Erwartungshorizont

Mit $b^2 \leq 3 \cdot a \cdot c$ ist folgende Ungleichung zu lösen: $(\frac{23}{15} - \frac{2}{15}c)^2 \leq 3(\frac{1}{225}c - \frac{23}{450}) \cdot c$

Lösung mit CAS: $11{,}5 \leq c \leq 46$

(Die Erläuterungen zu den Operatoren sind der Rückkopplungsveranstaltung zum Zentralabitur 2017 entnommen, Qualitäts-und Unterstützungs-Agentur-Landesinstitut für Schule NRW)

Operatorenliste

Operator	Erläuterung
erläutern	Strukturen und Zusammenhänge erfassen, in Einzelheiten verdeutlichen und durch zusätzliche Informationen verständlich machen
skizzieren, graphisch darstellen	wesentliche Eigenschaften von Sachverhaltenoder Objekten graphisch darstel-len – auch Freihandskizzen möglich
untersuchen	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien bearbeiten
vergleichen	Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln
begründen	Sachverhalte auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen – hierbei sind Regeln und mathematische Beziehungen zu nutzen
bestimmen,ermitteln	Zusammenhänge bzw. Lösungswege finden und die Ergebnisse formulieren
beurteilen, Stellung nehmen	zu einem Sachverhalt ein eigenständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren und begründen
herleiten, formulieren	eine Formel oder einen Zusammenhang aus bekannten Sachverhalten nachvollziehbar entwickeln
klassifizieren	eine Menge von Objekten nach vorgegebenen oder sinnvoll selbstständig zu wählenden Kriterien in Klassen einteilen
zeigen	Aussagen oder Sachverhalte unter Nutzung von gültigen Schlussregeln, Berechnungen bestätigen
beschreiben	Strukturen, Sachverhalte, Verfahren unter Verwendung der Fachsprache angemessen wiedergeben
bestätigen	Aussagen oder Sachverhalte mathematisch verifizieren
dokumentieren, darstellen	Gedankengang bzw. Herleitung der Problemlösung darlegen
veranschaulichen, verdeutlichen	einen Sachverhalt mit verbalen oder graphischen Erläuterungen versehen
angeben, nennen	Objekte, Sachverhalte, Begriffe, Daten ohne nähere Erläuterungen, Begrün dungen und ohne Darstellung von Lösungsansätzen oder Lösungswegen aufzählen
berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen
zeichnen	hinreichend exakte graphische Darstellungen von Objekten oder Daten anfertigen
beweisen, widerlegen, nachweisen	Beweise im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischen Schlüssen und Äquivalenzumformungen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen und Analogien, führen
vereinfachen, umformen	Terme, Aussagen, Formeln mittels geeigneter Strategien an den jeweiligen Sachverhalt anpassen

I Hilfsmittelfreier Teil der zentralen Abiturprüfung

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung – Analysis

Dieser Teil der Abiturprüfung enthält 4 Aufgaben entsprechend den Abiturvorgaben, davon mindestens zwei mit Anwendungsbezug.

Analysis **Lösungen Seite 22**

Punkte

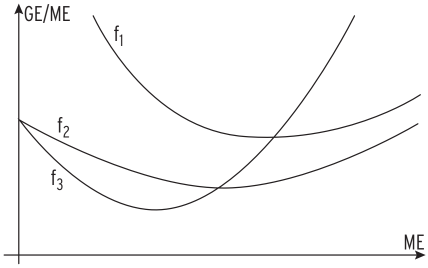
Aufgabe 1

Zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a, c, d > 0$, $b < 0$,

x in ME, K(x) in GE,

sind in der nebenstehenden Abbildung die Graphen der Grenzkostenfunktion, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion dargestellt.

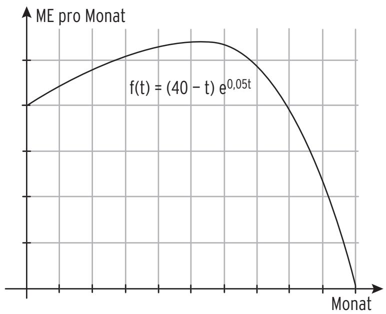


1.1 Ordnen Sie dem jeweiligen Graphen die entsprechende ökonomische Funktion begründet zu. 3

1.2 Beweisen Sie, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge bei $x = -\frac{b}{2a}$ liegt. 3

Aufgabe 2

Die monatlichen Absatzzahlen eines Produkts werden mit $f(t) = (40 - t)e^{0,05t}$, (t in Monaten, f(t) in ME/Monat) modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem das Produkt auf dem Markt abgesetzt werden kann. 2

2.2 Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei t = 20 liegt. 4

($f''(t) = -\frac{1}{400}\, t\, e^{0,05t}$ kann verwendet werden.)

Analysis

Aufgabe 3

Lösungen Seite 23

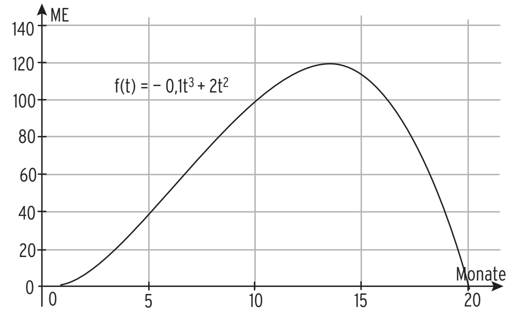
Punkt

Die monatlichen Absatzzahlen eines neuartigen Produkts werden mit

$f(t) = -\frac{1}{10}t^3 + 2t^2$

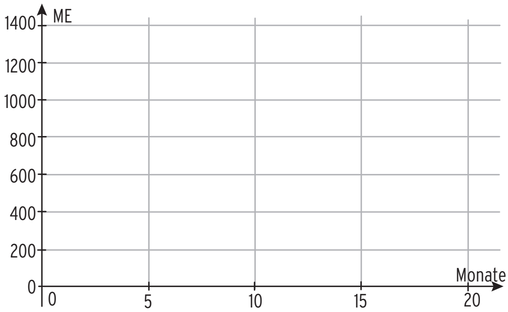
(t in Monaten, f(t) in ME/Monat)

modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



3.1 Bestimmen Sie die in den ersten 20 Monaten insgesamt abgesetzte Menge. 3 Punkte

3.2 Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem den Graphen der Funktion, die den Gesamtabsatz in Abhängigkeit von der Zeit angibt. 3

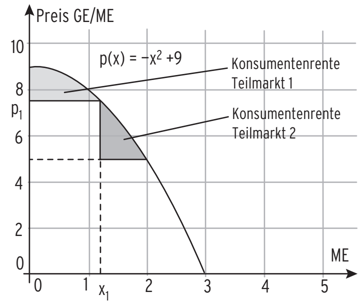


Aufgabe 4

Die Preisentwicklung eines Produkts entspricht der Nachfragefunktion p mit

$p(x) = -x^2 + 9$; x in ME, p(x) in GE/ME.

Das Produkt wird auf dem Teilmarkt 1 für p_1 GE/ME und auf dem Teilmarkt 2 für 5 GE/ME verkauft. Es werden insgesamt 2 ME abgesetzt (vgl. nebenstehende Abbildung).



4.1 Beschreiben Sie den Einfluss der Höhe des Preises p_1 auf die Konsumentenrente des jeweiligen Teilmarkts. 2

4.2 Weisen Sie nach, dass die gesamte Konsumentenrente optimal abgeschöpft wird, wenn $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ (ME) ist. 4

Analysis

Aufgabe 5

Lösungen Seite 24

Punkte

Die folgende Tabelle gibt die Stückkosten k, die variablen Stückkosten k_V und die Grenzkosten K′ zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K an (x in ME; K(x) in GE):

x	1	2	3	4	5	6	7	8
k(x)	201,0	124,0	97,0	84,0	77,8	76,0	77,6	82,0
$k_V(x)$	57,0	52,0	49,0	48,0	49,0	52,0	57,0	64,0
K′(x)	51,0	44,0	43,0	48,0	59,0	76,0	99,0	128,0

Beurteilen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen allein unter Zuhilfenahme der Tabellenwerte:

1.1 Das Betriebsminimum liegt bei 4 ME. 2

1.2 Die Kosten steigen zwischen 0 und 4 ME degressiv. 2

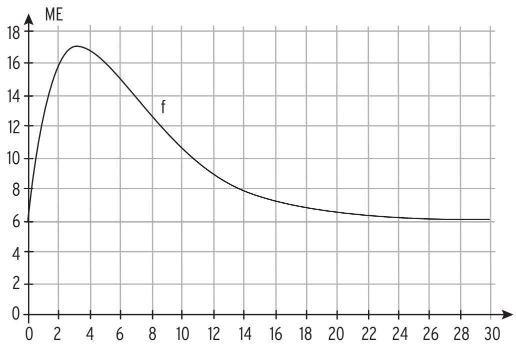
1.3 Die Fixkosten belaufen sich auf 144 GE. 2

Aufgabe 6

Die Absatzentwicklung eines Produktes wird durch die folgende Funktion beschrieben:

$f(t) = 9t \cdot e^{-0{,}3t} + 6$

dabei steht $t > 0$ für die Monate und f(t) für den Absatz in ME pro Monat.



1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die monatlichen Absatzzahlen maximal werden (notwendiges Kriterium genügt). 4

2 Nehmen Sie mit Hilfe des Graphen Stellung zu der folgenden Aussage:
In der zweiten Hälfte des ersten Jahres liegt der Zeitpunkt des maximalen Absatzrückganges. 2

Analysis

Aufgabe 7

Lösungen Seite 24/25

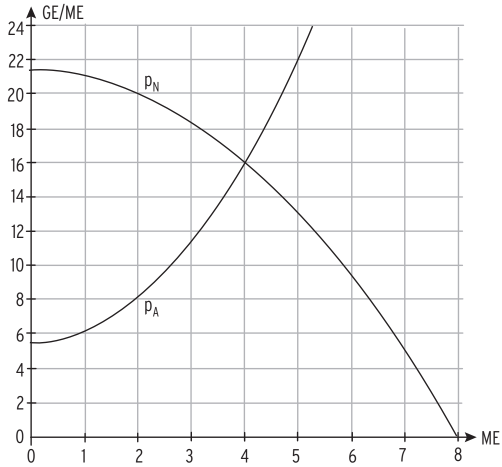
Punkte

Gegeben sind folgende Angebotsfunktion p_A und Nachfragefunktion p_A:

$p_A(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3}$

$p_N(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3}$

x in ME, p(x) in GE/ME

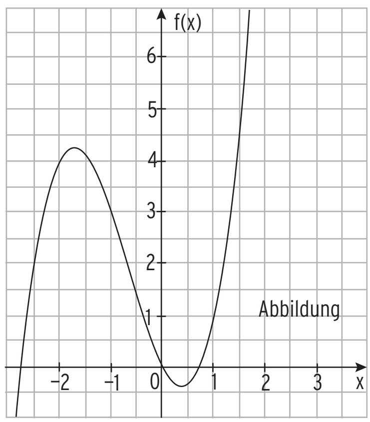


1 Berechnen Sie das Marktgleichgewicht. 4

2 Begründen Sie anhand der Graphen, dass die Konsumentenrente geringer ist als die Produzentenrente. 2

Aufgabe 8

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x$. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f.



1 Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion f.

2 Entscheiden Sie begründet mit Hilfe einer Zeichnung in der Abbildung, ob die Gerade g mit $y = \frac{1}{2}x + 5$ eine Tangente am Graphen von f im Punkt P (− 2 | 4) ist. 6

Lösungen - Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung – Analysis

Hilfsmittelfreier Teil der Zentralen Abiturprüfung

Aufgabe 1 (Aufgaben Seite 12)

1.1 Der Graph der Grenzkostenfunktion schneidet den Graphen der variablen Stückkostenfunktion im Betriebsminimum, den der Stückkostenfunktion im Betriebsoptimum. Also gehört f_3 zur Grenzkostenfunktion. Die kurzfristige Preisuntergrenze ist geringer als die langfristige Preisuntergrenze, so dass f_2 der variablen Stückkostenfunktion und f_1 der Stückkostenfunktion zugeordnet werden kann.

1.2 Minimum der variablen Stückkosten:

$k_v(x) = a\,x^2 + bx + c$; $k_v'(x) = 2ax + b$

Notwendig und hinreichend bei ertragsgesetzlicher Kostenfunktion:

$k_v'(x) = 0$ $\qquad$ $2ax + b = 0$

$x = -\frac{b}{2a}$; da $a > 0$ $\qquad$ Minimalstelle

Aufgabe 2

2.1 Nullstellenbetrachtung

$f(t) = 0$ $\qquad$ $(40 - t)e^{0,05t} = 0$

da $e^{0,05t} \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $t = 40$

Nach 40 Monaten verschwindet das Produkt vom Markt.

2.2 Extremwertbetrachtung: Notwendige Bedingung $f'(t) = 0$

$f'(t) = 0,05(40 - t)e^{0,05t} - e^{0,05t} = e^{0,05t}\,(0,05(40 - t) - 1)$

(Produkt- und Kettenregel)

$f'(t) = 0$ $\qquad$ $0,05(40 - t) - 1 = 0$

$1 - 0,05t = 0$

$t = 20$

Dazu hinreichend für Maximum ($f''(20) = -\frac{1}{400} \cdot 20 \cdot e^1 = -\frac{e}{20} < 0$

Alternativ: $f'(20) = e^{0,05 \cdot 20}\,(0,05(40 - 20) - 1) = e^1 \cdot 0 = 0$

Lösungen - Analysis

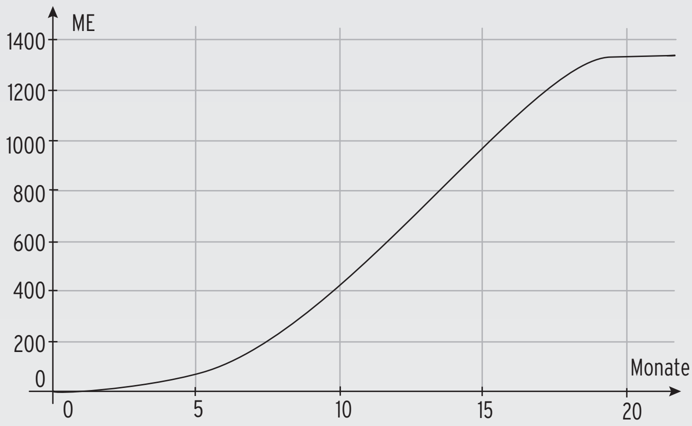
Aufgabe 3

(Aufgaben Seite 13)

3.1 Die gesamte Absatzmenge der ersten 20 Monate wird mit dem Integral berechnet.

$$\int_0^{20} f(t)dt = \int_0^{20} \left(-\frac{1}{10}t^3 + 2t^2\right)dt = \left[-\frac{1}{40}t^4 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^{20} = -4000 + \frac{16000}{3} \approx 1333{,}3 \text{ (ME)}$$

3.2



Aufgabe 4

4.1 Bei Erhöhung des Preises p_1 wird die Konsumentenrente im Teilmarkt 1 geringer und gleichzeitig die des Teilmarkts 2 höher. Bei Verringerung des Preises verhält es sich umgekehrt.
(Bei einem Preis p_1 von 9 GE/ME erlischt der Teilmarkt 1, bei einem Preis p_1 von 5 GE/ME erlischt der Teilmarkt 2.)

4.2 Damit die Konsumentenrente höchstmöglich abgeschöpft wird, muss der Preis p_1 so gewählt werden, dass der Flächeninhalt des Rechtecks unter dem Flächenstück zur Konsumentenrente Teilmarkt 1 möglichst groß wird (dadurch wird die Konsumentenrente möglichst klein).

$A(x) = x \cdot f(x) - 5x = -x^3 + 9x - 5x = -x^3 + 4x$

Extremwertbetrachtung: $A'(x) = 0$ $\quad -3x^2 + 4 = 0$

$x^2 = \frac{4}{3}$

Mit $x > 0$: $\quad x = \sqrt{\frac{4}{3}}$

Dazu hinreichend: $A''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -6\sqrt{\frac{4}{3}} < 0$

Lösungen - Analysis

Aufgabe 5

(Aufgaben Seite 14)

1.1 Die variablen Stückkosten und die Grenzkosten sind im Betriebsminimum gleich, also ist aus der Tabelle abzulesen: $x_{BM} = 4$. Die Aussage ist also wahr.

1.2 Die Grenzkostenfunktion K′ gibt den Kostenzuwachs an. Dieser nimmt nur bis 3 ME ab (degressiver Zuwachs), danach wieder zu (progressiver Zuwachs). Daher ist die Aussage falsch.

1.3 Die Stückkostenfunktion und die variable Stückkostenfunktion unterscheiden sich nur durch den Term $\frac{K_{fix}}{x}$.

Daher gilt: $K_{fix} = k(1) - k_v(1) = 201 - 57 = 144$.

Die Aussage ist also wahr.

Aufgabe 6

1 $f(t) = 9t \cdot e^{-0,3t} + 6$; $f'(t) = 9 \cdot e^{-0,3t} + (-0,3) \cdot 9t \cdot e^{-0,3t} = 9 \cdot e^{-0,3t}(1 - 0,3t)$

(mit Produkt und Kettenregel)

Notwendige Bedingung: $f'(t) = 0$ $\quad 9(1 - 0,3t) = 0 \quad (e^{-0,3t} \neq 0)$

$$-0,3t + 1 = 0$$

$$t = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$$

Der maximale Absatz wird im 4. Monat erreicht.

2 Der stärkste Absatzrückgang entspricht dem Wendepunkt mit re/li-Krümmungswechsel.

Dieser liegt laut Graph bei ungefähr (8 | 12,5). Die Aussage ist also wahr.

Aufgabe 7

(Aufgaben Seite 15)

1 Schnittpunkt von Angebots- und Nachfragefunktion:

$p_A(x) = p_N(x)$ $\quad \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3}$

$$x^2 = 16 \quad \Leftrightarrow x = \pm 4$$

Da negative Produktionswerte ökonomisch sinnlos sind, liegt die Gleichgewichtsmenge bei 4 ME. Der Gleichgewichtspreis liegt bei 16 GE/ME: $\quad p_A(4) = p_N(4) = 16$

Die Abbildung bestätigt das Ergebnis.

2 Der Inhalt der zwischen dem Graphen von p_N und $y = 16$ eingeschlossenen Fläche stellt den Geldwert der Konsumentenrente dar, der Flächeninhalt zwischen $y = 16$ und dem Graphen von p_A den Geldwert der Produzentenrente. Die Fläche der Konsumentenrente ist kleiner als die Fläche der Produzentenrente, somit ist die Konsumentenrente geringer als die Produzentenrente.

Lösungen - Analysis

Aufgabe 8

(Aufgaben Seite 15)

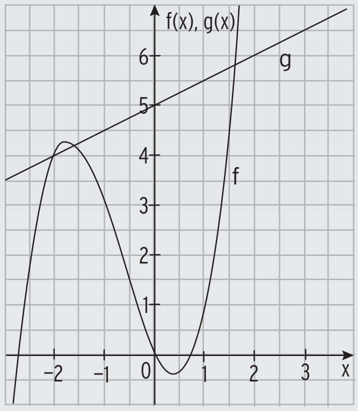
1 Nullstellen: $f(x) = 0$ $x^3 + 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 2) = 0$

Also $x_1 = 0$. Zusätzlich: $x^2 + 2x - 2 = 0$

$x_{2|3} = -1 \pm \sqrt{1+2}$

Die drei Nullstellen sind $x_1 = 0$, $x_{2|3} = -1 \pm \sqrt{3}$.

2 Einzeichnen der Geraden g (siehe Abbildung rechts). Man sieht deutlich, dass g den Graphen von f im Punkt P (− 2 | 4) nicht berührt, sondern schneidet. Daher kann g keine Tangente am Graphen von f im Punkt P sein.



Aufgabe 9

(Aufgaben Seite 16)

(1) Es gilt: $f'(x) = 3x^2 + 6x$. Das Vorzeichen des Koeffizienten vor x^2 entscheidet, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist. Weil $3 > 0$ gilt, ist die Parabel nach oben geöffnet.

Oder: Die Parabel von f' besitzt die Nullstellen $x = -2$ und $x = 0$, denn sie sind die lokalen Extremstellen von f. Nur dazwischen fällt der Graph von f, also liegt die Parabel von f' für $-2 < x < 0$ unterhalb der x-Achse. Die Parabel muss also nach oben geöffnet sein.

(2) $c = -3$ oder $c = 1$. Damit es genau zwei Nullstellen gibt, muss der Graph von g_c die x-Achse im Hochpunkt oder im Tiefpunkt berühren. Somit muss entweder der Graph von f (Hochpunkt H(− 2 | 3)) um drei Einheiten nach unten oder um eine Einheit nach oben (Tiefpunkt T(0| − 1)) verschoben werden.

Aufgabe 10

(1) Am Graphen ist erkennbar, dass $x = 2$ die vermutliche Nullstelle ist.

Zum rechnerischen Nachweis: Setze $x = 2$ in $f(x)$ ein.

Wegen $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^3 - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$ ist $x = 2$ eine Nullstelle von f.

(2) Je größer a wird, desto weiter wird der entsprechende Graph der Funktion f nach links verschoben. Damit $x = -1$ eine Nullstelle wird, muss der Graph von f um drei Einheiten nach links verschoben werden, also muss $a = 3$ gelten.

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung – Stochastik

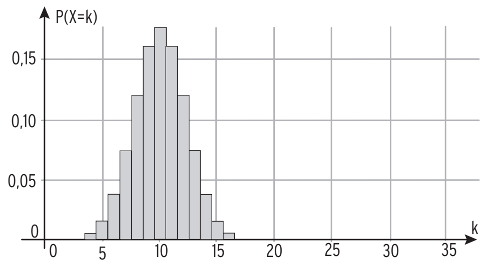
Hilfsmittelfreier Teil der Zentralen Abiturprüfung

Stochastik **Lösungen Seite 54**
Punkte

Aufgabe 1

Bei der Produktion eines Elektrobauteils kommt es bei durchschnittlich 20 % der Bauteile zu statischen Aufladungen, die Probleme beim weiteren Verarbeitungsprozess bewirken können.

X ist die binomialverteilte Zufallsgröße, die die Anzahl problematischer Elektrobauteile bei einer Tagesproduktion von 50 Bauteilen angibt.



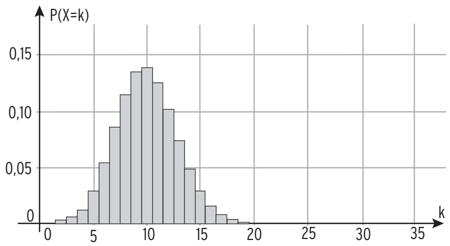


Abb. 2

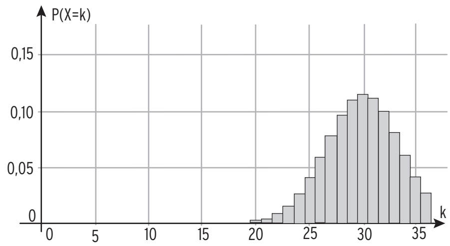


Abb. 3

1.1 Prüfen Sie, welche der obigen Abbildungen die zu X gehörige Verteilung ist. 2

1.2 Bestimmen Sie mit der von Ihnen ausgewählten Graphik näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl statisch aufgeladener Elektroteile um weniger als zwei vom Erwartungswert E(X) abweicht. 4

Aufgabe 2

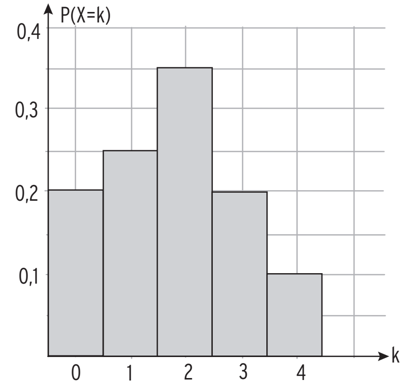
2.1 Ein Unternehmen, das Leuchtmittel an zwei Standorten A und B herstellt, prüft deren Lebensdauer. Die ZufallsgrößeX gibt für ein Leuchtmittel von Standort A die Lebensdauer in Stunden an, Y die für ein Leuchtmittel aus B. Es gilt $E(X) = E(Y)$ und $\sigma(X) < \sigma(Y)$ Erklären Sie, was diese Beziehungen für die Verteilung der Lebensdauer eines Leuchtmittels bedeuten. 3

2.2 Die Zufallsgröße Z nimmt genau die Zahlenwerte 0, 1, 2, 3, 4 mit positiven Wahrscheinlichkeiten an. Entwickeln Sie für Z eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, so dass der Erwartungswert von Z zwischen 0 und 1 liegt. 3

Stochastik Lösungen Seite 54/55

Punkte

Aufgabe 3



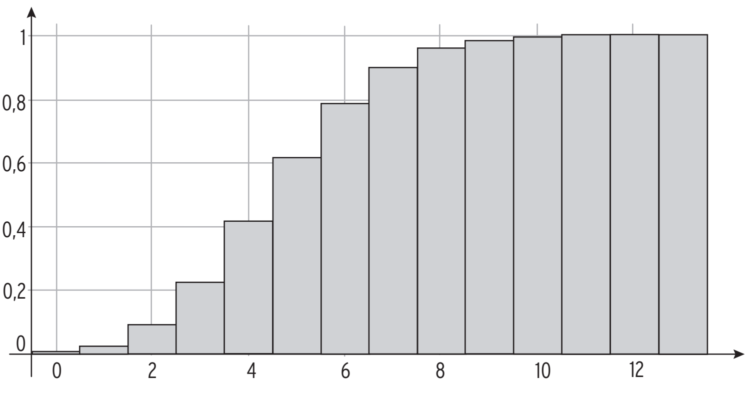
Ein Unternehmen macht mit seinem Produkt einen Gewinn zwischen 0 und 4 Geldeinheiten. Es liegen unterschiedliche Angaben zu den Gewinnwahrscheinlichkeiten vor.

3.1 Erklären Sie, warum der obige Graph nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer ganzzahligen Zufallsgröße beschreiben kann. 2

3.2 Die ZufallsgrößeX gibt den Gewinn, den das Unternehmen mit seinem Produkt macht, an. Die obige Graphik stellt für einen Gewinn von 0 GE, 3 GE und 4 GE die Wahrscheinlichkeiten richtig dar. Es ist bekannt, dass der erwartete Gewinn bei 1,7 GE liegt. Ermitteln Sie die korrekten Wahrscheinlichkeiten für X = 1 und X = 2. 4

Aufgabe 4

25 % der Mitarbeiter/-innen eines Großunternehmens klagen über eine zu hohe Arbeitsbelastung. Das Balkendiagramm gibt die kumulierte Binomialverteilung für eine Stichprobe von n = 20 an.



4.1 Geben Sie allein unter Zuhilfenahme des Diagramms die ungefähren Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse an:

A: Genau 6 Mitarbeiter/-innen sind unzufrieden.

B: Weniger als 8 Mitarbeiter/-innen fühlen sich überlastet.

C: Mindestens 15 Mitarbeiter/-innen sind zufrieden. 3

Stochastik **Lösungen Seite 55**

Aufgabe 4 Fortsetzung **Punkte**

4.2 Nach Einführung eines neuen Arbeitszeitmodells beklagen nur noch 2 von 20 Personen die Arbeitsbelastung. Beurteilen Sie mit Hilfe des Diagramms, ob mit 90 % Sicherheitswahrscheinlichkeit von einer geringeren Unzufriedenheit als 25 % ausgegangen werden kann. 3

Aufgabe 5

Eine Textilfabrik stellt unter anderem weiße T-Shirts her. Von diesen werden 50 % gefärbt und 50 % bestickt. Beim Färben sind 10 % der T-Shirts nicht farbecht, 20 % der anderen Hälfte sind fehlerhaft bestickt.

5.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar. 3

5.2 Die Herstellungskosten für alle T-Shirts betragen im Mittel 0,2 GE pro Stück. Die korrekt gefärbten T-Shirts werden zu einem Preis von 2 GE pro Stück, die fehlerhaft gefärbten T-Shirts werden als 2. Wahl zu einem Preis von 1 GE pro Stück verkauft. Die korrekt bestickten T-Shirts erzielen einen Erlös von 2,5 GE pro Stück, wohingegen die fehlerhaft bestickten T-Shirts zusätzliche Kosten in Höhe von 1 GE pro Stück verursachen. Berechnen Sie den durchschnittlich zu erwartenden Stückdeckungsbeitrag. 3

Aufgabe 6

Eine verbeulte Münze wird mehrfach geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf „Wappen“ fällt, beträgt p.

6.1 Geben Sie jeweils einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse A und B an: 3

A: Bei fünf Würfen fällt genau dreimal „Wappen“.

B: Bei 5 Würfen fällt genau dreimal „Wappen“, darunter bei den ersten beiden Würfen zweimal.

6.2 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 3 Würfen dreimal „Wappen“ fällt, ist 0,216. Untersuchen Sie, ob das Ergebnis „Wappen“ wahrscheinlicher ist als das Ergebnis „Zahl“. 2

Stochastik **Lösungen Seite 56**

Lösungen Seite 56

Aufgabe 7 **Punkte**

Bei der Herstellung eines Produktes sind durchschnittlich 20 % der Teile fehlerhaft.

Zu Testzwecken werden der laufenden Produktion einige Teile entnommen.

7.1 Es sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der entnommenen Teile angibt, die fehlerhaft sind. Begründen Sie, warum man die Zufallsvariable X als binomialverteilt annehmen kann. 3

7.2 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die ersten beiden entnommenen Teile nicht fehlerhaft sind. 1

7.3 Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis A und ein Ereignis B an, so dass gilt:

$P(A) = 0{,}2^{10}$ $\quad\quad$ $P(B) = \binom{50}{40} \cdot 0{,}2^{10} \cdot 0{,}8^{40}$ 2

Aufgabe 8

Von den 100 Schülerinnen und Schülern einer Jahrgangsstufe wählt die eine Hälfte als Naturwissenschaft Physik, die andere Hälfte Biologie.

Die Jahrgangsstufe umfasst insgesamt 60 Mädchen. 30 % sind Jungen und haben Physik gewählt.

8.1 Stellen Sie den gegebenen Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar. 3

8.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten,

- dass eine zufällig ausgewählte Schülerin Physik gewählt hat,
- dass ein zufällig ausgewählter Teilnehmer des Biologie-Kurses männlich ist.

3

Aufgabe 9

Die Zürla-Kohlin GmbH bezieht von einem Zulieferer seit Jahren selbstsichernde Muttern in großen Mengen, bei denen zwei Fehlerarten auftreten: Falsche Form und fehlerhaftes Gewinde.

Insgesamt sind nur 90 % aller Muttern fehlerfrei, d. h. sie haben weder eine falsche Form noch ein fehlerhaftes Gewinde. 5 % der Muttern haben eine falsche Form. 40 % der Muttern mit falscher Form haben auch ein fehlerhaftes Gewinde. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Mutter mit fehlerhaftem Gewinde auch ein falsche Form? 5

Stochastik **Lösungen Seite 57**

Aufgabe 10 **Punkte**

Ein Supermarkt verwendet für die Bearbeitung zurückgegebener Pfandflaschen eine Maschine. Diese soll einwandfreie Flaschen von deformierten Flaschen unterscheiden. Zurückgegebene Flaschen werden entweder von der Maschine abgewiesen oder angenommen. Dabei unterlaufen dem Gerät auch Fehler: Es werden manchmal auch einwandfreie Flasche abgewiesen oder deformierte Flasche angenommen. Eine Übersicht über Wahrscheinlichkeiten in diesem Zusammenhang liefert die noch unvollständige Vierfeldertafel (Tabelle).

	Flasche angenommen	Flasche abgewiesen	
Flasche einwandfrei	0,9405	0,0095	0,95
Flasche deformiert	0,0015	0,0485	0,05
	$\boxed{}$	$\boxed{}$	

a) In den beiden doppelt umrandeten Kästchen der letzten Zeile fehlen zwei Wahrscheinlichkeiten in dem vorliegenden Sachzusammenhang.
Berechnen Sie beide Wahrscheinlichkeiten und geben Sie diese in den Kästchen an.

b) Geben Sie die Bedeutung der beiden Wahrscheinlichkeiten aus 10.1 in dem vorliegenden Sachzusammenhang an.

c) Eine Flasche wird abgewiesen. Ermitteln Sie einen Term, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass die Flasche in Ordnung ist.

6

Hinweis: Die konkrete Berechnung wird nicht verlangt.

Aufgabe 11

Erfahrungsgemäß sind 4 % der produzierten Smartphones eines Herstellers defekt. Ein Lieferant erhält ein Paket mit 50 Smartphones des Herstellers.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für höchstens ein defektes Smartphone?
Geben Sie einen Term an. 3

Stochastik **Lösungen Seite 57/58**

Lösungen Seite 57/58

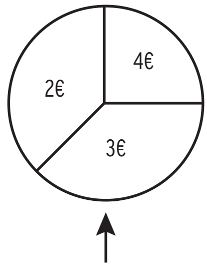
Aufgabe 12

a) Ein Fußballspieler verwandelt erfahrungsgemäß 80 % aller Strafstöße.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er von vier Strafstößen
- nur den letzten?
- mindestens einen?

b) Für ein Ereignis C gilt: $P(C) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}8^b \cdot a^2$
Geben Sie geeignete Werte für a, b und k an.
Beschreiben Sie das Ereignis C in Worten.

Aufgabe 13

Bei einem Glücksspiel wird das abgebildete Glücksrad benutzt. Als Einsatz bezahlt man 3 €. Das Glücksrad wird einmal gedreht. Man erhält den Betrag ausbezahlt, dessen Sektor über dem Pfeil zu stehen kommt.
Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Gewinn.



Aufgabe 14

Eine Urne enthält 5 rote, 3 weiße und 2 gelbe Kugeln.

a) Es werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man keine gelbe Kugel?

b) Nun werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden Kugeln die gleiche Farbe?

Aufgabe 15

Bei einer Lotterie führen 5 % der Lose zu einem Gewinn. Nils kauft 14 Lose.
Geben Sie jeweils eine Aufgabenstellung an, deren Lösung auf die folgende Weise berechnet wird.

a) $P(A) = \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

b) $P(B) = \binom{14}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{12} + \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

c) $P(C) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{14}$

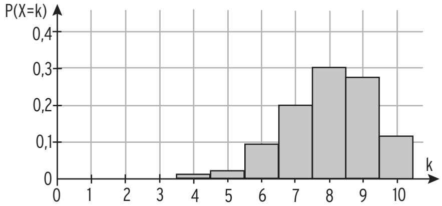
d) $14 \cdot 0{,}05$

Stochastik **Lösungen Seite 58**

Aufgabe 16 **Punkte**

Ein Basketballspieler wirft 10 Freiwürfe.Die Anzahl seiner Treffer wird mit k bezeichnet und durch die Zufallsgröße X beschrieben. Die Zufallsgröße X wird als binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,8 angenommen.

In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

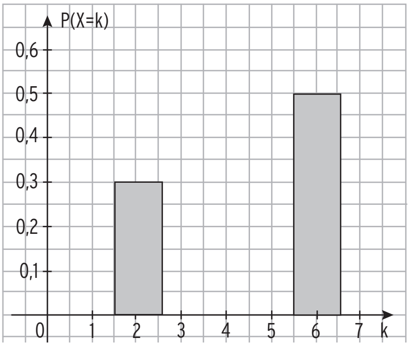


a) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Basketballspieler mindestens 8-maltrifft. 2

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, keinen Treffer zu erzielen, kleiner als $\frac{1}{1\,000\,000}$ ist. 3

Aufgabe 17

Für ein Zufallsexperiment wird eine Zufallsgröße X festgelegt, welche die drei Werte 2, 4 und 6 annehmen kann. In der Abb. ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X unvollständig dargestellt.



a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit P(X = 4) an. Berechnen Sie den Erwartungswert von X. 3

b) Das Zufallsexperiment wird zweimal unter gleichen Bedingungen durchgeführt. Dabei wird jeweils der Wert der Zufallsgröße notiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Produkt dieser beiden Werte den Wert 12 ergibt. 3

Stochastik **Lösungen Seite 59**

Punkte

Aufgabe 18

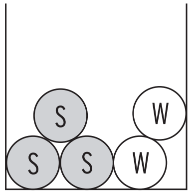


Abbildung 1

In einer Urne befinden sich zu Beginn eines Zufallsexperiments drei schwarze Kugeln (S) und zwei weiße Kugeln (W), siehe Abbildung 1.

Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Zu dem Zufallsexperiment wurde das Baumdiagramm aus Abbildung 2 erstellt.

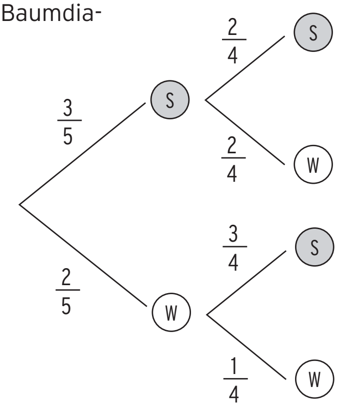


Abbildung 2

(1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dem Zufallsexperiment mindestens eine schwarze Kugel gezogen wird. 3

(2) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X. 3

Aufgabe 19

In den Urnen U1 und U2 befinden sich Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden:

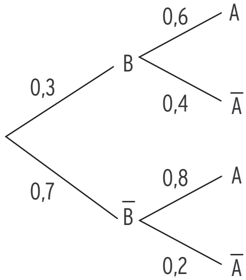
U1 : 6 rote und 4 blaue Kugeln

U2 : 1 rote und 4 blaue Kugeln

1.1 Aus der Urne U1 werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben. 2

1.2 Es wird eine der beiden Urnen zufällig ausgewählt. Aus dieser wird eine Kugel zufällig gezogen. Die gezogene Kugel ist rot. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kugel aus der Urne U1 stammt. 3

Aufgabe 20



Für ein zweistufiges Zufallsexperiment hat ein Schüler das abgebildete Baumdiagramm korrekt gezeichnet und beschriftet.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{A})$.

b) Erstellen Sie zum selben Sachverhalt eine entsprechende Vierfeldertafel.

Lösungen - Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung – Stochastik

Hilfsmittelfreier Teil der Zentralen Abiturprüfung

Lösungen Stochastik

Aufgabe 1 (Aufgaben Seite 46)

1.1 Da $E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}2 = 10$ ganzzahlig ist, muss der maximale Wert $P(X = 10)$ sein. Abbildung 3 erfüllt dies nicht. Nur für $p = 0{,}5$ ist die Binomialverteilung symmetrisch, so dass für $p = 0{,}2$ nur Abbildung 2 möglich ist.

1.2 Da $E(X) = n \cdot p = 10$, sind die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von 9, 10 oder 11 statisch aufgeladenen Elektrobauteilen aufzusummieren.
Aus der Abb. 2 liest man
$0{,}14 + 0{,}14 + 0{,}13 = 0{,}41$ ab, also ca. 40 % Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 2

2.1 Der Erwartungswert entspricht der durchschnittlich zu erwartenden Lebensdauer eines Leuchtmittels. Diese ist für die in A und B produzierten jeweils gleich. Die geringere Standardabweichung bei X bedeutet, dass die Lebensdauer eines Leuchtmittels aus A im Vergleich zu einem aus B durchschnittlich weniger weit von der erwarteten Lebensdauer abweicht.

2.2 Mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilung:

z_i	0	1	2	3	4	Summe
$P(Z = z_i)$	0,80	0,05	0,05	0,05	0,05	1

$E(Z) = 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}2 = 0{,}5$

Aufgabe 3 (Aufgaben Seite 47)

3.1 Die Summe der Wahrscheinlichkeiten beträgt
$0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}35 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1{,}1 > 1$.

3.2 Mit $a = P(X = 1)$ und $b = P(X = 2)$ ergibt sich

Summe Einzelwahrscheinlichkeiten:	I. $0{,}2 + a + b + 0{,}2 + 0{,}1 = 1$
Erwartungswert:	II. $a + 2b + 0{,}6 + 0{,}4 = 1{,}7$
Vereinfachung:	I. $a + b = 0{,}5$
	II. $a + 2b = 0{,}7$
II. – I. ergibt	$b = 0{,}2$

einsetzen ergibt $a = 0{,}3$

Lösungen Stochastik

Aufgabe 4 (Aufgabe Seite 47/48)

4.1 X gibt die Anzahl unzufriedener Mitarbeiter/-innen an.

A: $P(X = 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 5) = 0{,}78 - 0{,}62 = 0{,}16$

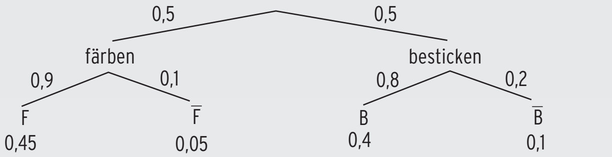
B: $P(X < 8) \approx 0{,}9$

C: $P(X \leq 5) \approx 0{,}62$

4.2 Da die Wahrscheinlichkeit maximal 2 unzufriedene Mitarbeiter/-innen bei $p = 0{,}25$ zu haben mit $P(X \leq 2) \approx 0{,}1$ ungefähr 10 % beträgt, kann mit 90 % Sicherheitswahrscheinlichkeit davon ausgegangen werden, dass die Zufriedenheit gesteigert wurde.

Aufgabe 5 (Aufgaben Seite 48)

5.1 Baumdiagramm



F = Färbung ok, $\overline{F}$ = Färbung fehlerhaft, B = Korrekt bestickt, $\overline{B}$ = fehlerhaft bestickt

5.2 Durchschnittlich zu erwartender Stückdeckungsbeitrag

Sei X die Zufallsgröße, die den Stückdeckungsbeitrag beschreibt.

$E(X) = 2 \cdot 0{,}45 + 1 \cdot 0{,}05 + 2{,}5 \cdot 0{,}4 - 1 \cdot 0{,}1 - 0{,}2 = 1{,}65$

Der zu erwartende Stückdeckungsbeitrag beträgt 1,65 GE.

Aufgabe 6

6.1 Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: $\binom{5}{3} p^3 \cdot (1 - p)^2$

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B: $p^2 \cdot \binom{3}{1} p \cdot (1 - p)^2$

6.2 Das Ergebnis “Wappen” ist wahrscheinlicher, da gilt: $0{,}216 > 0{,}5^3 = 0{,}125$.

oder: $\sqrt[3]{0{,}216} = 0{,}6 > 0{,}5$

Aufgabe 7 (Aufgaben Seite 49)

7.1 Die Zufallsvariable ist binomialverteilt:

Für jedes Teil gibt es nur zwei Möglichkeiten, nämlich entweder defekt oder nicht defekt. Es wird zwar ohne Zurücklegen gezogen, aber da die Grundgesamtheit sehr groß und die Stichprobe verhältnismäßig klein ist, bleibt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Zug gleich.

Lösungen Stochastik

Aufgabe 7 Fortsetzung

(Aufgaben Seite 49)

7.2 $P(E) = 0{,}8^2 = 0{,}64$ Hinweis: $\binom{50}{40} = \binom{50}{10}$

7.3 A: die ersten zehn Teile sind fehlerhaft.

B: es werden 50 Teile gezogen, davon sind genau 10 fehlerhaft.

Aufgabe 8

8.1 Es ergibt sich die Vierfeldertafel:

	weiblich	männlich	
Physik	0,2	0,3	0,5
Biologie	0,4	0,1	0,5
	0,6	0,4	1

8.2 Mit dem Satz von Bayes ergibt sich:

$$P_w(Ph) = \frac{P(Ph \cap w)}{P(w)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}$$

$$P_{Bio}(m) = \frac{P(Bio \cap m)}{P(Bio)} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = \frac{1}{5}$$

Alternativ können die gesuchten Wahrscheinlichkeiten aus einem Baumdiagramm entnommen werden.

Aufgabe 9

FF: falsche Form; RF: richtige Form

FG: fehlerhaftes Gewinde; RG: fehlerfreies Gewinde

Gegeben: $P(FF) = 0{,}05$; $P_{FF}(FG) = 0{,}4$; $P(RF \cap RG) = 0{,}90$

Gesucht: $P_{FG}(FF)$

$P_{FF}(FG) = 0{,}4$ $\quad P_{FF}(FG) = \frac{P(FF \cap FG)}{P(FF)} = 0{,}4$

$P(FF \cap FG) = 0{,}05 \cdot 0{,}4 = 0{,}02$

Aufstellen einer Vierfeldertafel:

Geg. im Text: 0,90; 0,05

40 % von 0,05 = *0,02*

	FF	RF	gesamt
FG	*0,02*	0,05	0,07
RG	0,03	**0,90**	0,93
gesamt	**0,05**	0,95	1

$$P_{FG}(FF) = \frac{P(FF \cap FG)}{P(FG)} = \frac{0{,}02}{0{,}07} = \frac{2}{7}$$

Lösungen Stochastik

Aufgabe 10

(Aufgaben Seite 50)

a) $0{,}9405 + 0{,}0015 = 0{,}942$ und $0{,}0095 + 0{,}0485 = 0{,}058$.

	Flasche angenommen	Flasche abgewiesen	
Flasche einwandfrei	0,9405	0,0095	0,95
Flasche deformiert	0,0015	0,0485	0,05
	0,942	0,058	1

b) Mit einer Wahrscheinlichkeit von 94,2 % wird eine Flasche von der Maschine angenommen und mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,8 % wird eine Flasche von der Maschine abgewiesen.

c) Man teilt den Anteil der abgewiesenen einwandfreien Flaschen durch den Anteil aller abgewiesenen Flaschen. Das ergibt: $\frac{0{,}0095}{0{,}0095 + 0{,}0485}$.

Aufgabe 11

X: Anzahl der defekten Smartphones unter 50 Smartphones;

X ist $B_{50;0,04}$- verteilt

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$= \binom{50}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}04^1 \cdot 0{,}96^{49}$$

Aufgabe 12

(Aufgaben Seite 51)

a) $P(\text{nur den letzten}) = 0{,}2^3 \cdot 0{,}8 = \frac{4}{625} = 0{,}0064$

$P(\text{mindestens einen}) = 1 - P(\text{keinen}) = 1 - 0{,}2^4 = 0{,}9984$

b) $P(C) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}8^b \cdot a^2$ für $k = 8$; $a = 0{,}2$; $b = 8$

Ereignis C: Der Spieler hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 80 % und verwandelt 8 von 10 Strafstößen.

Aufgabe 13

x_i	2 €	3 €	4 €
Gewinn	− 1 €	0 €	1 €
$P(X = x_i)$	0,375	0,375	0,25

Erwartungswert für den Gewinn: $E(X) = -1 \cdot 0{,}375 + 1 \cdot 0{,}25 = -0{,}125$

Lösungen Stochastik

Aufgabe 14

(Aufgaben Seite 51)

a) 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

P(keine gelbe Kugel) = $0{,}8^3 = \frac{64}{125} = 0{,}512$

b) 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen

P(gleiche Farbe) = P(rr) + P(ww) + P(gg) = $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{14}{45} \approx 0{,}31$

Aufgabe 15

a) $P(A) = \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$ A: Nils zieht ganau 3 Gewinnlose.

b) $P(B) = \binom{14}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{12} + \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

B: Nils zieht 2 oder 3 Gewinnlose.

c) $P(C) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{14}$ C: Nils zieht mindestens ein Gewinnlos.

d) $14 \cdot 0{,}05$ Durchschnittlich zu erwartende Anzahl von Gewinnlosen unter 14 Losen

Aufgabe 16

(Aufgaben Seite 52)

X ist binomialverteilt mit n = 10; p = 0,8

a) $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

Ablesen ergibt den Näherungswert: $0{,}30 + 0{,}27 + 0{,}11 = 0{,}68$

b) $P(X = 0) = 0{,}2^{10}$

Abschätzung: $0{,}2^{10} = \left(\frac{2}{10}\right)^{10} = \frac{2^{10}}{10^{10}} = \frac{1024}{10\,000\,000\,000} = \frac{1{,}024}{10\,000\,000}$

$$0{,}2^{10} = \frac{0{,}1024}{1\,000\,000} < \frac{1}{1\,000\,000}$$

Aufgabe 17

a) $P(X = 4) = 1 - 0{,}3 - 0{,}5 = 0{,}2$

Erwartungswert von X: $E(X) = 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}5 = 4{,}4$

b) Das Produkt 12 kann hier auf zwei Möglichkeiten erreicht werden: 2;6 und 6;2.

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit:

$P(12) = 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}30$

Lösungen Stochastik

Aufgabe 18 (Aufgaben Seite 53)

(1) P(„mindestens eine schwarze Kugel“) = 1 – P(„keine schwarze Kugel“)

P(„mindestens eine schwarze Kugel“) $= 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der mindestens eine schwarze Kugel gezogen wird, beträgt 90%.

(2) Anhand der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X kann der Erwartungswert $\mu = E(X)$ berechnet werden:

k	0	1	2
P(X = k)	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}1$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = 0{,}6$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0{,}3$

$\mu = E(X) = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 1{,}2$

Der Erwartungswert μ der Zufallsgröße X beträgt 1,2.

Aufgabe 19

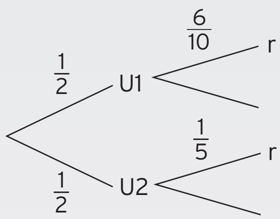
1.1 P („beide Kugeln haben die gleiche Farbe“) = P(rr) + P(bb)

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{15}$$

1.2 Mithilfe eines Baumdiagramms erhält man:

$$P(E_2) = \frac{P(U1 \wedge r)}{P(r)}$$

$$P(E_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{3}{4}$$

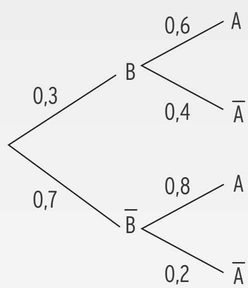


Aufgabe 20

a) $P(\overline{A}) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}26$

b) Vierfeldertafel

	A	$\overline{A}$	
B	0,18	0,12	0,3
$\overline{B}$	0,56	0,14	0,7
	0,74	0,26	1



II Teil II der zentralen Abiturprüfung mit Hilfsmittel (GTR)

1 Analysis

Mathematische Formeln Wirtschaft und Verwaltung

Kostenfunktionen x: Ausbringungsmenge in ME y: Gesamtkosten in GE	Gesamtkostenfunktion K mit	$K(x) = K_v(x) + K_f$
	Ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit	$K(x) = ax3 + bx2 + cx + d$
	K wächst degressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) < 0$
	K wächst progressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) > 0$
	Funktion der variablen Gesamtkosten	$K_v(x)$
	Funktion der gesamten Stückkosten k (Funktion der Durchschnittskosten)	$k(x) = \frac{K(x)}{x}$
	Funktion der variablen Stückkosten k_v	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
	Grenzkostenfunktion	$K'(x)$ Kostenzuwachs
	Grenzstückkostenfunktion	$k'(x)$
	Betriebsoptimum (Minimalstelle von k(x))	x_{BO}
	Langfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BO})$
	Betriebsminimum (Minimalstelle von $k_v(x)$)	x_{BM}
	kurzfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BM})$
	Nachfragefunktion (Preis-Absatz-Funktion)	$p_N(x)$
	Angebotsfunktion	$p_A(x)$
	Gleichgewichtsmenge	x_G; Schnittstelle von $p_N(x)$ und $p_A(x)$
	Gleichgewichtspreis	$p_G = p_N(x_G) = p_A(x_G)$
	Marktgleichgewicht MG	$MG\ (x_G \mid p_G)$
	Konsumentenrente Differenz zwischen den theoretisch möglichen und den tatsächlichen Ausgaben für ein Produkt.	$\int_0^{x_G} (p_N(x) - p_G)dx$
	Produzentenrente Differenz aus erzieltem Umsatz und mindestens erwartetem Umsatz.	$\int_0^{x_G} (p_G - p_A(x))dx$
	Erlösfunktion	$E(x) = p \cdot x$; p Preis pro ME $E(x) = p_N(x) \cdot x$; $p_N(x)$ Preis abhängig von x
	Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$
	Grenzgewinnfunktion	$G'(x)$
	Gewinnschwelle	x_{GS} 1. positive Nullstelle von G
	Gewinngrenze	x_{GG} 2. positive Nullstelle von G
	gewinnmaximale Ausbringungsmenge Maximalstelle von G(x): G′(x) = 0	x_{max}
	Cournot'scher Punkt	$C(x_{max} \mid p_N(x_{max}))$
	Stückdeckungsbeitrag d = dB	$dB(x) = p(x) - k_v(x)$
	Deckungsbeitrag D = DB	$DB(x) = G(x) + K_{fix} = E(x) - K_v(x)$

Formelsammlung Analysis

Bezeichnungen:

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; ...\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Menge der reellen Zahlen ohne Null

$\mathbb{R}_+^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$ Menge der positiven reellen Zahlen

$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$ Menge der positiven reellen Zahlen mit Null

Ableitungsregeln

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x)$

Kurzform: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Kurzform: $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Kettenregel: $f(x) = g(u(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$

für Exponentialfunktion $f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = (e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$

Integrationsregeln:

Integration durch Substitution

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c;\ a \neq 0$$

Produktintegration (partielle Integration)

$$\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx$$

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung Analysis

Aufgabe 1 **Lösung Seite 77** **Punkte**

Der Pharmakonzern Harma AG stellt schmerzlindernde Präparate als klassische Tablette, Brausetablette, Granulat oder Kautablette her. Diese werden in drei Produktionsabteilungen gefertigt. Regelmäßig führt die Marketingabteilung der Harma AG verschiedenartige Marktanalysen durch.

1.1 Die Analyse für das Produkt Niap free ergibt, dass sich die Angebotspreise auf dem Markt durch die Funktion p_A darstellen lassen und die Nachfragesituation durch p_N beschrieben werden kann.

$p_A(x) = 0{,}1(x + 2)^2 + 5$; $\quad p_N(x) = 12 - a \cdot x^2$; $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$, $a > 0$.

Dabei gibt x die angebotenen bzw. die nachgefragten Mengen in ME an und $p_A(x)$ bzw. $p_N(x)$ geben die Preise in GE pro ME an. Bei dem Parameter a handelt es sich um einen konjunkturabhängigen Parameter.

1.1.1 Geben Sie die Sättigungsmenge in Abhängigkeit vom Parameter a an. 4

1.1.2 Berechnen Sie den Wert des Parameters a, für den die Gleichgewichtsmenge bei 4,4 ME liegt. 5

1.1.3 Die Marketingabteilung behauptet: „Wenn a = 0,15 ist und die Gleichgewichtsmenge bei 4,4 ME liegt, dann ist das Verhältnis zwischen der Konsumentenrente und der Produzentenrente ausgeglichen, also 1 : 1." Beurteilen Sie diese Aussage unter Verwendung entsprechender Stammfunktionen. 8

1.1.4 Die Preise für das Standardschmerzmittel Niap free sind innerhalb der europäischen Gemeinschaft sehr unterschiedlich. Aus diesem Grund will die EU für dieses Präparat einen einheitlichen Preis festlegen. Zurzeit liegt der Gleichgewichtspreis über dem zukünftig festgesetzten Preis.
Interpretieren Sie, wie sich dies auf die Produzentenrente auswirkt. 4

1.2 Neben diesem Standardschmerzmittel Niap free werden ständig neue rezeptfreie schmerzlindernde Präparate in verschiedenen Varianten entwickelt. Für den Produktlebenszyklus des neu entwickelten Schmerzmittels Niap vita geht die Marketingabteilung von der Funktion f_b aus. Diese beschreibt den Umsatz in GE pro Jahr in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren.

$f_b(t) = 0{,}5 \cdot b \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}25 \cdot b \cdot t - 0{,}2}$; $b, t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq 0$, $b > 0$.

Der Parameter b spiegelt die Stärke des Konkurrenzdrucks wider.
Berechnen Sie für b = 0,5 zu welchem Zeitpunkt der Umsatzanstieg für das Produkt *Niap Vita* am größten ist. Auf die hinreichende Bedingung kann durch schlüssige Argumentation verzichtet werden. 7

(Teile aus Abitur 2014, Berufskolleg NRW)

Aufgabe 2 Lösung Seite 78/79

Mobiltec führt eine umfangreiche Marktanalyse für den Absatz von Handys mit Navigationssystem durch. Die Ergebnisse stehen der Marketingabteilung zur Verfügung.

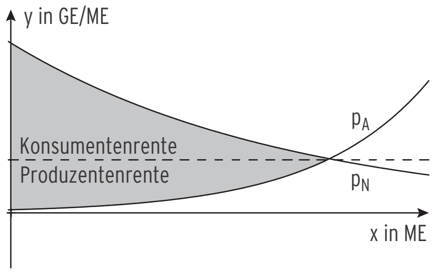
3.1 Angebot und Nachfrage nach den Handys mit Navigationssystem werden demnach durch die Angebotsfunktion p_A und die Nachfragefunktion p_N mit

$p_A(x) = e^{0,5x-3}$ und $p_N(x) = e^{-0,2x+4}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $0 \leq x \leq 15$

beschrieben. Dabei gibt x die angebotene bzw. nachgefragte Menge in ME und p_A bzw. p_N den jeweiligen Preis in GE/ME an.

3.1.1 Berechnen Sie die Menge und den Preis im Marktgleichgewicht.

3.1.2 Ermitteln Sie die Produzentenrente und die Konsumentenrente unter der Voraussetzung, dass die Gleichgewichtsmenge bei 10 ME liegt.



3.2 Mobiltec plant im Frühjahr die Einführung eines neuen Handys, welches mit einer weltweiten Navigationsfunktion ausgestattet werden soll. Die Unternehmensleitung rechnet bei der Einführung des Handys mit einer Absatzentwicklung, die sich durch die folgende Funktion A näherungsweise beschreiben lässt:

$A(t) = 20e^{-0,01t^2+0,12t}$, $t \in \mathbb{R}$; $t > 0$

Dabei gibt t die Zeit in Monaten nach der Einführung an, A(t) die Absatzzahlen in Tausend Stück pro Monat.

3.2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt t, in dem der maximale monatliche Absatz erreicht wird.

3.2.2 Berechnen Sie den maximalen monatlichen Absatz.

3.3 Für Handytyp 2 legt das Controlling folgende Absatzfunktion zugrunde:

$B(t) = \frac{1}{10}(t+5)\,e^{-0,1t+5}$. Dabei gibt t die Zeit in Monaten nach der Einführung und B(t) die Absatzzahlen in Tausend Stück pro Monat an.

3.3.1 Zeigen Sie, dass der Gesamtabsatz der ersten z Monate nach der Markteinführung durch folgende Gleichung dargestellt werden kann:

$\int_0^z B(t)dt = e^{-0,1z+5}(-z-15) + 15e^5$ mit $z \in \mathbb{R}$ und $z \geq 0$

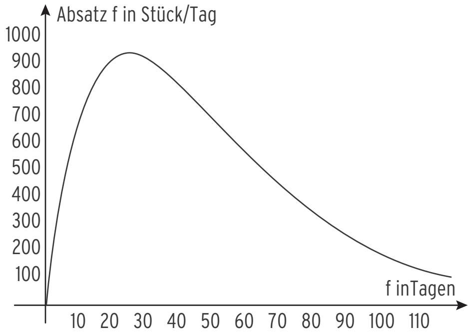
3.3.2 Berechnen Sie den Gesamtabsatz der ersten 20 Monate nach der Markteinführung.

3.3.3 Beurteilen Sie die durch B(t) prognostizierte Entwicklung des Gesamtabsatzes über eine sehr lange Zeit.

(Teile aus Berufskolleg 2011, NRW.)

Aufgabe 3 **Seite 1/2** **Lösung Seite 79/80**

Einige Wochen vor Beginn der WM kommt das Unternehmen Agrema auf die Idee ein WM Gesellschaftsspiel auf den Markt zu bringen. Daher wird der zu erwartende Absatz, also der Lebenszyklus des Produktes, untersucht.
Das Unternehmen vermutet einen exponentiellen Verlauf, der folgender Funktionsgleichung genügt: $f_{a,b}(t) = a \cdot t \cdot e^{-bt}$; $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b > 0$.
Dabei sei durch die Variable t ($t \geq 0$) die Zeit in Tagen ab der Produkteinführung und durch $f_{a,b}(t)$ der Tagesabsatz in Stück pro Tag beschrieben.



Da sich das Spiel direkt auf WM-Spiele bezieht, soll durch einen erhöhten Werbeeinsatz das Spiel schnell auf dem Markt bekannt werden.

1 Das Unternehmen strebt an, bereits am 7. Tag einen Tagesabsatz von 500 Stück zu erreichen. Außerdem soll die Steigerung des Tagesabsatzes an diesem Tag noch 50 Stück/Tag betragen.

1.1 Zeigen Sie, dass sich für die erste Ableitung der Funktion f folgende Funktionsgleichung ergibt: $f'_{a,b}(t) = (a - a \cdot b \cdot t)e^{-bt}$.

1.2 Bestimmen Sie die Parameterwerte a und b auf drei Dezimalstellen genau.

2 Es hat sich gezeigt, dass die Funktion mit dem Parameterwert a = 100 den zu erwartenden Absatz gut darstellt. Rechnen Sie in den folgenden Aufgabenteilen mit a = 100. Also gilt $f_b(t) = 100 \cdot t \cdot e^{-bt}$

2.1 Zeigen Sie, dass zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{b}$ der Tagesabsatz maximal ist.

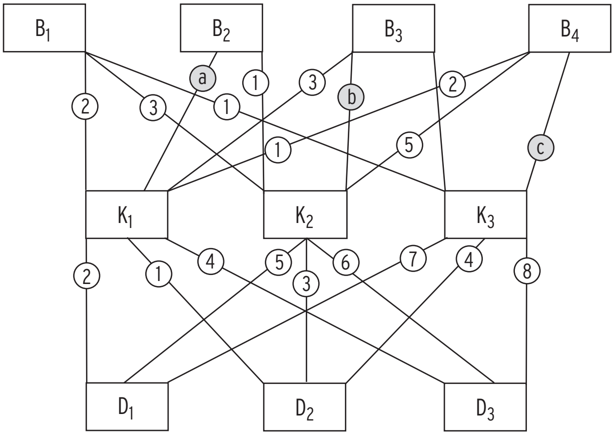
2.2 Bestimmen Sie b und den zugehörigen Zeitpunkt t für den Fall, dass der maximale Tagesabsatz bei 1 000 Stück/Tag liegt.

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung Lineare Algebra

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösung Seite 113**

Punkte

Die Druckfix GmbH stellt Drucker mit neuartiger Drucktechnik her. Verschiedene Abteilungen des Unternehmens beschäftigen sich mit der Analyse der Produktionssituation. Im Hauptwerk der Druckfix GmbH werden in der ersten Produktionsstufe aus den vier Basisteilen B_1 bis B_4 die drei Komponenten K_1 bis K_3 gefertigt. Diese werden dann in einer zweiten Produktionsstufe gemäß dem Verflechtungsdiagramm zu den drei verschiedenen Druckern D_1 bis D_3 zusammengesetzt.



Weiterhin ist die Matrix C_{BD}, die die Anzahl der Basisteile je Drucker angibt, bekannt: $C_{BD} = \begin{pmatrix} 26 & 15 & 34 \\ 13 & 7 & 22 \\ 50 & 29 & 64 \\ 41 & 24 & 50 \end{pmatrix}$

1 Geben Sie die benötigte Anzahl der Basisteile je Komponente und die benötigte Anzahl der Komponenten je Drucker in Form von Matrizen A_{BK} und B_{KD} an. Berechnen Sie die fehlenden Parameter a, b und c. 9

2.1 Berechnen Sie die Inverse zur Komponenten-Drucker Matrix B_{KD} und zeigen Sie, dass sich die fehlenden Werte der Basisteile-Komponenten Matrix A_{BK} mit Hilfe dieser Inversen bestimmen lassen. 7

2.2 Beurteilen Sie, ob sich das Vorgehen aus 2.1 auf beliebige zweistufige Produktionsprozesse übertragen lässt. 2

3 Bei der Druckerproduktion entstehen folgende variable Kosten:

Kosten der Basisteile:

	B_1	B_2	B_3	B_4
Kosten in Euro pro Basisteil	3	2	5	1

Aufgabe 1	Seite 2/2	Punkte

3 Fertigungskosten der Komponenten:

	K_1	K_2	K_3
Kosten in Euro pro Komponente	3	2	4

Kosten des Zusammenbaus der Drucker:

	D_1	D_2	D_3
Kosten in Euro je Drucker	22	27	18

Berechnen Sie die Stückdeckungsbeiträge der drei Drucker, wenn die Verkaufspreise 490 € für den Drucker D_1, 320 € für den Drucker D_2 und 635 € für den Drucker D_3 betragen. 8

4 Es hat sich gezeigt, dass die Drucker D_1, D_2 und D_3 im Verhältnis 2 : 4 : 1 nachgefragt werden. In einem Produktionszeitraum stehen von den Basisteilen B_3 1960 Stück und von B_4 1824 Stück zur Verfügung, B_1 und B_2 sind ausreichend vorhanden. Ermitteln Sie die maximal möglichen Produktionszahlen der Drucker und den genauen Bedarf an Basisteilen B_1 bis B_4. 4

5 In einem Nebenwerk von Druckfix werden aus denselben Komponenten ähnliche Drucker (D_4 bis D_6) für ein anderes Marktsegment zusammengebaut. Die folgende Tabelle gibt die Komponenten je Drucker an.

	D_4	D_5	D_6
K_1	2	2	4
K_2	5	3	6
K_3	8	4	8

Es stehen 220 Komponenten K_1, 370 Komponenten K_2 und 520 Komponenten K_3 zur Verfügung. Beurteilen Sie, welche Produktionszahlen der Drucker D_4 bis D_6 möglich sind, so dass alle vorhandenen Komponenten aufgebraucht werden. 6

6 Marktvariationen führen zu Kostenschwankungen der Basisteile B_1 und B_2. Die Kosten der Basisteile B_3 und B_4 bleiben unverändert. Diese Schwankungen werden durch den Kostenvektor $(3 - t^2 \quad 2 + t \quad 5 \quad 1)$ mit dem positiven Parameter $t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq 0$ beschrieben. Es gibt zurzeit Beschränkungen in den Einkaufspreisen: Basisteil B_1 sollte nicht mehr als 2,96 €/Stück und B_2 nicht mehr als 2,80 €/Stück kosten.

6.1 Ermitteln Sie den zulässigen Bereich für den Parameter $t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq 0$, der obige Bedingung erfüllt. 4

6.2 Zeigen Sie, für welches t die gesamten Basisteilkosten des Druckers D_1 maximal und für welches t sie minimal werden. 5

(Berufskolleg NRW, 2010.) $\overline{45}$

Aufgabe 2 **Lösung Seite 115**

Der Markt für Anti-Schuppen-Shampoo wird von wenigen Herstellern beherrscht. Zwei konkurrierende Unternehmen Denkel und Brogta starten gleichzeitig aufwändige Werbeaktionen für ihr Produkt. Eine parallel dazu verlaufende Marktanalyse ergibt folgendes Kundenverhalten: 45 % der Denkel-Kunden halten dem Unternehmen die Treue, 25 % wechseln zu Brogta und 30 % kaufen ein Shampoo von anderen Herstellern; 20 % der Brogta-Kunden wechseln zu Denkel, genauso viele zu einem anderen Hersteller und der Rest sind Stammkunden von Brogta; 40 % der Kunden anderer Hersteller verbleiben bei diesen, 30 % wechseln zu Brogta und der Rest zu Denkel.
Die Marktuntersuchung liefert für den Monat März folgende Marktanteile:

Denkel: 25 %, Brogta: 30 %, andere Hersteller: 45 %

a) Stellen Sie das Käuferverhalten grafisch in einem Übergangsdiagramm und als Übergangsmatrix dar.
Die Werbeaktionen sollen über drei Monate durchgeführt werden. Berechnen Sie unter Berücksichtigung der Anfangsverteilung die Marktanteile nach den Werbeaktionen unter der Voraussetzung, dass die Kundenwanderung monatlich erfasst wird.
Beurteilen Sie den Erfolg der Werbemaßnahmen.
Sollte sich am Verbraucherverhalten nichts ändern, wird sich langfristig ein Gleichgewichtszustand ergeben. Ermitteln Sie den Fixvektor.

b) Durch weitere Marketingstrategien erzielen die Unternehmen Denkel und Brogta eine deutlich höhere Kundenbindung, so dass sich das Übergangsverhalten jetzt folgendermaßen darstellt:

nach \ von	Denkel	Brogta	Andere
Denkel	0,9	0	0
Brogta	0	0,8	0,5
Andere	0,1	0,2	0,5

Mehrere Monate nach Beginn der Marketingstrategien haben sich im Januar die Marktanteile $\vec{v}_{neu} = \begin{pmatrix} 0{,}3051 \\ 0{,}4068 \\ 0{,}2881 \end{pmatrix}$ ergeben.
Ermitteln Sie die Marktanteile im Vormonat Dezember.
Untersuchen Sie die zukünftige langfristige Verteilung der Marktanteile.
Beurteilen Sie diese langfristige Entwicklung der Marktanteile unter Berücksichtigung der neuen Käuferwanderungen.

(Fachgymnasium Niedersachsen 2011.)

Aufgabe 3 **Lösung Seite 116**

Die Handys von Mobiltec werden in einem zweistufigen Produktionsprozess hergestellt. Mit Hilfe der Rohstoffe R_1 (Kunststoff), R_2 (Metall), R_3 (Glas) und R_4 (Sonstiges) werden in der ersten Stufe die Zwischenprodukte Z_1 (mechanische Komponenten), Z_2 (Gehäuseteile) und Z_3(elektronische Komponenten) gefertigt. In der zweiten Produktionsstufe entstehen dann aus den Zwischenprodukten die Handytypen H_1, H_2 und H_3. Der Werksleitung sind folgende Matrizen aus der Produktion bekannt:

$$B_{ZH} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } C_{RH} = \begin{pmatrix} 17 & 14 & 10 \\ 16 & 8 & 14 \\ 28 & 9 & 17 \\ 9 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Dabei gibt die Matrix B_{ZH} die Anzahl der Zwischenprodukte an, die zur Herstellung von je einem Handy benötigt werden. Die Matrix C_{RH} gibt die ME der Rohstoffe an, die zur Herstellung je eines Handys benötigt werden.

1 Berechnen Sie die Matrix A_{RZ}, die angibt, wie viele ME der einzelnen Rohstoffe für je ein Zwischenprodukt benötigt werden.

2 Für Handytyp H_1 soll der Stückdeckungsbeitrag 50 GE/ME, für H_2 25 GE/ME und für H_3 45 GE/ME betragen.Berechnen Sie die dafür nötigen Verkaufpreise je Handytyp, wenn folgende Kosten bekannt sind: Kosten für

Material und Fertigung der Zwischenprodukte:

	Z_1	Z_2	Z_3
GE/ME	2	3	4,5

die Fertigung der Handys:

	H_1	H_2	H_3
GE/ME	9	7,5	10

3 Für die kommende Produktionsperiode ist geplant, die Handys im Stückzahlenverhältnis $H_1 : H_2 : H_3$ von 2 : 5 : 4 herzustellen.

Im Lager befinden sich noch 980 000 ME von Z_1, 580 000 ME von Z_2 und 800 000 ME von Z_3. Der Bestand von Z_1 soll vollständig aufgebraucht werden. Berechnen Sie, wie viele ME von H_1 produziert werden können und wie hoch der Restbestand bzw. der Bedarf an Z_2 und Z_3 ist.

4 Das Lagerkontrollsystem gibt einen Bestand von 180 000 ME Z_1, 210 000 ME von Z_2 und 220 000 ME von Z_3 an. Die Daten in der Matrix B_{ZH} können sich geringfügig um den Wert k ändern: $B_{ZH} = \begin{pmatrix} 2 & 4+k & 1 \\ 3 & 0 & 3-k \\ 4 & 1+k & 2 \end{pmatrix}$

Prüfen Sie, für welche Werte von k die Lagerbestände restlos aufgebraucht werden können.

(Berufskolleg NRW, 2011.)

Aufgabe 4 **Lösung Seite 118**

Punkte

Der Pharmakonzern Harma AG stellt schmerzlindernde Präparate wie *Niap free* oder *Niap vita* als klassischeTablette, Brausetablette, Granulat oder Kautablette her.

3 Für die Produktion von *Niap free* (S_1) und *Niap vita* (S_2) werden aus vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 zunächst drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 hergestellt, die dann zu den Endprodukten S_1 und S_2 weiterverarbeitet werden. Die mengenmäßige Verflechtung zwischen den Stufen ist den folgenden Matrizen zu entnehmen.

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 2-d & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2d^2+d & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B_{ZS} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad d \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 \leq d \leq 2$$

Der Parameter d beschreibt dabei die Möglichkeit, Rohstoffe gegenseitig auszutauschen.

3.1 Untersuchen Sie, für welchen Wert von d sich der Rohstoff R_4 in der Produktion von Z_1 vollständig ersetzen lässt und bei welchem Wert von d für eine ME von Z_1 gleiche Mengen von R_1 und R_4 benötigt werden. 4

3.2 Berechnen Sie die Matrix C_{RS}, die den Zusammenhang zwischen den Rohstoffen und den Endprodukten S_1 und S_2 in Abhängigkeit vom Parameter d angibt. 6

3.3 Die Kosten für die Rohstoffe sind folgender Tabelle zu entnehmen: 4

Rohstoff	R_1	R_2	R_3	R_4
Kosten in GE/ME	7	4	5	4

Berechnen Sie die Rohstoffkosten pro ME von S_1 und S_2 in Abhängigkeit von d.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Rohstoffkosten für S_1 pro ME $16d^2 - 6d + 86$ GE und für S_2 pro ME $32d^2 - 12d + 306$ GE betragen.

3.4 Bestätigen Sie, dass die minimalen gesamten Rohstoffkosten zur Herstellung von 100 ME von S_1 und 100 ME von S_2 über 39 000 GE liegen. 6

3.5 Erfahrungsgemäß werden S_1 und S_2 im Mengenverhältnis 1:1 produziert. In der vorangegangenen Periode wurde mit d = 0 gefertigt. Durch eine Umstellung auf $d = \frac{3}{16}$ sollen die Rohstoffkosten gesenkt werden. Leiten Sie her, bei welchen Produktionsmengen sich eine Ersparnis von 1 000 GE ergibt. 5

(Teile aus Berufskolleg 2014 NRW)

Aufgabe 5 **Lösung Seite 119**

Ein Wahlforschungsinstitut soll jährlich prognostizieren, wie sich die Parteienlandschaft durch die Wählerwanderungen ändern wird. Dabei unterscheidet man zwischen Stammwählern - Wähler, die einer Partei treu bleiben - und Wechselwählern. Die Erhebung der Primärdaten hat folgendes ergeben:

Wanderung der Wählerschaft

von / nach	CDU	SPD	FDP	Grüne/Linke andere
CDU	17400	5200	1300	2500
SPD	3300	16900	500	2500
FDP	400	900	6000	900
Grüne/Linke andere	800	1300	1100	14000
Gesamt	21900	24300	8900	19900

Entwickeln Sie aus der Tabelle „Wanderung der Wählerschaft“ eine (3×3)-Übergangsmatrix unter der Voraussetzung, dass die Daten der zwei Parteien mit der größten absoluten Stammwählerschaft übernommen werden und die Daten der restlichen Parteien unter „Sonstige“ zusammengefasst werden.

Erstellen Sie eine Prognose für die nächste Wahl in drei Jahren unter der Bedingung, dass der Vektor $\overrightarrow{v_{Start}} = \begin{pmatrix} 0{,}33 \\ 0{,}23 \\ 0{,}44 \end{pmatrix}$ das Wahlergebnis bei der letzten Wahl darstellt.

Zeichnen Sie für die Wahl in drei Jahren das Übergangsdiagramm.

(Fachgymnasium Niedersachsen 2010.)

Aufgabe 6 **Seite 1/2** **Lösung Seite 120**

Lösung Seite 120

Punkte

Der Küchenhersteller K–Küchen stellt für die neue Comfortküche aus Furnierplatten (E_1), Scharnieren (E_2), Einlegeböden (E_3) und Edelstahlgriffen (E_4) zunächst drei Schrankelemente Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus schließlich zwei Schranktypen F_1 und F_2 her.
Der Materialfluss in Stück des jeweiligen Folgeproduktes ist durch die beiden folgenden Tabellen gegeben.

	Z_1	Z_2	Z_3
E_1	5	7	3
E_2	8	11	7
E_3	2	0	1
E_4	3	6	0

	F_1	F_2
Z_1	7	3
Z_2	2	6
Z_3	10	15

Bei der Produktion fallen die nachfolgenden Material- und Fertigungskosten (in Euro pro Stück) an, wobei die verwendete Qualität und damit auch der Einkaufspreis der Einlegeböden E_3 abhängig von $t \in \mathbb{R}$ ist:

E_1	E_2	E_3	E_4
5	0,5	$4 - t$	3

Z_1	Z_2	Z_3
11	14	17

F_1	F_2
36	42

2.1 Schranktyp F_1 wird für 1150 € pro Stück und Schranktyp 2 F für 1 240 € pro Stück verkauft.

2.1.1 Bestimmen Sie die variablen Stückkosten für die beiden Schranktypen F_1 und F_2 in Abhängigkeit vom Parameter t. 9

Kontrollergebnis:

	F_1	F_2
Variable Stückkosten [€/Stück]	$975 - 24t$	$1240{,}5 - 21t$

2.1.2 Interpretieren Sie die sich aus 2.1.1 ergebenden Stückdeckungsbeiträge, wenn die Einlegeböden E_3 zum Preis von 4 € pro Stück eingekauft werden. 4

2.1.3 Die Tagesproduktion beträgt 120 Stück von F_1 und 100 Stück von F_2. 4
Berechnen Sie den beim Verkauf der Tagesproduktion erzielten Gewinn, wenn Fixkosten in Höhe von 12 400 € zu berücksichtigen sind und die Einlegeböden E_3 zum Preis von 4 € pro Stück eingekauft werden.

Aufgabe 6 **Seite 2/2**

2.2 Wegen einer Umstrukturierung des Lagers sollen die derzeit vorrätigen Furnierplatten E_1 und Scharniere E_2 vollständig zu Schrankelementen (Z_1, Z_2 und Z_3) verarbeitet werden. Im Lager befinden sich noch 2 200 Stück von E_1 und 4 050 Stück von E_2. Die beiden anderen Einzelteile (E_3 und E_4) können auch kurzfristig in beliebiger Menge besorgt werden.

Das zur Berechnung des Lagerräumungsproblems notwendige Lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2200 \\ 4050 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ führt nach einigen Umformungen zu folgender

erweiterten Koeffizientenmatrix: $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 3 & 2200 \\ 0 & -1 & 11 & 2650 \\ 0 & 0 & 155 & -5x+41500 \\ 0 & 0 & 0 & 450x+755y-1061250 \end{array}\right)$

2.2.1 Erläutern Sie aus rein mathematischer Sicht mit Hilfe des Rangkriteriums die Lösbarkeit dieses Gleichungssystems. 4

2.2.2 Leiten Sie **ausschließlich anhand der letzten beiden Zeilen** der angegebenen erweiterten Koeffizientenmatrix ökonomisch zulässige Bereiche für die benötigten Stückzahlen x und y her. 6

2.3 Aus einem Restbestand von 2 200 Furnierplatten (E_1) sollen Schrankelemente (Z_1, Z_2 und Z_3) gefertigt werden (vgl. Rohstoff-Zwischenproduktmatrix), die an einen anderen Küchenhersteller zum Sonderpreis verkauft werden. Allerdings nimmt dieser Hersteller maximal 300 Schrankelemente Z_2 und maximal 200 Schrankelemente Z_3 ab. Fehlende Scharniere E_2 , Einlegeböden E_3 und Edelstahlgriffe E_4 können in beliebigerMenge besorgt werden.

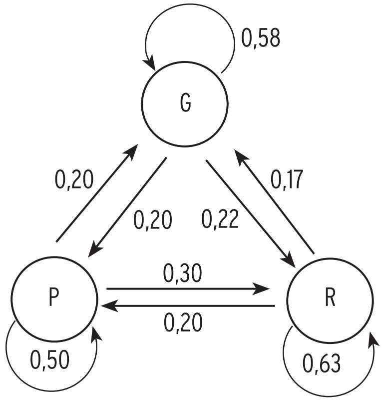
Für die Stückdeckungsbeiträge von 70 € für Z_1, 50 € für Z_2 und 60 € für Z_3 soll der Gesamtdeckungsbeitrag maximiert werden.

2.3.1 Geben Sie die Restriktionen und die Zielfunktion des Maximierungsproblems an. 6

(Berufskolleg NRW, 2012.)

Aufgabe 7 **Lösung Seite 122**

Die Umsätze im Möbelhandel einer Region sind unter den beiden Handelsgruppen P und G und dem Rest R aufgeteilt.
Zum Zeitpunkt einer Marktanalyse (t = 0) waren die Anteile folgende: P hatte 30 % Marktanteil, G hatte 40 % und der Rest R 30 %. Die jährlichen Übergänge zwischen den drei Gruppen stellt der Graph rechts dar. Es wird erwartet, dass die jährliche Entwicklung sich inder beschriebenen Weise fortsetzen wird, wenn keine Maßnahmen getroffen werden.



a) Rechts ist die Darstellung der Kundenentwicklung in einer Übergangsmatrix M begonnen worden. Bestimmen Sie die Matrix M vollständig.

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}50 & \ldots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \vdots \\ 0{,}30 & 0{,}22 & \vdots \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Aussage der Matrix M anhand der ersten Zeile.
Berechnen Sie die Kundenanteile für t = 1 und für t = 2.
Interpretieren Sie das Ergebnis für die Handelsgruppe P.

b) Um den Marktanteil von P zu erhöhen, werden der Firma von einem Beratungsinstitut zwei mögliche Werbestrategien als Alternativen vorgeschlagen:
Strategie A: Maßnahmen zur Erhöhung der Kundentreue
Damit würden, so wurde ermittelt, dann ein Jahr später statt 50 % nunmehr 60 % noch P treu sein und nur 15 % zu G und 25 % zum Rest abwandern.
Die übrigen Zahlen bleiben gleich.
Strategie B: Abwerben von Konkurrenten
Damit würde P 24 % von G (statt 20 %) und 28 % von R (statt 20 %) gewinnen, jeweils auf Kosten von G- bzw. R-treuen Kunden.
Erstellen Sie für beide Strategien passend abgeänderte Übergangsmatrizen A bzw. B.
Ermitteln Sie damit, ausgehend von den Anteilen für t = 0, die Marktanteile für t = 2.
Interpretieren Sie das Ergebnis beider Strategien aus der Sicht der Handelsgruppe P.

c) Die Matrix S mit $S = \begin{pmatrix} 0{,}4 & a & b \\ a & 0{,}6 & c \\ b & c & 0{,}5 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen, die durch die Zahlen 0,4 und 0,6 und 0,5 gebildet wird.
Bestimmen Sie die Parameter a, b und c so, dass S eine symmetrische Übergangsmatrix ist, bei der alle Spaltensummen gleich 1 sind. Beschreiben Sie, wie sich die Symmetrie einer Übergangsmatrix S in dem zu S gehörigen Übergangsgraphen zeigt.
(Abitur 2010, Niedersachsen.)

Aufgabe 8 Lösung Seite 123

Punkte

Für Trikots bezieht das Textilunternehmen drei Sorten von Stoffen (R_1 bis R_3), die zunächst eingefärbt und geschnitten werden (zu Z_1 und Z_2) und anschließend zu den fertigen Trikots (E_1 bis E_3) verarbeitet werden.
Unterschiedliche Qualitäten der Rohstoffe verändern den Materialverbrauch der Zwischenerzeugnisse und die Einkaufspreise der Rohstoffe. Die zugrundeliegenden Stücklisten (Angaben in Mengeneinheiten ME) mit dem qualitätsabhängigen Parameter $k \geq 0$ sind in den folgenden Tabellen angegeben:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	k	2
R_2	1	2	2k
R_3	2	2	2

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	1
Z_2	4	0	1
Z_3	2	2	2

1 Für einen Kundenauftrag von 400 ME von E_1, 500 ME von E_2 und 200 ME von E_3 wurden 14 600 ME von R_1, 22 700 ME von R_2 und 11 000 ME von R_3 verarbeitet. Bestimmen Sie die Qualitätsstufe k der Rohstoffe für diese Produktion. 6

2 Nach Abwicklung der aktuellen Aufträge verbleiben im Lager von Rohstoffen der Qualitätsstufe k = 2 noch jeweils 600 ME von R_1 und von R_3 sowie 740 ME von R_2. Prüfen Sie, ob das Lager für Endprodukte vollständig geleert werden kann. Ermitteln Sie zwei Möglichkeiten der Rohstoffverwendung. 8

3 Bei der Produktion fallen Rohstoffkosten, sowie Fertigungskosten für die Zwischen- und Endprodukte an. Die folgenden Tabellen geben Auskunft über die Höhe der einzelnen Kostenpositionen in GE/ME:

Rohstoffkosten:			Fertigungskosten der Zwischenprodukte:			Fertigungskosten der Endprodukte:		
$2 - \frac{1}{10}k$	$3 - \frac{1}{3}k$	2,50	$8 + \frac{1}{20}k$	$10 + \frac{1}{8}k$	6,50	7,00	6,00	5,00

3.1 Ermitteln Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich für den Parameter k. 4

3.2 Der Vertriebsleiter schlägt für Produkte, die mit der höheren Qualitätsstufe k = 3 gefertigt worden sind, folgende Verkaufspreise vor: 200,00 GE für eine ME von E_1, 78,35 GE für eine ME von E_2 und 100,00 GE für eine ME von E_3. Bewerten Sie den Vorschlag aus ökonomischer Sicht. 5
(Abitur Berufskolleg NRW 2011.)

Aufgabe 9 **Lösung Seite 124**

Punkte

In einer Kleinstadt mit 70000 Einwohnern sollen die Baugebiete, die in 10 Perioden benötigt werden, ausgewiesen werden. Dazu benötigt der Stadtrat Erkenntnisse über die Bevölkerungswanderung und über die Wünsche in Bezug auf die Wohngebiete.
Die Stadt hat die Möglichkeit in der Nähe der Innenstadt (Innenstadtnähe W_1), in einem angrenzenden Waldgebiet (Naturwohngebiet W_2) und auf ehemaligen Feldern am Rand der Stadt (Neubaugebiet W_3) Baugebiete auszuschreiben.
Ähnliche Wohngebiete existieren jetzt schon.
Zurzeit lebt 10% der Bevölkerung in Innenstadtnähe, 35% in Naturwohngebieten und 55% der Bevölkerung in Neubaugebieten.
Man geht davon aus, dass sich das Wechselverhalten inden betrachteten Perioden nicht ändert.

a) Um herauszufinden, welche Gebiete zu Baugebieten erklärt werden müssen, benötigt der Stadtrat Informationen über die Wechselneigungen der Menschen und die Daten der Bevölkerungsentwicklung in den einzelnen Wohngebieten von der Vorperiode bis zur übernächsten Periode.

Als Grundlage dienen folgende zusätzliche Informationen:

nach \ von	Innenstadtnähe W_1	Naturwohngebiet W_2	Neubaugebiet W_3
Innenstadtnähe W_1	0,5	b	0,1
Naturwohngebiet W_2	0,4	0,8	c
Neubaugebiet W_3	a	0,15	0,7

$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{W_1} \\ v_{W_2} \\ v_{W_3} \end{pmatrix}$ Berechnen Sie die fehlenden Werte a, b und c.

Ermitteln Sie für die geforderten Perioden die Bevölkerungszahlen für die drei Wohngebiete. Beschreiben Sie den Entwicklungsverlauf. 13

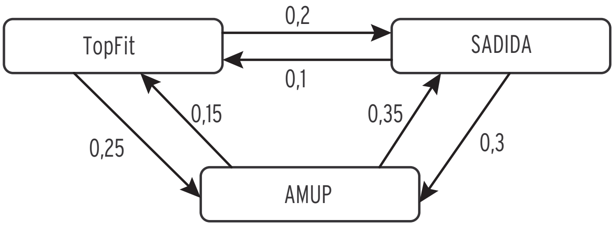
b) Bestimmen Sie die langfristige Entwicklung der Bevölkerungszahlen in den einzelnen Wohngebieten mithilfe der Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Interpretieren Sie die ermittelten Werte für die Stadtratssitzung. 10

(Abitur Niedersachsen)

Aufgabe 10 **Lösung Seite 125**

Nach den Modernisierungsmaßnahmen sollen neue Werbekampagnen geschaltet werden, dafür wurde eine Marktforschung durchgeführt.
Diese hat ergeben, dass der aktuelle Marktanteil von TopFit bei 20 % liegt, SADIDA und AMUP teilen sich hälftig den verbleibenden Marktanteil im Segment Sportbekleidung.
Die folgende Graphik veranschaulicht die Kundenwanderung:



- Wenn der Marktanteil in der nächsten Periode t = 1 voraussichtlich auf mehr als 22 % steigt, dann soll nur Werbung in Zeitschriften geschaltet werden.
- Wenn der Marktanteil in der übernächsten Periode t = 2 voraussichtlich unter 23 % liegt, dann soll ein Kino-Spot in der Periode geschaltet werden.
- Wenn der Marktanteil langfristig voraussichtlich unter 25 % bleibt, dann sollen Modenschauen in Shopping-Center mithilfe von Sportvereinen organisiert werden.
- Wenn die Steigerung des Marktanteils von der Vorperiode bis zur nächsten Periode konstant bleibt, dann soll die Werbeagentur nicht gewechselt werden.

Untersuchen Sie, welche Werbemaßnahmen umgesetzt werden sollten, und ob die Werbeagentur weitere Aufträge erhält.

(Abitur Niedersachsen)

3 Stochastik

Formelsammlung zur Stochastik

Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$

Für das Gegenereignis $\overline{A}$: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Additionssatz $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Multiplikationssatz $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Zufallsvariable X: $e_i \longrightarrow X(e_i) = x_i$

Erwartungswert: $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$

Varianz: $V(X) = (x_1 - (E(X))^2 \cdot P(X = x_1) + \ldots + (x_n - (E(X))^2 \cdot P(X = x_n)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Binomialverteilung B(n; p; k)

Die Zufallsgröße X ist **binomialverteilt:** $X \sim B_{n;\,p}$

Formel von Bernoulli $P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

Erwartungswert $\mu = E(X) = n \cdot p$

Varianz: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Kumulierte Binomialverteilung **F(n; p; k):**

Linksseitiges Intervall: $P(X \leq 8) = F(n; p; 8)$

Ablesen aus der Tabelle der **kumulierten Binomialverteilung**

Punktwahrscheinlichkeit: $P(X = 8) = B(n; p; 8)$

Ablesen aus der Tabelle der Binomialverteilung

Rechtsseitiges Intervall: $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$

Intervallwahrscheinlichkeit: $P(3 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 2)$

Hypothesentest (Signifikanztest):

Fehler 1. Art (α-Fehler): Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese H_0 abgelehnt wird, obwohl sie richtig ist.

Fehler 2. Art (β-Fehler): Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese H_0 nicht abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist.

Die bei einem Test bzw. einer Untersuchung akzeptierte Wahrscheinlichkeit, bei einer Entscheidung einen Fehler 1. Art zu begehen, nennt man auch Signifikanzniveau α.

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung Stochastik

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösung Seite 144**

Im Bereich Thermodruck verwendet die Druckfix GmbH neben den Walzen aus eigener Herstellung auch Walzen, die regional hergestellt werden und solche, die aus Asien importiert werden. Vor dem Einbau einer Walze durchläuft diese bei Druckfix eine Qualitätsanalyse. Defekte Walzen werden als Ausschuss aussortiert.
Die folgende Tabelle gibt Auskunft über die jährliche Bezugsmenge, die Ausschussquote und den Bezugspreis

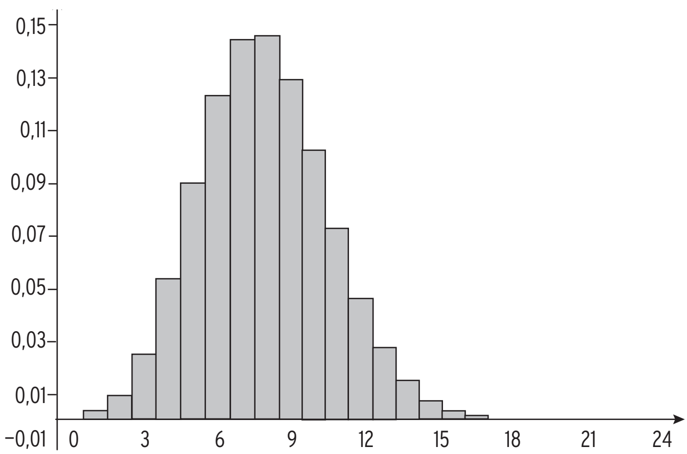
Herkunft	**Druckfix**	**Regional**	**Asien**
Bezugsmenge (Stück)	2000	3000	5000
Ausschussquote (%)	2	5	8
Bezugspreis (€/Stück)	49,98	39,37	18,69

1 Für die Preiskalkulation wird der Bezugspreis der defekten Walzen auf die intakten Walzen umgelegt.
Ermitteln Sie die jährliche Ausschussmenge, die Anzahl intakter Walzen und den durchschnittlichen Einstandspreis für eine intakte Walze.

2 Einer Lieferung aus Asien wird eine Stichprobe von 100 Walzen entnommen und hinsichtlich ihrer Qualität untersucht. Man kann davon ausgehen, dass die Verteilung der Zufallsgröße X: „Anzahl der defekten Walzen in der Stichprobe“ binomialverteilt ist.

2.1 Bestimmen Sie den Erwartungswert der Verteilung und die Wahrscheinlichkeit, dass X tatsächlich den Erwartungswert annimmt.

2.2 Das folgende Histogramm zeigt die Verteilung der Zufallsgröße X.



Aufgabe 1 **Seite 2/2**

2.2 Prüfen Sie mit Hilfe des Histogramms folgende Aussagen der Qualitätsabteilung:

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 20 Walzen defekt sind, ist so gut wie Null.

B: Die Wahrscheinlichkeit, dass 9 Walzen defekt sind, ist größer als die von jeder anderen Anzahl defekter Walzen.

C: Es ist gleich wahrscheinlich 6 oder 9 defekte Walzen in der Stichprobe zu haben.

D: Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Walzen defekt sind, ist kleiner als 3%.

2.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Walzen defekt sind.

Gehen Sie im weiteren Verlauf von Lieferungen im Umfang von $n = 100$ und binomialverteilten Zufallsgrößen aus.

3 Es werden alle 100 Walzen einer regionalen Lieferung einer Qualitätsanalyse unterzogen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Defekt beträgt $p = 0{,}05$.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Höchstens 2 Walzen sind defekt.

B: Es gibt mindestens 3 defekte Walzen.

C: Es befinden sich mindestens 4 und höchstens 7 defekte Walzen in der Stichprobe.

D: In der Stichprobe befindet sich die erwartete Menge intakter Walzen.

E: Alle Walzen sind intakt.

(NRW Berufskolleg 2010.)

Aufgabe 2 **Lösung Seite 145**

Punkte

Der Küchenhersteller K-Küchen hat eine Luxus-Küche für das obere Preissegment entwickelt, die sich durch ein hochwertiges Schubladensystem, Echtholzfronten und eine patentierte Schrankbeleuchtung von den bisher produzierten Produktlinien unterscheidet. Von einem Zulieferer bezieht K-Küchen das neuartige Scharniersystem, bei dem sich die Schubladen nach nur leichter Berührung selbsttätig schließen.
Durchschnittlich sind 5 % der Scharniere defekt.

3.1 Die gelieferte Ware soll nur bei hinreichender Qualität angenommen werden. Der Küchenhersteller prüft vor der Warenannahme eine Stichprobe von 5 Kartons mit je 20 Scharnieren.

3.1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse: 6

E_1: In der Stichprobe von 100 Scharnieren befinden sich höchstens so viele defekte Scharniere, wie „zu erwarten“ ist.

E_2: In einem zufällig ausgewählten Karton mit 20 Scharnieren befinden sich mehr als zwei defekte Scharniere.

3.1.2 Die Ware soll abgelehnt werden, wenn sich unter den 5 geprüften Kartons der Stichprobe mindestens ein Karton mit mehr als 3 defekten Scharnieren befindet. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Karton mehr als 3 defekte Scharniere enthalten sind, liegt bei ca. 1,59 %.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ablehnung der Lieferung. 5

3.2 Ermitteln Sie die Anzahl der mindestens zu testenden Scharniere, bei der mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens ein defektes Scharnier zu finden ist. 8

3.3 Vor der Auslieferung der Luxus-Küchen überprüft K-Küchen die Beleuchtungen. Erfahrungsgemäß funktionieren 10 % der Beleuchtungen nicht einwandfrei. Ein nachträglicher Austausch der defekten Beleuchtung kostet das Unternehmen 80 € pro Küche.
Ein Prüfgerät, das die Beleuchtungen bereits vor dem Einbau prüft, kann für 580 € erworben werden. Sein Einsatz kostet täglich 30 € und ein Austausch der als defekt eingestuften Beleuchtung kostet dann nur 20 €. Das Testgerät erkennt mit 99 %-iger Sicherheit eine defekte Beleuchtung, allerdings zeigt es auch bei 2 % der funktionierenden Beleuchtungen einen Defekt an.

3.3.1 Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm. 4

3.3.2 In 100 Tagen werden insgesamt 1000 Küchen produziert. 7
Beurteilen Sie, ob die Anschaffung des Testgeräts zu einer Kostenersparnis führt.

(Teile aus NRW Berufskolleg 2012.)

Aufgabe 3 **Seite 1/2** **Lösung Seite 147**

Punkte

Das Unternehmen Agrema AG fertigt unter anderem Fan-Fahnen für die Frauen-Weltmeisterschaft 2011.

2.1 Die Fahnen werden in 40er-Paketen an Shops in ganz Deutschland verkauft. Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl der minderwertigen Fahnen in einem Paket. Gehen Sie davon aus, dass X binomialverteilt ist. Der Mitarbeiter für Qualitätsanalyse erstellt für X ein Diagramm der kumulierten Wahrscheinlichkeiten (vgl. Abb. 1)

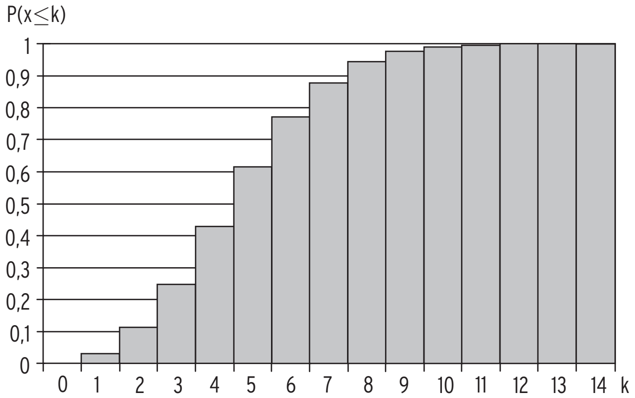


Abb. 1: Kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ für k minderwertige Fahnen von n = 40 Fahnen. Für alle k mit k > 14 beträgt die gerundete kumulierte Wahrscheinlichkeit 1

Beurteilen Sie anhand des vorgegebenen Diagrammes folgende Aussagen. 11

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Paket höchstens fünf Fahnen minderwertig sind, beträgt ca. 62 %.

B: Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Paket genau 4 Fahnen minderwertig sind, beträgt ungefähr 0,42.

C: Die Wahrscheinlichkeit, dass 13 oder 14 minderwertige Fahnen im Paket sind, ist annähernd gleich hoch.

D: Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zwei Fahnen minderwertig sind beträgt ca. 90%.

E: Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Paket mindestens zwei und höchstens sechs minderwertige Fahnen sind, beträgt ca. 55 %.

Aufgabe 3	Seite 2/2	Punkte

2.2 Genauere Untersuchungen der Qualität der Fahnen ergeben eine Ausschusswahrscheinlichkeit von 12,5%. Die Paketgröße soll auf 50 Fahnen aufgestockt werden. Es wird festgelegt, dass ein Paket nicht bezahlt werden muss, wenn sich darin mehr als 8 minderwertige Fahnen befinden.

2.2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein verkauftes Paket nicht berechnet wird. 4

2.2.2 Ermitteln Sie den Verkaufspreis eines Pakets, wenn das Unternehmen im Durchschnitt einen Paketpreis von 320 GE erzielen will. 4

2.2.3 Ein besonders interessierter Kunde möchte Fahnen aus der laufenden Produktion begutachten. Untersuchen Sie, wie viele Fahnen er entnehmen müsste, bis er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine minderwertige Fahne gezogen hat. 6

Die Agrema AG bezieht Rohpolyester für die Fahnen von dem Unternehmen CheijDong aus Taiwan. Nach Aussage des Unternehmens sind höchstens 4 % der Polyesterbahnen fehlerhaft und damit Ausschuss. Die Ware wird beim Eingang durch eine Stichprobe mit Umfang $n = 50$ überprüft.

2.3 Ermitteln Sie für $p = 0{,}04$ die zu erwartende Anzahl fehlerhafter Polyesterbahnen und die durchschnittlich zu erwartende Abweichung. 4

(NRW Berufskolleg 2011.)

Aufgabe 4 **Lösung Seite 148**

Ein Importeur von Elektroartikeln bietet preisgünstige Laptops an, die von einem asiatischen Unternehmen hergestellt werden.

Ein Elektronikfachmarkt bezieht diese Laptops. Nach Angaben des Importeurs sind die gelieferten Geräte zu 95 % fehlerfrei. Gehen Sie zur Vereinfachung beim Testen vom Modell „Ziehen mit Zurücklegen" aus.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der unter 20 Laptops

- kein Laptop,
- höchstens zwei Laptops,
- mindestens einer, aber weniger als fünf Laptops fehlerhaft sind.

Man möchte erreichen, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % alle Laptops fehlerfrei sind. Ermitteln Sie, ab welchem Stichprobenumfang diese Bedingung nicht mehr erfüllt wird.

Aufgabe 5 **Lösung Seite 148**

Diagnostische Tests werden zum Erkennen von Krankheiten eingesetzt.

Für die Krankheit Maladia gibt es den diagnostischen Test T_1, der bei einer repräsentativen Personengruppe eingesetzt wurde und bei 12 % der getesteten Personen positiv ausfiel. Von dem Test T_1 weiß man, dass bei einer an Maladia erkrankten Person mit 85 % Wahrscheinlichkeit ein positives Testergebnis eintritt, dass aber auch bei einer nicht erkrankten Person mit 3 % Wahrscheinlichkeit ein positives Testergebnis eintritt. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine gestestete Person krank ist, ca. 11 % beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand mit einem positiven Testergebnis krank ist?

Aufgabe 6 **Lösung Seite 149**

Punkte

Die Cylenda AG ist wichtiger Zulieferer für die Zayoto Ltd.und stellt unter anderem in hoher Stückzahl Chips für Mobiltelefone her. Aufgrund von technischen Problemen wird davon ausgegangen, dass durchschnittlich 10 % der Chips fehlerhaft sind.
Alle produzierten Chips werden in Kartons zu je 50 Stück verpackt und ausgeliefert.

3.1 Bei einer Lieferung von Chips wird ein Karton untersucht.

3.1.1 Geben Sie die zu erwartende Anzahl defekter Chips in einem Karton an. 3

3.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl defekter Chips um höchstens 3 vom erwarteten Wert abweicht. 4

3.1.3 Ermitteln Sie die Mindestanzahl der Chips, die untersucht werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,95 mindestens ein defekter Chip dabei ist. 5

3.2 Für die Chips sind folgende Zahlungsmodalitäten vereinbart:
Aus einer Lieferung wird zunächst der Inhalt eines zufällig ausgewählten Kartons mit 50 Chips überprüft. Befinden sich darin höchstens fünf defekte Chips, so wird die gesamte Sendung angenommen und der volle Preis gezahlt. Sind genau sechs Chips defekt, so wird die Ware ebenfalls angenommen, jedoch wird für die gesamte Sendung nur 80 % des Preises gezahlt. Sind mehr als sechs Chips defekt, so wird die gesamte Lieferung abgelehnt und die Cylenda AG muss die Kosten für die Entsorgung in Höhe von 0,60 € pro Chip übernehmen.
Die Produktion eines Chips kostet die Cylenda AG 8,00 €.

3.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
A: Die Ware wird zum vollen Preis angenommen.
B: Die Ware wird zum reduzierten Preis angenommen.
C: Die Ware wird abgelehnt. 6

3.2.2 Ermitteln Sie den Preis pro Chip, damit der zu erwartende Gewinn je Chip bei 5,00 € liegt. 5

3.3 Eine Lieferung umfasst 2 000 Chips.

3.3.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Lieferung höchstens 215 Chips fehlerhaft sind. 3

3.3.2 Ermitteln Sie für die Anzahl der fehlerhaften Chips in einer Lieferung die Grenze k , die nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 überschritten wird. 3
(NRW Berufskolleg 2013.)

Aufgabe 7 **Lösung Seite 150**

Punkte

Der Pharmakonzern Harma AG stellt schmerzlindernde Präparate als klassische Tablette, Brausetablette, Granulat oder Kautablette her. Diese werden in drei Produktionsabteilungen gefertigt.

3.1 Niap vita wird in Form von Lutschpastillen angeboten, die zusätzlich noch Extrakte aus der Cranberry enthalten. Je 12 Pastillen werden in eine Primärverpackung mit Aromaschutzversiegelung verpackt. Die Verpackungsanlage arbeitet nicht immer zuverlässig. Bekannt ist, dass zwei voneinander unabhängige Fehler auftreten können: Es fehlen Pastillen (1,5 %) oder die Versiegelung ist undicht (3 %).

3.1.1 Bestätigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerfreie Primärverpackung bei annähernd 96 % liegt. 3

3.1.2 Untersuchen Sie, wie weit die Fehlerwahrscheinlichkeit bei der Versiegelung gesenkt werden müsste, um zu erreichen, dass die Verpackungsanlage insgesamt zu durchschnittlich 97,515 % fehlerfrei arbeitet. 4

3.2 Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass 96 % der Primärverpackungen in Ordnung sind und legen Sie eine binomialverteilte Zufallsgröße zugrunde.

3.2.1 Beurteilen Sie die folgende Behauptung der Qualitätsprüfer: „Wenn mindestens 75 Primärverpackungen geprüft werden, dann wird mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens eine Primärverpackung gefunden, die nicht in Ordnung ist.“ 5

3.2.2 Es werden je fünf Primärverpackungen in eine Schachtel verpackt, so dass diese 60 Pastillen *Niap Vita* enthalten soll. 4

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für eine einwandfreie Schachtel an.

3.3 Auf Grund des Einsatzes einer neuen Verpackungsmaschine ist eine Schachtel mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % fehlerfrei. Je 50 Schachteln kommen in ein Versandpaket für den Einzelhandel.

3.3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Versandpaket höchstens zwei fehlerhafte Schachteln enthält. 4

3.3.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die zu erwartende Anzahl von Schachteln mit fehlerhaftem Inhalt in einem Versandpaket nicht überschritten wird. 4

3.3.3 Eine Apotheke bestellt ein Paket des Produktes Niap vita. Die Sendung wird reklamiert, wenn in diesem Paket mehr als drei Schachteln mit fehlerhaftem Inhalt aufgefunden werden.
Berechnen Sie hierfür die Wahrscheinlichkeit. 3

(NRW Berufskolleg 2014)

Aufgabe 8 **Lösung Seite 151**

Die LION GmbH, ein Hersteller für Sportartikel, fertigt große Mengen von Fahrradtrikots, die in den Farben rot, grün und gelb bedruckt werden. Dabei ist die Hälfte der hergestellten Fahrradtrikots rot, 23 % sind grün und der Rest gelb. Die Produktion der Trikots erfolgt in den zwei voneinander unabhängigen Arbeitsgängen „Nähen“ und „Bedrucken“. Obwohl man aus Erfahrung weiß, dass 7 % der Trikots nach dem Nähen einen Nähfehler aufweisen, werden **alle** Fahrradtrikots bedruckt. 95 % haben den dem Arbeitsgang „Bedrucken“ keine Druckfehler.

Bei der Endkontrolle kommen die Trikots mit den unterschiedlichen Farben nacheinander in zufälliger Reihenfolge an. Zehn der nacheinander ankommenden Trikots werden betrachtet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

A: Mindestens sechs Trikots sind rot bedruckt
B: Die ersten sechs Trikots sind grün bedruckt
C: Höchstens zwei Trikots sind gelb bedruckt

Bei der Vermarktung interessieren im Wesentlichen einwandfreie Trikots. Dabei gilt, dass Trikots, die entweder Näh- oder Druckfehler haben, mit einem 30%igen Nachlass vom Preis eines fehlerfreien Trikots verkauft werden. Trikots mit Näh- und Druckfehlern sind Ausschuss, der Hersteller kann hierfür lediglich 1,50 € pro Trikot erzielen.
Berechnen Sie unter diesen Bedingungen den Preis für ein fehlerfreies Trikot, damit eine Tagesproduktion von 2250 Stück für 41242,50 € verkauft werden kann.
(Teile aus Abitur 2006, Fachgymnasium Niedersachsen.)

Aufgabe 9 **Lösung Seite 152**

Das Unternehmen Mobiltec produziert Handys mit integrierter Navigationsfunktion.

Außerdem hat es sich auf die Herstellung und den Vertrieb von Handyschalen spezialisiert.Die Handyschalen werden in Kartons zu je 100 Stück auch an den Großhandel verkauft. Untersuchungen haben ergeben, dass bei 10% aller produzierten Schalen Fehler in der Farbpigmentierung auftreten.

1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
A: In einem Karton befinden sich genau fünf Handyschalen mit fehlerhafter Farbpigmentierung.
B: In einem Karton weisen weniger als drei Handyschalen diesen Fehler auf.
C: In einem Karton sind mehr als sieben Handyschalen fehlerhaft.
D: Ein Karton enthält weniger als 90 fehlerfreie Handyschalen.

2 Vor dem Verlassen des Werkes werden die Handyschalen einer Endkontrolle unterzogen. Weisen Sie nach, dass mehr als 21 Handyschalen überprüft werden müssen, um mit mindestens 90%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine fehlerhafte Schale zu finden.

3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 kontrollierten Handyschalen die Anzahl der fehlerhaften Handyschalen um höchstens die Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.

4 Die Handyschalen werden nach der Herstellung in einer dreistufigen Kontrolle auf Mikrorisse geprüft und ggf. aussortiert. In der ersten Kontrollstufe wird dieser Fehler mit 70 %-iger Wahrscheinlichkeit, in der zweiten Kontrollstufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % und in der dritten Kontrolle mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % erkannt. Wird ein Riss bei der ersten Kontrolle entdeckt, so entstehen dem Unternehmen Mobiltec Kosten in Höhe von 0,75 €.
Wird dieser Fehler erst in der zweiten Kontrolle entdeckt, betragen die Kosten 1,50 €.

Wird ein Mikroriss jedoch erst in der dritten Kontrolle entdeckt, dann liegen die Kosten bei 5 €. Wenn ein Handy mit einem Mikroriss ausgeliefert wird, so wird es mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% reklamiert. Die Ersatzbeschaffung kostet 50 €.
Die Zufallsgröße X gibt die Kosten in Euro an, die eine Handyschale mit diesem Fehler verursacht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und die durchschnittlich zu erwartenden Kosten.

(NRW Berufskolleg 2011.)

Aufgabe 10 **Lösung Seite 153**

Eine Befragung hat ergeben, dass 40 % der Einwohner einer Kleinstadt einem Verein angehören. Zudem wurde festgestellt, dass 70 % aller Vereinsmitglieder männlichen Geschlechts sind. Von den Personen, die keinem Verein angehören, sind 65 % weiblich.
Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

- eine zufällig ausgewählte Person männlich ist,
- eine zufällig ausgewählte männliche Person einem Verein angehört.

Aufgabe 11 **Seite 1/2** **Lösung Seite 153**

Der Bausatz für das Regal „Vario II" wird in zwei Produktionsstufen gefertigt.
Aus Erfahrung weiß man, dass in der ersten Produktionsstufe die Fehlerquote 12 % und in der zweiten 9,5 % beträgt. Die Fehler auf beiden Produktionsstufen treten unabhängig voneinander auf.

1 Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für einen fehlerhaften Regalbausatz ungefähr 0,2 beträgt.

2 Gehen Sie davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen fehlerhaften Regalbausatz p = 0,2 ist. Der laufenden Produktion wird eine Stichprobe von 10 Regalbausätzen entnommen.

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die letzten zwei entnommenen Regalbausätze fehlerhaft sind.

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nur die beiden zuletzt entnommenen Regalbausätze fehlerhaft sind.

2.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in der Probe insgesamt zwei Regalbausätze fehlerhaft sind.

Aufgabe 11 **Seite 2/2**

3 Bei 11,5 % der Regalbausätze treten die beiden voneinander unabhängigen Fehlertypen A und B einzeln oder gemeinsam auf.
Fehlertyp A: „Der Regalbausatz weist Kratzer auf."
Fehlertyp B: „Die Bedienelemente des Regalbausatzes klemmen."

3.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler A, wenn bekannt ist, dass der Fehler B eine Wahrscheinlichkeit von 8,5% besitzt.

3.2 Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit nur einer der Fehler A oder B auftritt.

4 Bei der Endkontrolle der Regalbausätze wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % ein fehlerhafter Regalbausatz erkannt und zunächst aussortiert. In 1 % der Fälle wird ein einwandfreier Bausatz versehentlich aussortiert. Insgesamt weisen 3 % der Bausätze tatsächlich einen Fehler auf.

4.1 Berechnen Sie den Anteil der als einwandfrei ausgelieferten Regalbausätze.

4.2 Zeigen Sie, dass ein Grund für eine spätere berechtigte Reklamation durchschnittlich nur einmal unter 1600 ausgelieferten Regalbausätzen vorkommt.

4.3 Die Kosten der Endkontrolle betragen zurzeit 0,20 € pro Regalbausatz.
Eine berechtigte Reklamation verursacht Kosten in Höhe von 500 €.
Eine Verbesserung des Kontrollgeräts durch ein Zusatzmodul würde einmalig 450 € kosten und bei der Kontrolle des einzelnen Bausatzes Kosten in Höhe von 0,25 € verursachen. Allerdings würde laut Techniker das neue Modul dafür sorgen, dass durchschnittlich nur noch einmal unter 3200 Regalbausätzen eine berechtigte Reklamation vorkommt.
Im nächsten Jahr wird mit einer Produktion von 10000 Regalbausätzen gerechnet.Der Anteil der als einwandfrei ausgelieferten Regalbausätze beträgt beim alten Kontrollgerät ohne Zusatzmodul 96 % und beim verbesserten Kontrollgerät mit Zusatzmodul 95 %.
Beurteilen Sie, ob sich die Anschaffung des neuen Moduls für das nächste Jahr lohnt.
Gehen Sie davon aus, dass ungerechtfertigte Reklamationen vernachlässigbar geringe Kosten verursachen.
Weisen Sie nach, ab welcher Produktionsmenge sich eine Umstellung auf das neue Modul lohnt.
(Berufskolleg, NRW 2009)

Zentrale Abiturprüfung 2021

Leistungskursfach Mathematik

Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung Lösungen Seite 249 - 256

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi) Punkte

Beschreibung der Ausgangssituation zu Aufgabenteil A

Die Jump & Run GmbH ist ein renommiertes Unternehmen, das verschiedene Arten von Sportartikeln herstellt. Die Produktpalette richtet sich vor allem an Großabnehmer wie z.B. Schulen oder Vereine.

Aufgabe 1 (24 Punkte)

1.1 Analysis

Für die Produktion von Kugeln zum Kugelstoßen gilt die folgende Grenzkostenfunktion: $K'(x) = 6x^2 - 12x + 18$

Bei einer Produktion von 2 Mengeneinheiten (ME) der Kugeln entstehen Gesamtkosten in Höhe von 38 Geldeinheiten (GE).

1.1.1 Stellen Sie die Gleichung der Gesamtkostenfunktion K auf. 3

1.1.2 Zeigen Sie, dass K streng monoton steigt. 3

1.2 Die Gewinnfunktion bei der Produktion von Reckstangen lautet:

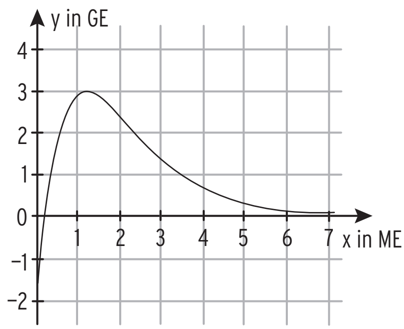
$G_a(x) = (10x - a) \cdot e^{-x}$, mit $a, x \in \mathbb{R}$ und $a \geq 1$, $x \geq 0$

Der Parameter a hängt vom verwendeten Material ab.

Hierbei gibt x die produzierte Menge der Reckstangen in ME und $G_a(x)$ den Gewinn in GE an.

Der Funktionsverlauf ist für a = 2 in Abbildung 1 dargestellt.

Abbildung 1



1.2.1 Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen der Produktionsleiterin bezogen auf die Funktion G_a mit $a \geq 1$.

A: Egal welchen Wert a hat, die Gewinnschwelle liegt immer bei mindestens 0,2 ME.

B: Egal welchen Wert a hat, die gewinnmaximale Ausbringungsmenge liegt immer bei mindestens 1,1 ME. Dabei soll die hinreichende Bedingung nicht untersucht werden. 6

Zentrale Abiturprüfung 2021
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

1.3 Lineare Algebra

1.3.1 Lösen Sie das nachfolgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 2 \cdot x - 3 \cdot y + z &= 4 \\ -x + y + z &= 1 \\ 2 \cdot y + 3 \cdot z &= 6 \end{aligned}$$ 3

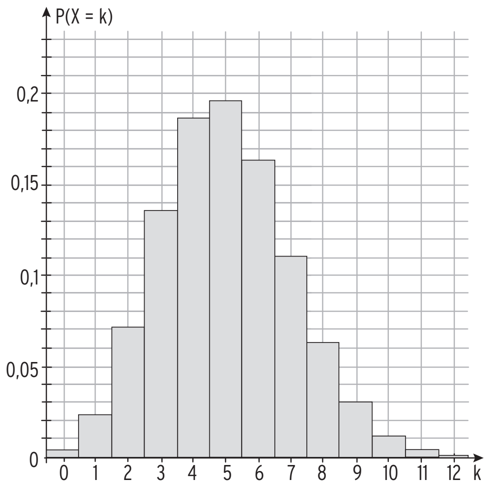
1.3.2 Im Folgenden ist $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix und A eine Matrix $A \cdot A = E$.

Berechnen Sie Werte für a und b, falls $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 0 \end{pmatrix}$. 3

1.4 Stochastik

Erfahrungsgemäß zerbricht ein hoher Anteil der hölzernen Baseballschläger innerhalb des ersten Jahres. Zur genaueren Untersuchung wird eine Stichprobe von 25 Schlägern entnommen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl zerbrochener Schläger an. Die Abbildung stellt die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung dar. Beurteilen Sie auf der Grundlage des Histogramms, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Abbildung



Aussage 1: Die Wahrscheinlichkeit für höchstens drei zerbrochene Schläger ist höher als die Wahrscheinlichkeit für genau sechs zerbrochene Schläger. 2

Aussage 2: Die Wahrscheinlichkeit, dass sieben oder acht Schläger zerbrechen, ist größer als 0,15. 2

Aussage 3: Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens vier oder mindestens sechs Schläger zerbrechen, ist kleiner als 0,8. 2

Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS
Aufgabenstellung

Aufgabe 2 – Analysis (32 Punkte) Punkte

Die Jump & Run GmbH ist ein renommiertes Unternehmen, das verschiedene Arten von Sportartikeln herstellt. Die Produktpalette richtet sich vor allem an Großabnehmer wie z. B. Schulen oder Vereine.

2.1 Die Controlling-Abteilung will ein Modell zur Prognose des Gewinns bei Fußbällen entwickeln. Man geht davon aus, dass sich der Gewinn G durch eine Funktion 3. Grades der Form

$G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}, x \geq 0$

modellieren lässt.

2.1.1 In folgender Tabelle sind die Gewinne für verschiedene Produktionsmengen angegeben:

Produktionsmenge in ME	1	2,5	3	3,5	4	5
Gewinn in GE	– 0,6	1,1	1,5	1,6	1,5	0

Stellen Sie den Funktionsterm der Gewinnfunktion G mit Hilfe einer Regression auf. 4

2.1.2 Die Controlling-Abteilung geht von einer Gewinnfunktion G mit

$G(x) = -0{,}1\,x^3 + 0{,}45\,x^2 + 0{,}55x - 1{,}5 \text{ mit } x \in \mathbb{R}, x \geq 0$

aus.

Bestimmen Sie die Gewinnzone und die gewinnmaximale Ausbringungsmenge.

5

2.2 Auf dem Markt für Tennisschläger im mittleren Preissegment verhalten sich Nachfrage und Angebot entsprechend der Funktionen:

$p_N(x) = -0{,}8\,x^2 - 4x + 130 \text{ mit } x \in \mathbb{R}, x \geq 0$

$p_A(x) = 0{,}35\,x^2 + 103 \text{ mit } x \in \mathbb{R}, x \geq 0$

[1 ME = 1000 Schläger, 1 GE = 1000 €]

Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR

Aufgabe 2 – Analysis (Fortsetzung)

2.2.1 Prüfen Sie die folgenden Aussagen eines Mitarbeiters der ControllingAbteilung:

(1) „Das Marktgleichgewicht liegt momentan bei ca. 3400 Stück und ca. 107 € pro Stück“.

(2) „Sollte der Preis durch staatliches Eingreifen auf 105 €/Stück begrenzt werden, dann besteht ein Nachfrageüberschuss von weniger als 1000 Stück.“

(3) „Die Konsumentenrente in diesem Marktsegment ist mehr als 5 mal so hoch wie die Produzentenrente.“ 7

2.2.2 Die Konsumentenrente soll durch einen Teilmarkt abgeschöpft werden. Dazu bietet die Jump & Run GmbH ein Modell zu einem Preis von 115 € pro Stück auf dem Markt an.
Ermitteln Sie den Betrag, der durch diesen Teilmarkt abgeschöpft wird. 4

2.3 Der Markt für Badmintonbälle mit Naturfedern ist abhängig von der schwankenden Federqualität. Diese Abhängigkeit wird im Folgenden durch den Parameter w ($w > 0$) beschrieben. Um Prognosen über die zu erwartenden Absatzzahlen zu erhalten, hat die Marketingabteilung eine Marktforschungsstudie in Auftrag gegeben. Die Prognose der Absatzzahlen kann durch die Funktion a_w mit

$a_w(t) = (1 + t) \cdot e^{-\frac{1}{w} \cdot t + 0{,}25}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$

dargestellt werden. Dabei gibt t die Zeit in Monaten seit Markteinführung ($t = 0$) und $a_w(t)$ die zugehörige Absatzmenge in Mengeneinheiten pro Monat (1 ME = 1000 Badmintonbälle) an.

2.3.1 Das Unternehmen strebt drei Monate nach der Markteinführung einen monatlichen Absatz von 3,5 ME pro Monat an.
Berechnen Sie den dafür notwendigen Wert von w. 3

2.3.2 Ermitteln Sie die Werte des Parameters w, für die das lokale Maximum bei $t > 0$ liegt, d.h. die monatlichen Absatzzahlen erst nach der Markteinführung maximal werden.
Dabei kann ohne weitere Rechnung $a''_w(t) = \left(-\frac{2}{w} + \frac{1}{w^2} + \frac{t}{w^2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{w} \cdot t + 0{,}25}$ benutzt werden. 6

2.3.3 Berechnen Sie für $w = 4$ den Gesamtabsatz für das erste Halbjahr nach Markteinführung. 3

Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR

Aufgabe 3 – Lineare Algebra (32 Punkte) Punkte

3.1 Die Jump & Run GmbH hat gleichzeitig mit den beiden Konkurrenzunternehmen Nils & Abel AG und Banach Sport KG vor wenigen Monaten einen neuen Vitaminshake auf den Markt gebracht. Das monatliche Wechselverhalten der Kunden zwischen den Konkurrenzunternehmen wird durch die folgende Tabelle beschrieben.

Kundenwanderung	von Jump & Run	von Nils & Abel	von Banach Sport
nach Jump & Run	0,8	0,1	0,1
nach Nils & Abel	0,15	0,75	0,1
nach Banach Sport	0,05	0,15	0,8

3.1.1 Veranschaulichen Sie die beschriebene Kundenwanderung in einem Übergangsgraphen. 3

3.2 Die zur Tabelle gehörige Übergangsmatrix heißt M.

3.2.1 Berechnen Sie die Matrix M^{10} (Angaben auf zwei Nachkommastellen gerundet) und interpretieren Sie die Matrixelemente auf der Hauptdiagonalen im Sachzusammenhang. 4

3.2.2 Zurzeit hat die Jump & Run GmbH einen Marktanteil von 50 %, die Nils & Abel AG einen von 30 % und die Banach Sport KG einen von 20 %. Bestimmen Sie die Marktanteile der drei Unternehmen zwei Monate zuvor. 4

3.2.3 Nach einiger Zeit haben sich die Marktanteile stabilisiert. Prüfen Sie, ob es dann in Bezug auf den Vitaminshake einen Marktführer gibt. 4

3.3 Die Manufaktur der Jump & Run GmbH stellt bisher Mützen und Schals her. Dazu werden aus den Rohstoffen Schurwolle, Viskose und Baumwolle drei Garne ($Garn_1$, $Garn_2$ und $Garn_3$) mit unterschiedlicher Stärke gesponnen und anschließend gefärbt. Beim Stricken werden unterschiedliche Mengen der Garne verwendet. Neu im Portfolio sind Socken. Der zweistufige Produktionsprozess für ein Sockenpaar ist dem Verflechtungsdiagramm (vgl. Abb. 1) zu entnehmen.

Alle Werte sind in Mengeneinheiten (ME) angegeben.

Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR

Aufgabe 3 — Lineare Algebra (Fortsetzung)

3.3

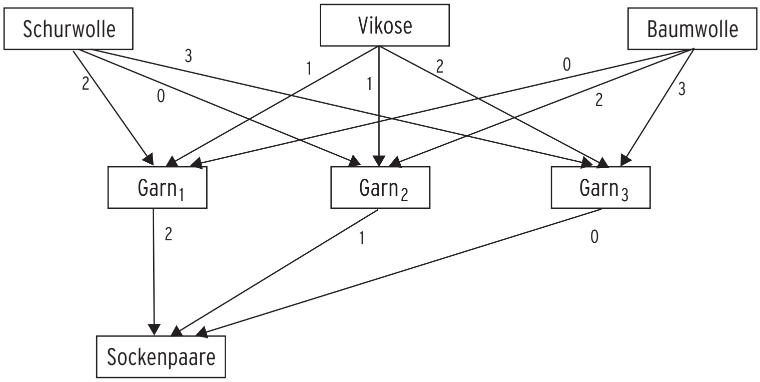


Abbildung 1: Verflechtungsdiagramm zur Herrstellung von Sockenpaaren

Die Rohstoffmengen für die Herstellung jeweils einer ME der Mützen und Schals sind in Tabelle 1 dokumentiert. Die ME für die Sockenpaare sind noch nicht erfasst.

	Sockenpaare	Mützen	Schals
Schurwolle		3	11
Viskose		6	9
Baumwolle		11	13

Tabelle 1: Rohstoffeinsatz pro einer ME des Endprodukts

Die Manufaktur hat eine Kundenanfrage über 200 ME von $Garn_1$, 100 ME von $Garn_2$ und 50 ME von $Garn_3$ sowie über 20 ME Sockenpaare, 30 ME Mützen und 20 ME Schals erhalten. Im Lager befinden sich jeweils 900 ME der drei verschiedenen Rohstoffe.
Im Rahmen des Produktionsprozesses müssen zwei Aufgaben erledigt werden:
Stellen Sie den zweistufigen Produktionsprozess für die Mützen und Schals dar, indem Sie das Verflechtungsdiagramm und die Tabelle vervollständigen.

3.3.1 Bestimmen Sie die ME der verschiedenen Rohstoffe, die nachbestellt werden müssen, damit die Manufaktur den Auftrag annehmen kann. 12

3.3.2 Der Einkaufspreis für Schurwolle ist so stark gestiegen, dass die Manufaktur dem Kunden anbietet, den Anteil an Schurwolle für die Textilien zu verringern.

Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR

Aufgabe 3 — Lineare Algebra (Fortsetzung)

Für die Erstellung des Alternativangebotes müssen im Vorwege einige Berechnungen durchgeführt werden. Die Verflechtungen für den veränderten Produktionsprozess wurden in den beiden Matrizen zusammengefasst: $A_{RZ,neu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Die Rohstoffkosten in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) liegen bei $\vec{k}_R = (0{,}5 \quad 0{,}2 \quad 0{,}3)$, die Fertigungskosten in GE/ME je Zwischenproduktart betragen $\vec{k}_Z = (1{,}2 \quad 1{,}6 \quad 2{,}2)$ und die Fertigungskosten in GE/ME je Endproduktart werden durch $\vec{k}_E = (2 \quad 3 \quad 3{,}5)$ angegeben. Die Fixkosten für das alternative Angebot betragen 200 GE.

Berechnen Sie die Gesamtkosten für die Erstellung des alternativen Angebotes.

5

Aufgabe 4 — Stochastik (32 Punkte)

Die Jump & Run GmbH stellt auch Korbanlagen für Basketball her. Der Korb wird mit Hilfe einer Halterung am Zielbrett befestigt. Bei der Produktion dieser Halterungen sind erfahrungsgemäß 4 % fehlerhaft und halten den Belastungsanforderungen nicht stand.

4.1 Für eine Großbestellung werden 160 Halterungen produziert.

4.1.1 Erläutern Sie, weshalb die Anzahl der fehlerhaften Halterungen als binomialverteilt angesehen werden kann. 2

4.1.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

Von den 160 Halterungen sind...

A: ...genau vier fehlerhaft.

B: ...mindestens fünf und höchstens sieben fehlerhaft.

C: ...mindestens 95 % fehlerfrei.

D: ...weniger als drei oder mehr als zehn Halterungen fehlerhaft. 6

4.2 Aus der laufenden Produktion werden zur Qualitätssicherung Stichproben gezogen.

4.2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Stichprobe von 50 Halterungen die Anzahl der fehlerhaften Halterungen höchstens um die Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht. 3

4.2.2 Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E bei einer weiteren Stichprobe gilt folgender Ansatz:

$$P(E) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^{10}$$

Beschreiben Sie das betrachtete Ereignis E im Sachzusammenhang. 2

Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR

Aufgabe 4 — Stochastik (Fortsetzung)

4.2 Aus der laufenden Produktion werden zur Qualitätssicherung Stichproben gezogen.

4.2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Stichprobe von 50 Halterungen die Anzahl der fehlerhaften Halterungen höchstens um die Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht. 3

4.2.2 Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E bei einer weiteren Stichprobe gilt folgender Ansatz:

$$P(E) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^{10}$$

Beschreiben Sie das betrachtete Ereignis E im Sachzusammenhang. 2

4.2.3 Bei einem Rundgang mit Geschäftskunden soll der laufenden Produktion eine Stichprobe entnommen werden. Bei dieser soll mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit höchstens eine fehlerhafte Halterung gefunden werden.
Bestimmen Sie den maximalen Umfang der Stichprobe. 4

4.3 Bei der Produktion der Korbanlangen treten neben den fehlerhaften Halterungen auch Materialfehler beim Zielbrett auf. Aus den Aufzeichnungen der Qualitätskontrolle ergibt sich, dass bei durchschnittlich 5 % der produzierten Korbanlagen mit fehlerhafter Halterung das Zielbrett ebenfalls fehlerhaft ist.
Bei durchschnittlich 5,3 % der Korbanlagen ist die Halterung zwar in Ordnung, dafür ist aber das Zielbrett fehlerhaft. Die Halterungen sind weiterhin durchschnittlich zu 4 % fehlerhaft.
Bezeichnung der Fehler: H: Halterung fehlerhaft Z: Zielbrett fehlerhaft

4.3.1 Erstellen Sie zur gegebenen Situation ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm oder eine Vierfeldertafel. 4

4.3.2 Berechnen Sie $P(\overline{Z} \cap \overline{H})$, $P_{\overline{H}}(\overline{Z})$ und $P_Z(\overline{H})$ und erläutern Sie die betreffenden Wahrscheinlichkeiten im Sachzusammenhang. 4

4.3.3 Beurteilen Sie, ob die beiden Fehler stochastisch unabhängig voneinander auftreten. 2

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

1.1 Analysis

1.1.1 Gleichung der Gesamtkostenfunktion K

Die Stammfunktion zur Grenzkostenfunktion lautet: $K(x) = 2x^3 - 6x^2 + 18x + d$

$K(2) = 30$ liefert $16 - 24 + 36 + d = 28 + d = 38$, also $d = 10$

Die Fixkosten betragen 10 GE,

also lautet die Gleichung $K(x) = 2x^3 - 6x^2 + 18x + 10$.

1.1.2 K steigt streng monoton

Untersuchung von K′ auf Nullstellen: $K'(x) = 0$ $\quad 6x^2 - 12x + 18 = 0$

Vereinfachung $\quad x^2 - 2x + 3 = 0$

Lösung mit abc-Formel ergibt $D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$ keine Lösung

oder

Lösung mit quadratischer Ergänzung: $\quad x^2 - 2x + 1 = 1 - 3 = -2$

$(x-1)^2 = -2$

Wegen $(x-1)^2 \geq 0$ hat die Gleichung keine Lösung.

Die Gleichung $K'(x) = 0$ ist unlösbar, also hat K′ keine Nullstellen. Da es sich um eine nach oben geöffnete Parabel ($y = K'(x)$) handelt, treten nur positive Werte auf. Damit ist K streng monoton steigend.

1.2 Analysis

1.2.1 Begründen oder widerlegen der Aussagen der bezogen auf die Funktion $G_a(x) = (10x - a) \cdot e^{-x}$, mit $a, x \in \mathbb{R}$ und $a \geq 1$, $x \geq 0$

A: Gewinnschwelle $\geq 0{,}2$

Bedingung: $G_a(x) = 0$ $\quad (10x - a) \cdot e^{-x} = 0$

Satz vom Nullprodukt: $e^{-x} > 0$ $\quad 10x - a = 0$

$x = \frac{a}{10}$

Da a auch 1 sein kann, kann die Gewinnschwelle auch bei a = 0,1 ME liegen. Aussage A ist damit falsch.

B: gewinnmaximale Ausbringungsmenge $\geq 1{,}1$

$G'_a(x) = (10x - a) \cdot (-1) \cdot e^{-x} + 10 \cdot e^{-x} = (-10x + 10 + a) \cdot e^{-x}$

notw. Bed.: $G'_a(x) = 0$ $\quad (-10x + 10 + a) \cdot e^{-x} = 0$

Satz vom Nullprodukt: $e^{-x} > 0$ $\quad -10x + 10 + a = 0$

$x = \frac{10 + a}{10} = 1 + \frac{a}{10}$

Da a größer oder gleich 1 ist, ist Aussage B wahr.

1.3 Lineare Algebra

1.3.1 LGS in Matrixform: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$

Umformung in die Diagonalform: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \end{array}\right)$

Lösung: x = 1; y = 0; z = 2

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

1.3.2 Einsetzen in $A \cdot A = E$: $\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + 2b & 2a \\ ab & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Man erhält 4 Gleichungen:

(1) $a^2 + 2b = 1$ (2) $2a = 0 \Rightarrow a = 0$ (3) $ab = 0$ (4) $2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

Aus (2) und (4) erhält man : $a = 0$ und $b = \frac{1}{2}$. Die Proben in (1) und (3) führen auf wahre Aussagen.

1.4 Stochastik

Aussage 1:

Die Summe der Balkenhöhen von $k = 0$ bis $k = 3$ ist zusammengenommen erkennbar höher als die Balkenhöhe bei $k = 6$. Also ist die Aussage richtig.

Aussage 2:

$P(X = 7) + P(X = 8) \approx 0{,}11 + 0{,}06 > 0{,}15$, also ist die Aussage 2 richtig.

Aussage 3:

$P(X \leq 4) + P(\geq 6) = 1 - P(X = 5)$

Die genannte Wahrscheinlichkeit ist die Gegenwahrscheinlichkeit zu $P(X = 5)$.

Man liest am Histogramm ab, dass $P(X = 5) < 0{,}2$.

Daher muss die genannte Wahrscheinlichkeit größer als 0,8 sein.

Die Aussage 3 ist falsch.

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR Lösungen

Aufgabe 2 – Analysis

2.1.1 Funktionsterm der Gewinnfunktion G mit Hilfe einer Regression

Eine kubische Regression ergibt

$G(x) = -0{,}0999x^3 + 0{,}4547x^2 + 0{,}5194x - 1{,}4741$ mit $r^2 = 0{,}9996$.

Der Wert r^2 liegt sehr nahe bei 1. Die Approximation ist also sehr gut.

2.1.2 $G(x) = -0{,}1\,x^3 + 0{,}45\,x^2 + 0{,}55x - 1{,}5$; $G'(x) = -0{,}3x^2 + 0{,}9x + 0{,}55$

Gewinnzone: $G(x) = 0$

Am Graphen von G ablesbar:

Gewinnschwelle: $x = 1{,}5$ ME,

Gewinngrenze: $x = 5$ ME.

Die Gewinnzone ist somit [1,5; 5].

Gewinnmaximale Ausbringungsmenge

Bedingung: $G'(x) = 0$ für $x = 3{,}52$

Gewinnmaximale Ausbringungsmenge: 3,52 ME

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR Lösungen

Aufgabe 2 – Analysis

2.2 $p_N(x) = -0{,}8\,x^2 - 4x + 130$; $p_A(x) = 0{,}35\,x^2 + 103$ mit $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$

2.2.1 Aussage (1): Der Schnittpunkt der Graphen von p_N und p_A liegt bei (3,409|107,065).

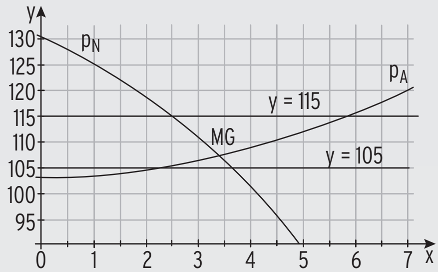
Da 1 ME 1000 Schlägern und 1 GE 1000 € entspricht, stimmt die Aussage.

Aussage (2): $p_N(x) = 105 \Rightarrow x = 3{,}624$

$p_A(x) = 105 \Rightarrow x = 2{,}390$

$3{,}624 - 2{,}390 = 1{,}234 > 1{,}0$

Der Nachfrageüberschuss beträgt 1234 Stück, die Aussage ist also falsch.



Aussage (3): Konsumentenrente:

$$\int_0^{3{,}409} p_N(x)dx - 3{,}409 \cdot 107{,}065 \approx 44{,}38$$

Produzentenrente: $3{,}409 \cdot 107{,}065 - \int_0^{3{,}409} p_A(x)dx \approx 9{,}24$

$5 \cdot 9{,}24 = 46{,}2 > 44{,}38$

Die Aussage ist damit falsch.

2.2.2 Betrag, der durch diesen Teilmarkt abgeschöpft wird

$p_N(x) = 115 \Rightarrow x = 2{,}5$

Die Abschöpfung beträgt ca. 20 GE: $2{,}5 \cdot (115 - 107) = 20$

Dies entspricht 20 000 €.

2.3 $a_w(t) = (1 + t) \cdot e^{-\frac{1}{w} \cdot t + 0{,}25}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$

2.3.1 notwendiger Wert von w

Bedingung: $a_w(3) = 3{,}5$ $\qquad (1 + 3) \cdot e^{-\frac{1}{w} \cdot 3 + 0{,}25} = 3{,}5$

$e^{-\frac{3}{w} + 0{,}25} = 0{,}875$

Logarithmieren: $\qquad -\frac{3}{w} + 0{,}25 = \ln(0{,}875)$

$\frac{3}{w} = 0{,}25 - \ln(0{,}875) \approx 0{,}384$

$w \approx 7{,}82$

2.3.2 Werte des Parameters w

Ableitung mit Produkt- und Kettenregel:

$$a_w(t) = (1 + t) \cdot (-\tfrac{1}{w}) \cdot e^{-\frac{1}{w} \cdot t + 0{,}25} + e^{-\frac{1}{w} \cdot t + 0{,}25} = (-\tfrac{t}{w} - \tfrac{1}{w} + 1) \cdot e^{-\frac{1}{w} \cdot t + 0{,}25}$$

Notw. Bedingung: $a'_w(t) = 0$ $\qquad -\frac{t}{w} - \frac{1}{w} + 1 = 0$ $\qquad (e^{-\frac{1}{w} \cdot t + 0{,}25} > 0)$

Satz vom Nullprodukt $\qquad t = w(-\frac{1}{w} + 1) = w - 1$

Hinr. Bedingung: $a''_w(t) \neq 0$

$$a''_w(w - 1) = (-\tfrac{2}{w} + \tfrac{1}{w^2} + \tfrac{w - 1}{w^2}) \cdot e^{-\frac{1}{w} \cdot (w - 1) + 0{,}25} = -\tfrac{1}{w} \cdot e^{-\frac{1}{w} \cdot (w - 1) + 0{,}25}$$

$a''_w(w - 1) < 0$ (Maximalstelle), wenn $w > 1$ wegen $t \geq 0$ $(t = w - 1)$

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR   Lösungen

Aufgabe 2 – Analysis   Fortsetzung

2.3.3 Gesamtabsatz für w = 4

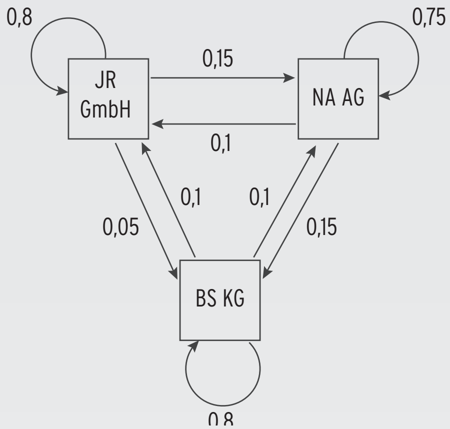
im ersten Halbjahr, d.h. von t = 0 bis t = 6

$$\int_0^6 a_4(t)\,dt \approx 13{,}07$$

Der Gesamtabsatz im ersten Halbjahr beträgt ca. 13 070 Badmintonbälle.

Aufgabe 3 – Lineare Algebra

3.1.1 Übergangsgraph



3.2.1 Berechnung der Matrixpotenz:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}75 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

mit GTR/CAS:

$$M^{10} = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}32 & 0{,}32 \\ 0{,}34 & 0{,}34 & 0{,}32 \\ 0{,}31 & 0{,}34 & 0{,}35 \end{pmatrix}$$

Interpretation

35 % der Kunden der Jump & Run GmbH sind auch nach 10 Monaten deren Kunden,

34 % der Kunden der Nils & Abel AG sind auch nach dieser Zeit deren Kunden und

35 % der Kunden der Banach Sport KG sind auch nach 10 Monaten deren Kunden.

3.2.2 Marktanteile der drei Unternehmen zwei Monate zuvor

Ansatz: $M^2 \cdot x_{-2} = x_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_{-2} = M^{-2} \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 0{,}6735 \\ 0{,}2001 \\ 0{,}1264 \end{pmatrix}$ $(M^2)^{-1} = M^{-2}$

Die Jump & Run GmbH hatte einen Marktanteil von ca. 67 %, die Nils & Abel AG

einen von ca. 20 % und die Banach Sport KG einen von ca. 13 %.

3.2.3 Ansatz: $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $x + y + z = 1$

Einsetzen ergibt ein LGS für x, y, z:

$0{,}8x + 0{,}1y + 0{,}1z = x$

$0{,}15x + 0{,}75y + 0{,}1z = y$ Matrixform $\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}15 & 0{,}75 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$0{,}05x + 0{,}15y + 0{,}8z = z$

$x + y + z = 1$

Das LGS hat die Lösung $x = y = z = \frac{1}{3}$.

In Bezug auf den Vitaminshake gibt es keinen Marktführer. Alle drei Firmen haben einen Marktanteil von ca. 33 %.

Hinweis: Eine Gleichung lassen wir weg, nur nicht die letzte. Probe in dieser Gleichung.

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR Lösungen

Aufgabe 3 –Lineare Algebra (Fortsetzung)

3.3.1 Zweistufigen Produktionsprozess darstellen und Tabelle vervollständigen

Matrix A_{RZ} aufstellen : $A_{RZ}=\begin{pmatrix}2&0&3\\1&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}$

Vektor B(Sockenpaare)$_{ZE}$ aufstellen: B(Socken)$_{ZE}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

Vektor C(Sockenpaare)$_{RE}$ berechnen: $\begin{pmatrix}2&0&3\\1&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$

Tabelle vervollständigen:

	Sockenpaare	Mützen	Schals
Schurwolle	4	3	11
Viskose	3	6	9
Baumwolle	2	11	13

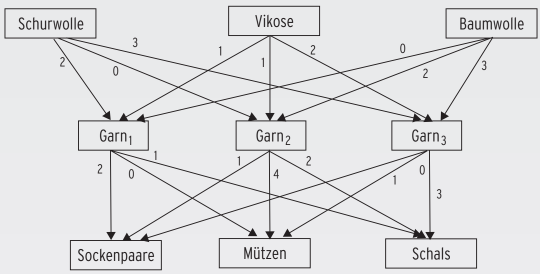
Verflechtungsdiagramm ergänzen

Matrix C_{RE} aufstellen: $C_{RE}=\begin{pmatrix}4&3&11\\3&6&9\\2&11&13\end{pmatrix}$

Matrix B_{RZ} bestimmen: $A_{RZ}\cdot B_{RZ} = C_{RE}$ $\quad |\cdot A_{RZ}^{-1}$ von links

$B_{RZ} = A_{RZ}^{-1}\cdot C_{RE}$ $\qquad B_{RZ}=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&4&2\\0&1&3\end{pmatrix}$

Verflechtungsdiagramm darstellen



Bestimmen der zu bestellenden Rohstoffmengen

Rohstoffmengen für die Zwischenprodukte: $\vec{r_1} = A_{RZ}\cdot\overrightarrow{m_Z}$ $\qquad \vec{r_1}=\begin{pmatrix}2&0&3\\1&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}200\\100\\50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}550\\400\\350\end{pmatrix}$

Rohstoffmengen für die Endprodukte: $\vec{r_2} = C_{RE}\cdot\overrightarrow{m_E}$ $\qquad \vec{r_2}=\begin{pmatrix}4&3&11\\3&6&9\\2&11&13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}20\\30\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}390\\420\\630\end{pmatrix}$

Rohstoffbedarf gesamt: $\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{r_2} = \begin{pmatrix}550\\400\\350\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}390\\420\\630\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}940\\820\\980\end{pmatrix}$

Nachbestellung ermitteln: $\begin{pmatrix}900\\900\\900\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}940\\820\\980\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-40\\80\\-80\end{pmatrix}$

Es müssen 40 ME Schurwolle und 80 ME Baumwolle nachbestellt werden, damit die Manufaktur den Auftrag annehmen kann.

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR Lösungen

Aufgabe 3 –Lineare Algebra (Fortsetzung)

3.3.2 **Berechnen der Gesamtkosten für das alternative Angebot**

Rohstoffkosten der Zwischenprodukte

$$\vec{k}_R \cdot A_{RZ,neu} \cdot \overrightarrow{m_Z} = (0{,}5 \quad 0{,}2 \quad 0{,}3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} = 375$$

Fertigungskosten der Zwischenprodukte

$$\vec{k}_Z \cdot \overrightarrow{m_Z} = (1{,}2 \quad 1{,}6 \quad 2{,}2) \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} = 510$$

Rohstoffkosten der Endprodukte

$$\vec{k}_R^{\,T} \cdot A_{RZ,neu} \cdot B_{ZE} \cdot \overrightarrow{m_E} = \vec{k}_R^{\,T} \cdot C_{RE} \cdot \overrightarrow{m_E}$$

$$= (0{,}5 \quad 0{,}2 \quad 0{,}3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 6 & 11 & 15 \\ 1 & 7 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = 405$$

Fertigungskosten der 2. Produktionsstufe

$$\vec{k}_Z \cdot B_{ZE} \cdot \overrightarrow{m_E} = (1{,}2 \quad 1{,}6 \quad 2{,}2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = 558$$

Fertigungskosten der Endprodukte

$$\vec{k}_E \cdot \overrightarrow{m_E} = (2 \quad 3 \quad 3{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = 200$$

Gesamtkosten

$K_v = 375 + 510 + 405 + 558 + 200 = 2\,048$

$K_{Gesamt} = K_v + K_{fix} = 2\,048 + 200 = 2\,248$

Es fallen Gesamtkosten in Höhe von 2 248 GE an.

Alternative für Auftrag $\overrightarrow{m_E}$:

$(\vec{k}_R \cdot C_{RE} + \vec{k}_Z \cdot B_{ZE} + \vec{k}_E) \cdot \overrightarrow{m_E} = 1163$

$K = (375 + 510 + 1163) = 2248$

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2021

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR Lösungen

Aufgabe 4 – Stochastik

4.1.1 Nach der Produktion kann die Halterung nur entweder fehlerhaft oder fehlerfrei sein. Außerdem beeinflusst die Produktion einer Halterung nicht die der folgenden.

4.1.2 X: Anzahl der fehlerhaften Halterungen, X ist binomialverteilt mit $n = 160$ und $p = 0{,}04$

A: $P(A) = P(X = 4) \approx 0{,}1155$

B: $P(B) = P(5 \leq X \leq 7) \approx 0{,}4597$

Y: Anzahl der fehlerfreien Halterungen, Y ist binomialverteilt mit $n = 160$ und $p = 0{,}96$

C: $P(C) = P(Y \geq 0{,}95 \cdot 160) \approx 0{,}8071$

X: Anzahl der fehlerhaften Halterungen, X ist binomialverteilt mit $n = 160$ und $p = 0{,}04$

D: $P(D) = P(X \leq 2) + P(X \geq 11) \approx 0{,}0433 + 0{,}0576 = 0{,}1009$

4.2.1 X: Anzahl der fehlerhaften Halterungen, X ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0{,}04$

Erwartungswert $E(X) = \mu = 50 \cdot 0{,}04 = 2$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0{,}04 \cdot (1 - 0{,}04)} \approx 1{,}39$

Intervall: $[2 - 1{,}39; 2 + 1{,}39] = [0{,}61; 3{,}39] = [1; 3]$ (ganzzahlige Grenzen)

Die Intervallgrenzen müssen nach innen gerundet werden, da die Anzahl der Abweichungen kleiner als die Standardabweichung sein muss.

$P(1 \leq X \leq 3) \approx 0{,}731$ Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 0,73.

4.2.2 E: Mindestens eine von 10 untersuchten Aufhängungen ist fehlerhaft.

X: Anzahl der fehlerhaften Halterungen, X ist binomialverteilt mit n und $p = 0{,}04$

$n = 9$: $P(X \leq 1) \approx 0{,}9522 \geq 0{,}95$

$n = 10$: $P(X \leq 1) \approx 0{,}9418 < 0{,}95$

Es sollten höchstens 9 Halterungen entnommen werden.