

Bohner | Ott | Deusch | Rosner

Arbeitsheft

Mathematik – Jahrgangsstufen 1 und 2

Grundlegendes Anforderungsniveau

Berufliches Gymnasium
Baden-Württemberg

Analysis

Vektorielle Geometrie

Stochastik



Merkur 
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis **Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †**

Verfasser:

Kurt Bohner

Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Ronald Deusch

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner

Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Umschlag: © frhuynk - Fotolia.com

* * * * *

1. Auflage 2022

© 2022 by Merkur Verlag Rinteln

Gesamtherstellung:

Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de

lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr: 2339-01-DS

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|-----|--|-----|
| I | Analysis | 4 |
| 1 | Trigonometrische Funktionen und zugehörige Gleichungen | 4 |
| 2 | Verknüpfung und Verkettung von Funktionen | 17 |
| 3 | Differenzialrechnung | 18 |
| 4 | Integralrechnung | 45 |
| II | Vektorielle Geometrie | 65 |
| 1 | Lineare Gleichungssysteme | 65 |
| 2 | Vertiefung der Vektoriellen Geometrie | 70 |
| III | Stochastik | 88 |
| 1 | Umgang mit Zufall und Wahrscheinlichkeit | 88 |
| 2 | Binomialverteilung | 104 |

Lösungen herausnehmbar

Einleitung

Das Arbeitsheft dient zur Aufbereitung, Wiederholung und Festigung des im Schülerbuch behandelten Lernstoffs. Es soll parallel zum Schülerbuch verwendet werden.


Die begleitende Unterstützung durch die Lehrkraft ist gewünscht und sehr sinnvoll.

Das Arbeitsheft enthält ergänzende Aufgaben zur Wiederholung und ermöglicht eine Lernkontrolle in Eigenverantwortung. Das im Vergleich zum Schülerbuch veränderte Format und die Form der Darstellung wirken motivierend auf Schüler/innen.

Einige Aufgaben beinhalten fächerübergreifende Aspekte in Handlungssituationen.

Das Arbeitsheft hilft, das Erlernte zu festigen und damit eine gute Grundlage für die Jahrgangsstufe und das Abitur zu schaffen.

Die Lösungen sind eingelegt und damit herausnehmbar.

 Videos dienen der Veranschaulichung von Problemen und Erläuterung von Lösungswegen. Sie unterstützen die Lernenden beim Entdecken und Verstehen mathematischer Zusammenhänge. Damit ist das Arbeitsheft zum Fernlernen und Homeschooling bestens geeignet.

I Analysis

1 Trigonometrische Funktionen und zugehörige Gleichungen



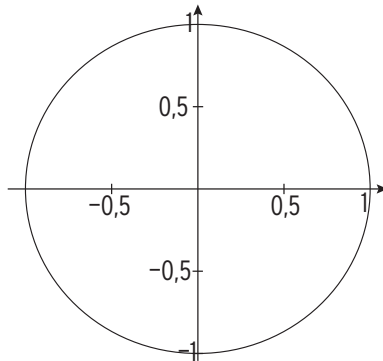
Definition der Winkelfunktionen

1 Zeichnen Sie den Winkel α ein und bestimmen Sie $\sin(\alpha)$ bzw. $\cos(\alpha)$.

a) $\alpha = 70^\circ$

$\sin(\alpha) \approx$

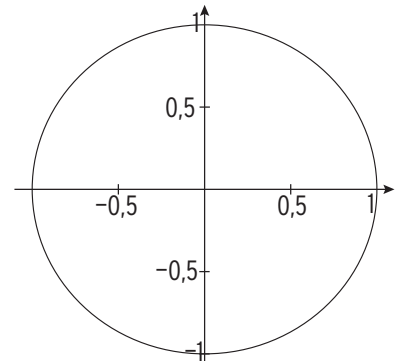
$\cos(\alpha) \approx$



b) $\alpha = 120^\circ$

$\sin(\alpha) \approx$

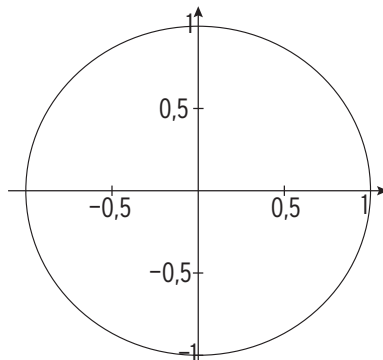
$\cos(\alpha) \approx$



c) $\alpha = 200^\circ$

$\sin(\alpha) \approx$

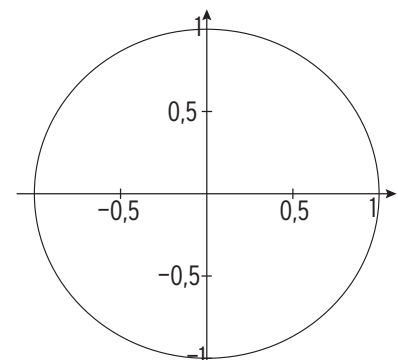
$\cos(\alpha) \approx$



d) $\alpha = 280^\circ$

$\sin(\alpha) \approx$

$\cos(\alpha) \approx$

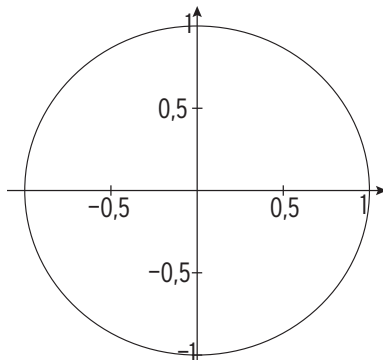


2 Zeichnen Sie den Winkel x (im Bogenmaß) ein und bestimmen Sie $\sin(x)$ bzw. $\cos(x)$.

a) $x = 0,7$

$\sin(0,7) \approx$

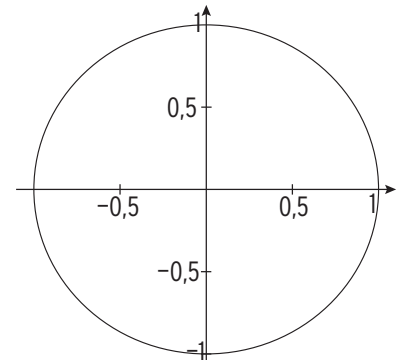
$\cos(0,7) \approx$



b) $x = \frac{\pi}{2}$

$\sin(\frac{\pi}{2}) =$

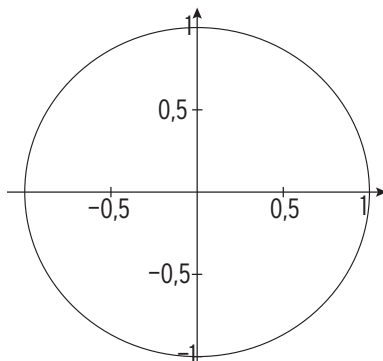
$\cos(\frac{\pi}{2}) =$



c) $x = 3,9$

$\sin(3,9) \approx$

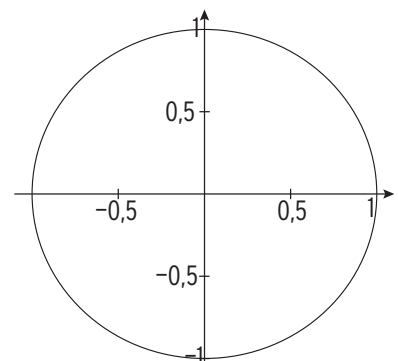
$\cos(3,9) \approx$



d) $x = 2\pi$

$\sin(2\pi) =$

$\cos(2\pi) =$



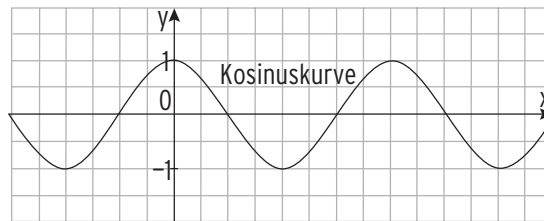
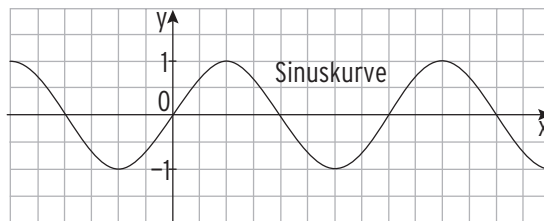
3 Vervollständigen Sie die Tabelle mithilfe eines Hilfsmittels.

| α | x | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
|-------------|------------------|-----------|-----------|
| 60° | $\frac{1}{3}\pi$ | 0,866 | 0,5 |
| 20° | | | |
| 90° | | | |
| 120° | | | |

| α | x | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
|----------|------------------|-----------|-----------|
| | 1 | | |
| | $\frac{1}{6}\pi$ | | |
| | 2,5 | | |
| | 5 | | |

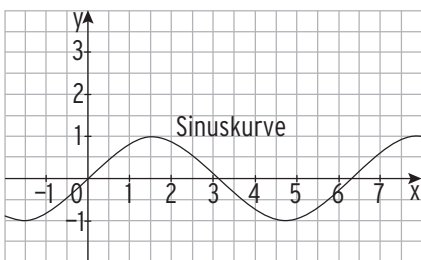
4 Vervollständigen Sie die Tabelle. Skalieren Sie die x-Achse.

| x | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
|-------------------|-----------|-----------|
| 0 | 0 | 1 |
| 2π | | |
| π | | |
| $\frac{1}{2}\pi$ | | |
| $-\frac{1}{2}\pi$ | | |
| $-\frac{3}{2}\pi$ | | |
| $\frac{5}{2}\pi$ | | |
| 7π | | |
| 12π | | |

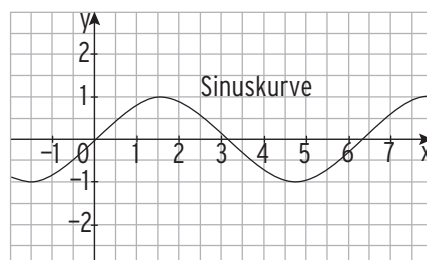


5 Zeichnen Sie den Graphen von f ein.

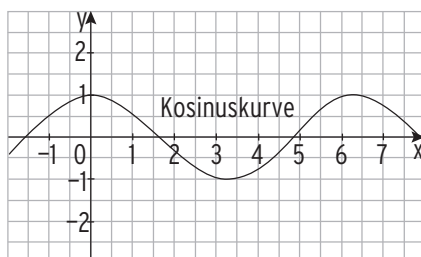
a) $f(x) = 2\sin(x) + 1$



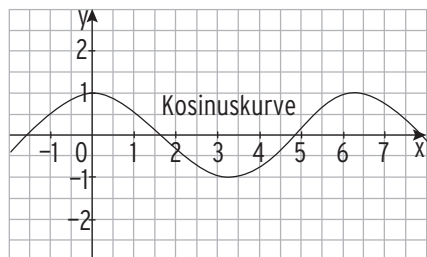
b) $f(x) = -1,5\sin(x)$



c) $f(x) = 0,5\cos(x)$



d) $f(x) = -\cos(x) - 1$



I Analysis

.....

6 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$.

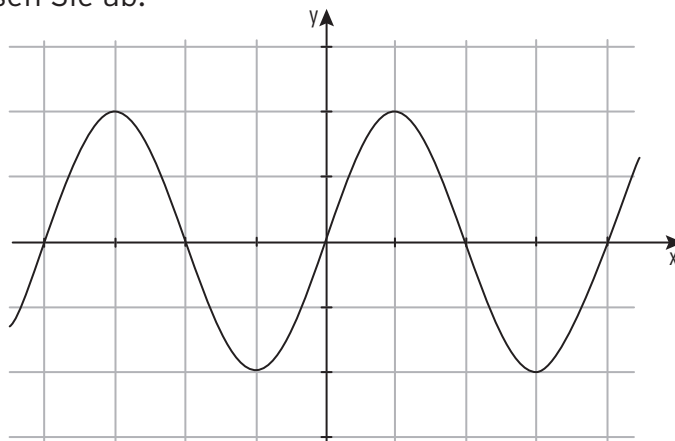
Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:

$$\sin(2\pi) =$$

$$\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) =$$

$$\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) =$$

$$\sin(-\pi) =$$



7 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Kosinusfunktion f mit $f(x) = \cos(x)$.

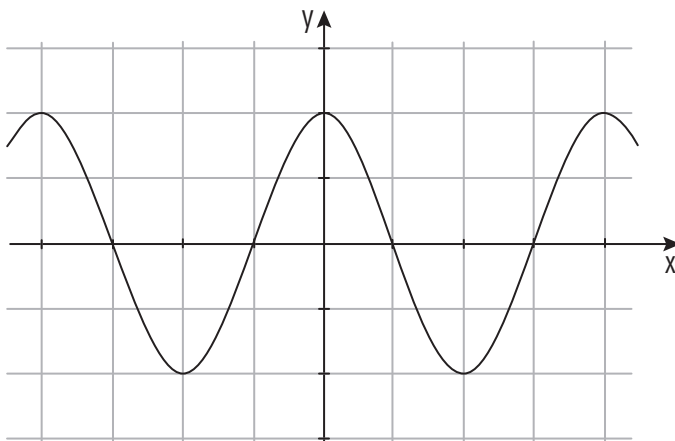
Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:

$$\cos(2\pi) =$$

$$\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) =$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) =$$

$$\cos(-\pi) =$$



8 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$.

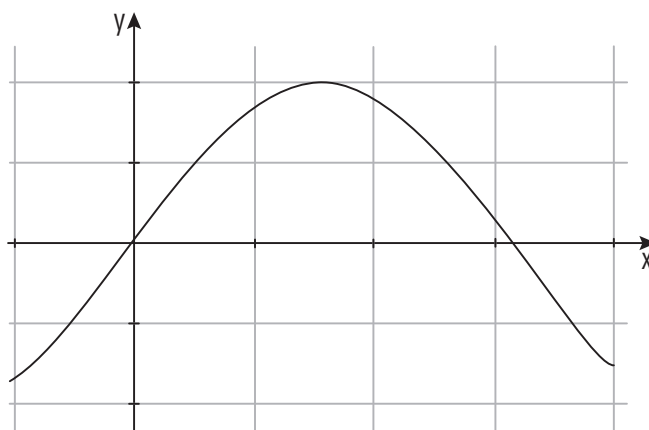
Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:

$$\sin(2) =$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) =$$

$$\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) =$$

$$\sin\left(-\frac{1}{2}\right) =$$





Transformationen

1 Geben Sie die Amplitude a und die Periode p der Funktion f an.

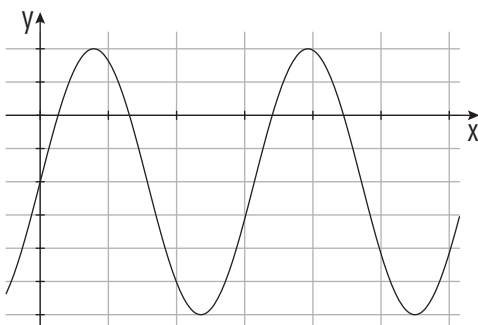
| Funktionsterm | a | p | Funktionsterm | a | p |
|------------------------------|------------|------------------------|--|-----|-----|
| $f(x) = 0,25\sin(\pi x)$ | $a = 0,25$ | $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ | $f(x) = -5\cos(\frac{\pi}{2}x)$ | | |
| $f(x) = 6\cos(5x)$ | | | $f(x) = 1,6\sin(3x)$ | | |
| $f(x) = -4\sin(\frac{x}{3})$ | | | $f(x) = -\frac{4}{3}\sin(\frac{x}{2})$ | | |
| $f(x) = 3\cos(2x)$ | | | $f(x) = \cos(x) + 1$ | | |

2 Geben Sie den Funktionsterm einer Sinusfunktion bzw. einer Kosinusfunktion mit der Periode p und der Amplitude a an.

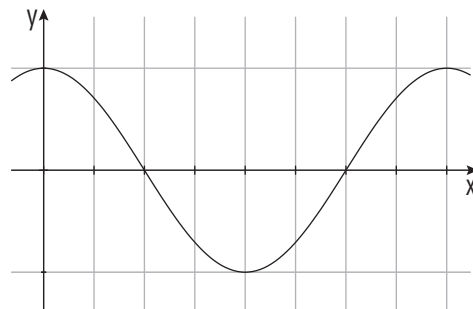
| a | p | Sinusfunktion | a | p | Kosinusfunktion |
|-----------|----------------------|-----------------------|-------------------|-------------------|-----------------------------|
| $a = 2$ | $p = 2$ | $f(x) = 2\sin(\pi x)$ | $a = 6$ | $p = 4\pi$ | $f(x) = 6\cos(\frac{x}{2})$ |
| $a = \pi$ | $p = 1$ | | $a = 4$ | $p = 4$ | |
| $a = 0,5$ | $p = \frac{2}{3}\pi$ | | $a = \frac{5}{2}$ | $p = \frac{3}{4}$ | |

3 Beschriften Sie die Koordinatenachsen.

$$f(x) = 4\sin(x) - 2$$



$$f(x) = 0,5\cos(0,5x)$$



4 Geben Sie den zugehörigen Funktionsterm an. Der Graph von f mit $f(x) = \sin(x)$ wird

- a) um 2 nach links und um 0,5 nach unten verschoben. $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- b) an der x -Achse gespiegelt und dann um 1 nach oben verschoben. $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- c) mit Faktor 3 in y -Richtung gestreckt und dann um 3 nach links verschoben. $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- d) mit Faktor 2 in x -Richtung gestreckt und dann um 3 nach unten verschoben. $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

I Analysis

.....

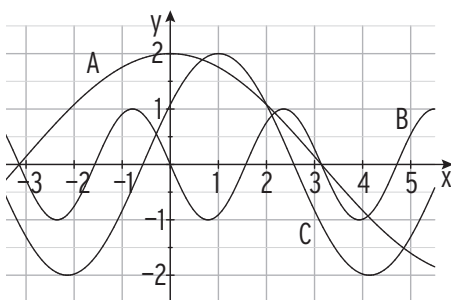
5 Ergänzen Sie die folgenden Sätze.

- a) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 0,5\sin(x) - 1$ entsteht aus der Sinuskurve ($y = \sin(x)$) durch Streckung mit dem Faktor ____ in ____-Richtung und durch Verschiebung um ____ nach _____.
- b) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -3\cos(2x) + 4$ entsteht aus der Kosinuskurve ($y = \cos(x)$) durch Spiegelung an der ____-Achse, durch Streckung mit dem Faktor ____ in ____-Richtung, Streckung mit dem Faktor ____ in ____-Richtung und durch Verschiebung um ____ nach _____.
- c) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2\cos(x + 4) + 5$ entsteht aus der Kurve mit $y = \cos(x)$ durch Streckung mit dem Faktor ____ in ____-Richtung, durch Verschiebung um ____ nach ____ und durch Verschiebung um ____ nach _____.
- d) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 5\sin(0,5x) - 1$ entsteht aus der Kurve mit $y = \sin(x)$ durch Streckung mit dem Faktor ____ in ____-Richtung, durch Streckung mit dem Faktor ____ in ____-Richtung und durch Verschiebung um ____ nach _____.

6 Wie geht der Graph von g aus dem Graphen von f mit $f(x) = \sin(x)$ hervor?

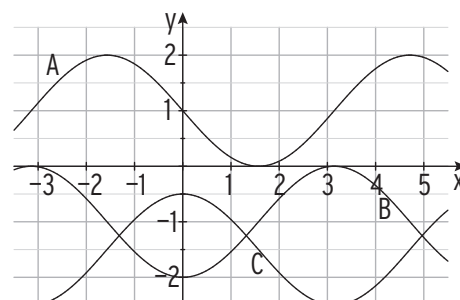
| | |
|------------------------------|--|
| $g(x) = 2\sin(x) + 1$ | |
| $g(x) = -3\sin(4x) + 2$ | |
| $g(x) = 0,25\sin(x - 3) + 5$ | |
| $g(x) = 2,5\sin(2x) - 3$ | |
| $g(x) = \cos(x) - 1$ | |

7 Ordnen Sie zu.



___: $f(x) = 2\cos(0,5x)$ ___: $g(x) = -\sin(2x)$

___: $h(x) = 2\cos(x-1)$



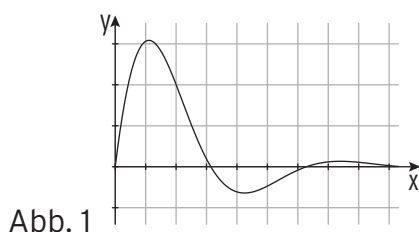
___: $f(x) = -\cos(x) - 1$; ___: $g(x) = \cos(x) - 1,5$

___: $h(x) = -\sin(x) + 1$

8 Sind die Aussagen falsch (f) oder wahr (w)?

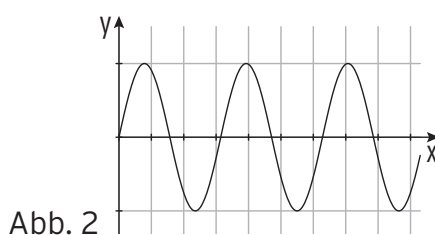
| | |
|--|---|
| a) Durch eine Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{3}{2}$ vergrößert sich die Amplitude einer Funktion. | <input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f |
| b) Durch eine Streckung in x-Richtung mit Faktor 2 vergrößert sich die Periodenlänge einer Funktion. | <input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f |
| c) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 3\sin(3x)$ geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung mit Faktor 3 in x- und y-Richtung hervor. | <input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f |
| d) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2\sin(x+1)$ geht aus der Sinuskurve durch Streckung in x-Richtung und Verschiebung um eine Einheit nach links vor. | <input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f |
| e) f mit $f(x) = 2\sin(x) + 1$ hat den Wertebereich $[-2; 2]$. | <input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f |
| f) Die Funktion f mit $f(x) = a\sin(x) + 4$ hat für $a > 0$ den Wertebereich $[4 - a; 4 + a]$. | <input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f |

9 Die Abbildungen zeigen Ausschnitte von Schaubildern.
Welche der Schaubilder gehören zu periodischen Funktionen?
Entscheiden und begründen Sie.



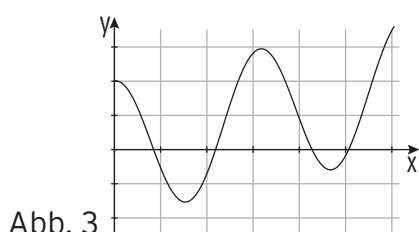
- periodisch
 nicht periodisch

Begründung:



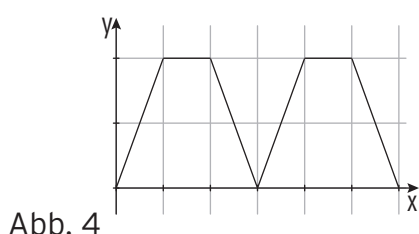
- periodisch
 nicht periodisch

Begründung:



- periodisch
 nicht periodisch

Begründung:



- periodisch
 nicht periodisch

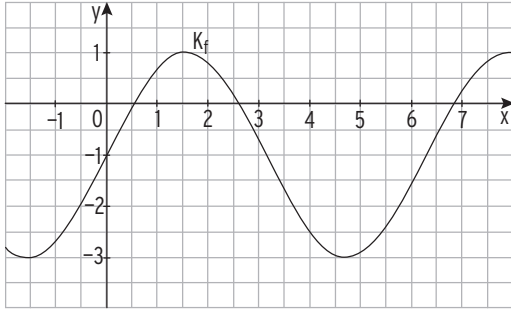
Begründung:



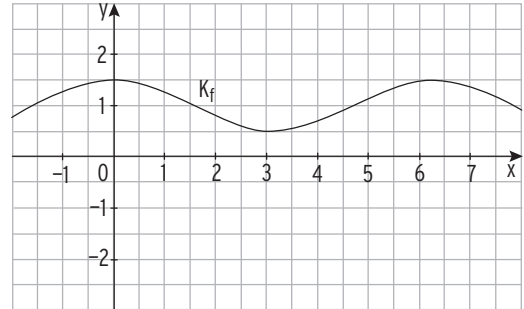
Aufstellen von Funktionstermen

1 Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm der Form $f(x) = a \sin(x) + c$
bzw. $f(x) = a \cos(x) + c$.

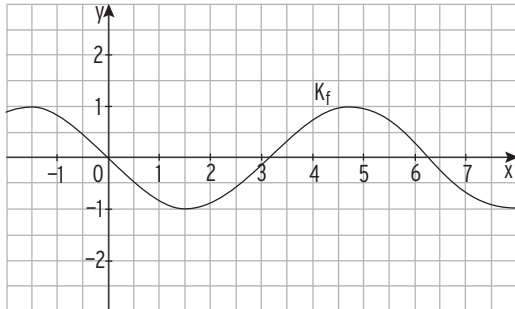
a) $f(x) =$ _____



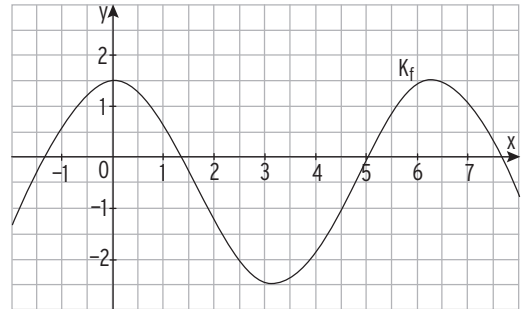
b) $f(x) =$ _____



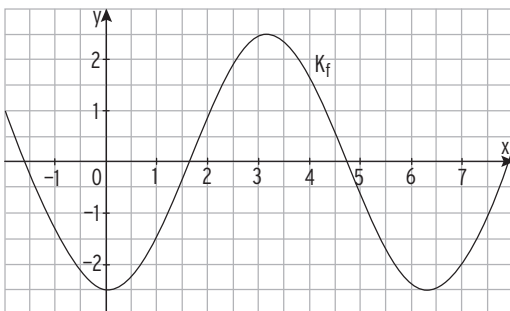
c) $f(x) =$ _____



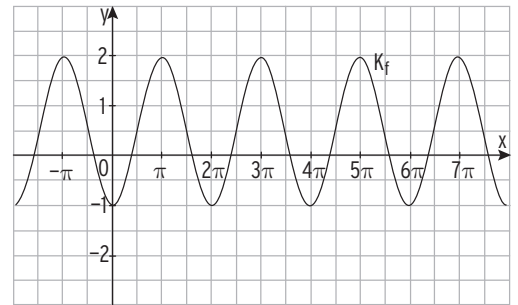
d) $f(x) =$ _____



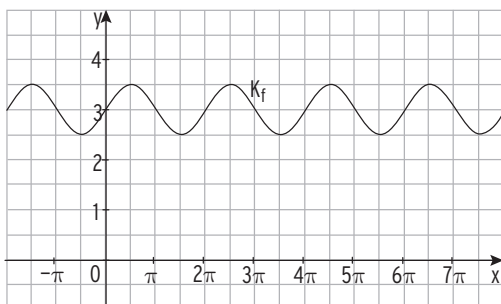
e) $f(x) =$ _____



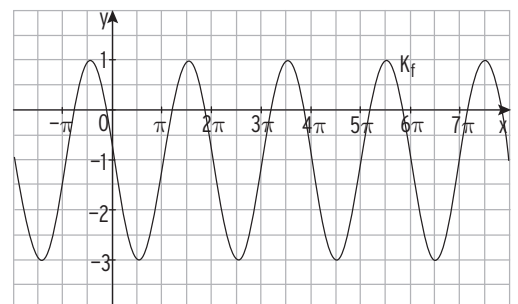
f) $f(x) =$ _____



g) $f(x) =$ _____



h) $f(x) =$ _____





Aufstellen von Funktionstermen

1 Formulieren Sie Bedingungen mithilfe des Textes. Das Schaubild von f ...

| | |
|---|----------------------------|
| hat den Hochpunkt $H(2 \mid 3)$. | $f(2) = 3$ und $f'(2) = 0$ |
| hat den Wendepunkt $W(-1 \mid 6)$. | |
| hat den Tiefpunkt $T(-2 \mid 1)$. | |
| berührt die x-Achse an der Stelle $x = 5$. | |
| hat an der Stelle $x = 1$ die Steigung -4 . | |
| hat einen Extrempunkt an der Stelle $x = \sqrt{2}$. | |
| hat an der Stelle $x = 0$ die Tangente mit der Gleichung $y = 3x - 4$ | |
| verläuft an der Stelle $x = -4$ parallel zur 1. Winkelhalbierenden. | |
| hat an den Stellen $x = 1$ und $x = 3$ dieselbe Steigung. | |
| ist an der Stelle $x = 1$ rechtsgekrümmt. | |

2 Das Schaubild der Funktion p mit $p(x) = ax^4 + cx^2 - \frac{7}{4}$ hat den Tiefpunkt $T(2 \mid -3)$.

Berechnen Sie die Werte von a und c und geben Sie den Funktionsterm an.

Ableitung:

Bedingungen:

Lineares Gleichungssystem:

Lösung des linearen Gleichungssystems:

Funktionsterm:

6 Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

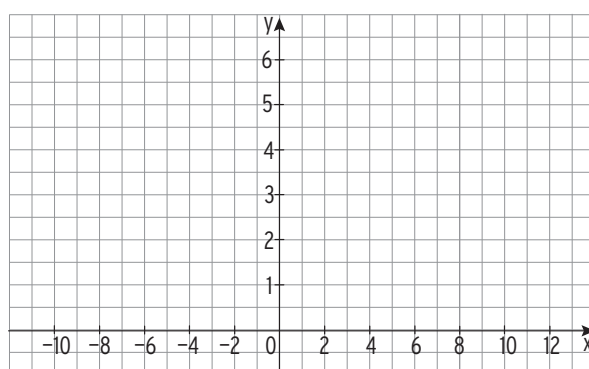
- (1) $f(2) = 1$
- (2) $f'(2) = 0$
- (3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$
- (4) Für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$ gilt: $f(x) \rightarrow 5$

Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat. Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen.

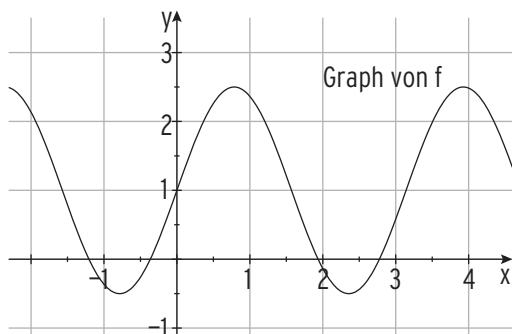
Lösung:

Skizze:

- (1) _____
- (2) _____
- (3) _____
- (4) _____



7 Bestimmen Sie den Funktionsterm mithilfe der Abbildung.



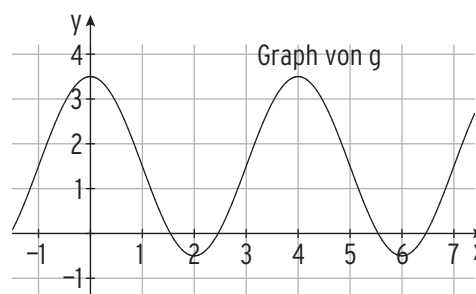
Ansatz: $f(x) = a \sin(bx) + d$

Amplitude: _____

Periode: _____

Mittellinie: _____

Funktionsterm: _____



Ansatz: $g(x) = a \cos(bx) + d$

Amplitude: _____

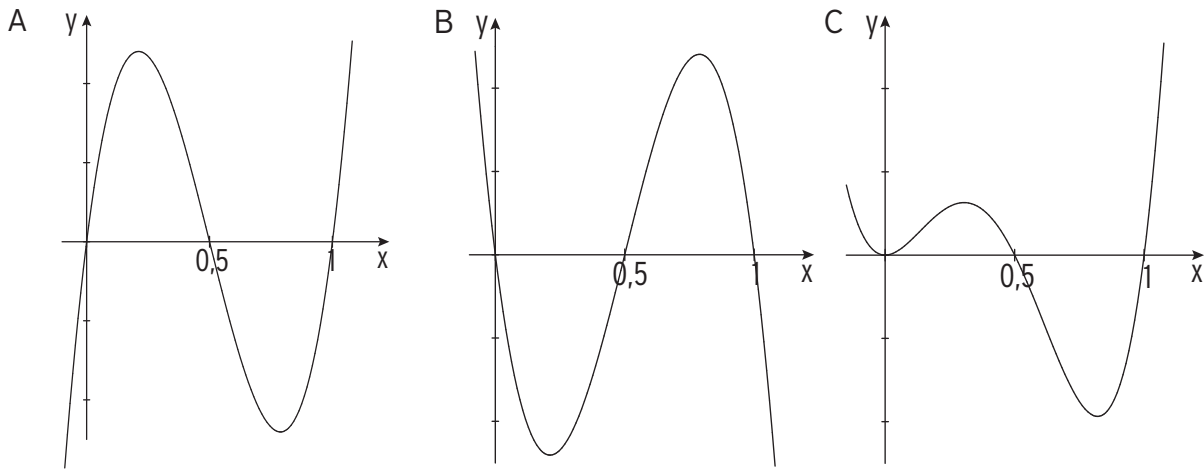
Periode: _____

Mittellinie: _____

Funktionsterm: _____

11 Eine der folgenden Abbildungen gehört zum Schaubild der Funktion f mit $f(x) = x(x - b)(x - 2b)$; $x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie den entsprechenden Wert für b und begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen nicht zu einem Schaubild von f gehören können.



Lösung: $b =$

Begründung:

12 Bei der Überprüfung der Kosten- und Gewinnsituation erhält die Buchhaltung folgende Angaben: Die Gesamtkosten lassen sich beschreiben durch die Funktion K mit $K(x) = x^3 - 6x^2 + cx + d$, wobei x die produzierte Menge in Mengeneinheiten (ME) bezeichnet. Bei einer Produktionsmenge von 4 ME betragen die Stückkosten 10 Geldeinheiten (GE) und der momentane Kostenzuwachs liegt bei 15 GE/ME.

Ermitteln Sie eine Polynomfunktion dritten Grades, die den Zusammenhang zwischen Produktionsmenge und Gesamtkostenfunktion beschreibt.

Lösung

Bedingungen:

Lineares Gleichungssystem:

Lösung des linearen Gleichungssystems:

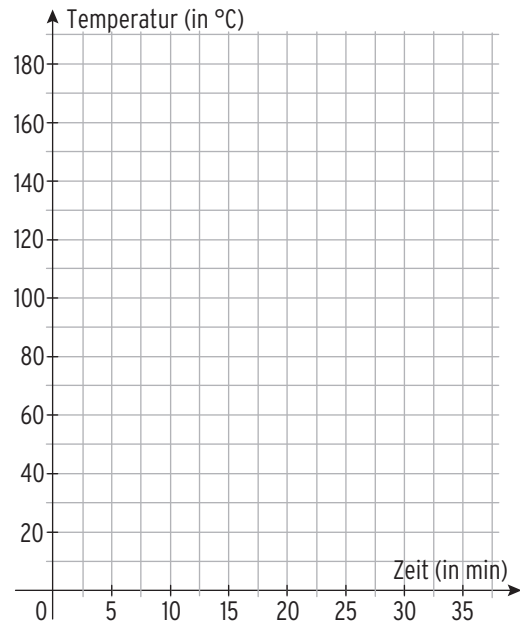
Funktionsterm:

Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben

- 1 Eine heiße Pizza wird aus dem Ofen genommen und auf einen Teller gelegt. Die Tabelle enthält die Temperatur der Pizza zu verschiedenen Zeitpunkten.

| | | | | | | | |
|------------------|-----|------|------|------|------|------|------|
| Zeit t (in min) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| Temperatur in °C | 175 | 82,8 | 46,4 | 31,1 | 25,1 | 21,8 | 20,7 |

- a) Stellen Sie den Abkühlungsprozess im Koordinatensystem dar.
- b) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate in den ersten 5 Minuten.
- _____
- c) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate zwischen der 15. und der 20. Minute.
- _____
- d) Die mittlere Änderungsrate ist negativ, da
- _____ .



- e) Begründen Sie anhand der obigen Wertetabelle, dass der Vorgang nicht durch eine Funktion f mit $f(t) = a \cdot e^{kt}$ bzw. $f(t) = a \cdot b^t$ modelliert werden kann.
- Begründung durch Rechnung:** Die prozentuale Temperaturverringering beträgt in den ersten 5 Minuten _____ % pro Minute und von der 15. bis zur 20. Minute _____ % pro Minute. Da dieser Wert nicht _____ ist, kann der Prozess nicht durch einen solchen Funktionsterm modelliert werden.
- Begründung durch Argumentation:** Ein solcher Funktionsterm ist zur Modellierung ungeeignet, da die x-Achse _____ ist und sich die Temperatur somit langfristig dem Wert ____°C annähern würde, was unrealistisch ist.
- f) Nehmen Sie eine Zimmertemperatur von 20 °C an und ermitteln Sie einen geeigneten Funktionsterm durch Regression. Da der WTR durch Regression nur einen Funktionsterm der Form $f(t) = a \cdot e^{kt}$ bzw. $f(t) = a \cdot b^t$ ermitteln kann, müssen bei der Eingabe alle Temperaturwerte um 20°C vermindert werden.
- Insgesamt erhält man: $f(t) = \text{_____} + 20$.

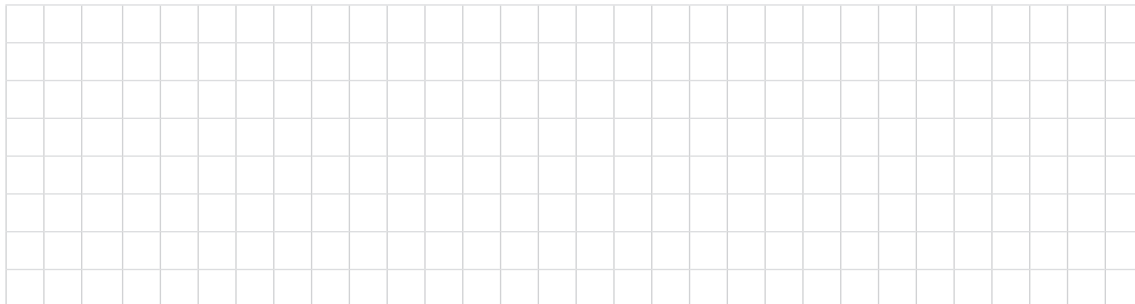
- g) Lisa behauptet: „Die Pizza kühlt nicht mehr als 25 °C pro Minute ab“. Bestätigen oder widerlegen Sie diese Behauptung rechnerisch, anhand der Funktion f.

Die stärkste Abkühlung findet zwischen $t = \underline{\quad}$ und $t = \underline{\quad}$ statt.

Hier beträgt die Abkühlung: _____ .

Somit ist die Behauptung _____ .

- h) Beurteilen Sie die Modellierung des Abkühlungsprozesses durch die Funktion f.



- 2 Ordnen Sie durch Pfeile zu.

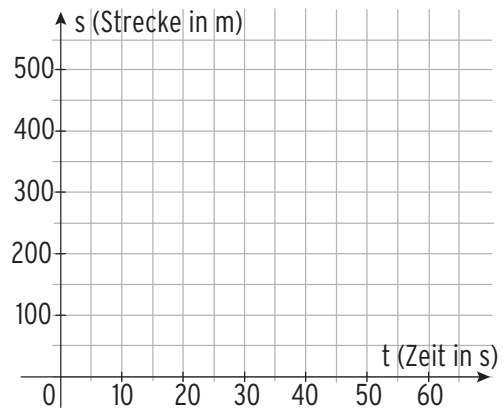
| Bedeutung von $f(x)$ | | Bedeutung von $f'(x)$ | |
|------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------------------|
| Tankinhalt | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Zufluss- bzw. Abflussgeschwindigkeit |
| Höhe einer Pflanze | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Grenzkosten |
| Wassermenge in der Badewanne | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Momentaner Kraftstoffverbrauch |
| Produktionskosten | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Momentane Stromstärke |
| Vorhandene Ladung | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Wachstumsgeschwindigkeit |
| Gesamtabsatz | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Absatzzahlen pro Woche |
| Anzahl der vorhandenen Atome | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Leistung |
| Energie | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Zerfallsrate |
| Gefahrenre Strecke | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Geschwindigkeit |

I Analysis

.....

3 Ein Zug fährt ab. Innerhalb der ersten 60 Sekunden kann die zurückgelegte Strecke s (in m) in Abhängigkeit von der Zeit t (in s) durch die Funktion s mit $s = \frac{1}{4}t^2$ dargestellt werden.

- a) Stellen Sie den Vorgang im Koordinatensystem dar.
- b) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von s in den ersten 2 Sekunden und in den nächsten 2 Sekunden.



c) Die mittlere Änderungsrate von s gibt die durchschnittliche _____ des Zuges im entsprechenden Zeitraum an.

Die mittlere Änderungsrate steigt, somit _____.

fällt

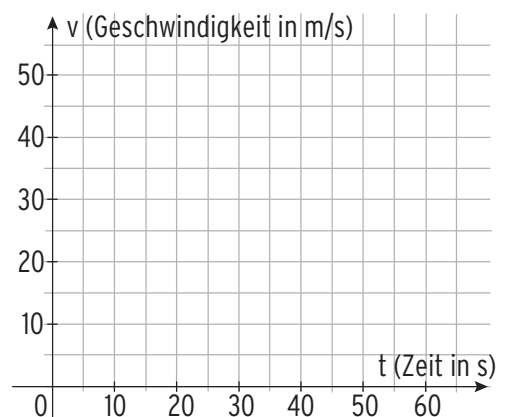
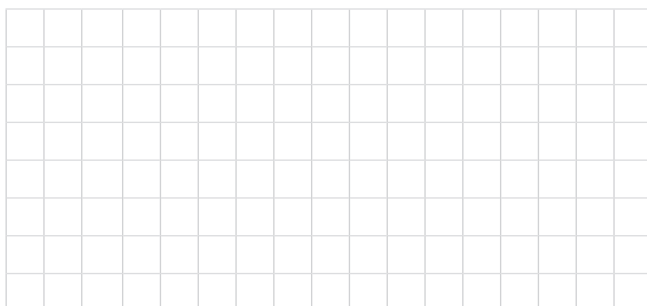
d) Berechnen Sie die momentane Geschwindigkeit des Zuges nach 20 s (näherungsweise), mithilfe der mittleren Änderungsrate im Intervall $[19,9; 20,1]$:

_____.

e) Berechnen Sie die momentane Geschwindigkeit des Zuges nach 20 s mit Hilfe der Ableitungsfunktion. Es gilt _____

und somit _____.

f) Stellen Sie die Entwicklung der momentanen Geschwindigkeit des Zuges im Koordinatensystem dar.

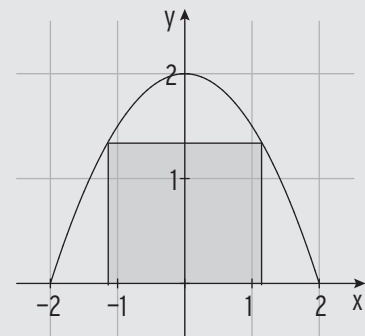




mvurl.de/9sxxg

Extremwertaufgaben

1 Aus einem Werkstück soll ein Rechteck heraus gefräst werden. Die Berandung des Werkstücks wird beschrieben durch die Funktion f mit $f(x) = -0,5x^2 + 2$; $-2 \leq x \leq 2$ (siehe Abbildung).



Zwei Ecken liegen jeweils auf der x -Achse und auf dem Schaubild K von f .

Welches Rechteck hat den größtmöglichen Flächeninhalt?

Lösung

Wir wählen den Eckpunkt $P(a \mid -0,5a^2 + 2)$ auf K für $0 \leq a \leq 2$.

Zielfunktion: $A(a) = 2a \cdot f(a) = 2a \cdot (-0,5a^2 + 2)$

$$A(a) = -a^3 + 4a; D = [0; 2]$$

Untersuchung von A auf ein Maximum

Ableitungen: $A'(a) = -3a^2 + 4$

$$A''(a) = -6a$$

Notwendige Bedingung: $A'(a) = 0 \quad -3a^2 + 4 = 0$

$$a^2 = \frac{4}{3}$$

Mit $a > 0$: $a = 1,15$

Nachweis: $A''(1,15) < 0$

A hat ein lokales Maximum für $a = 1,15$.

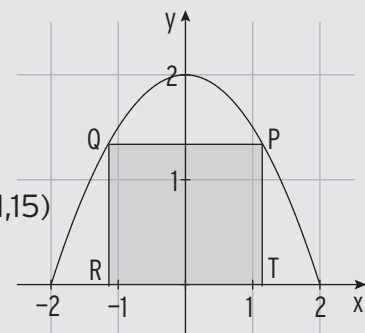
Lokales Maximum: $A_{\max} = A(1,15) = 3,08$

Randwerte

Für die Randstellen $a = 0$ und $a = 2$ gilt: $A(0) = 0 < A(1,15)$

$$A(2) = 0 < A(1,15)$$

Ergebnis:



Das Rechteck mit den Punkten $P(1,15 \mid 1,34)$, $Q(-1,15 \mid 1,34)$, $R(-1,15 \mid 0)$ und $T(1,15 \mid 0)$ hat den größten Flächeninhalt.

I Analysis

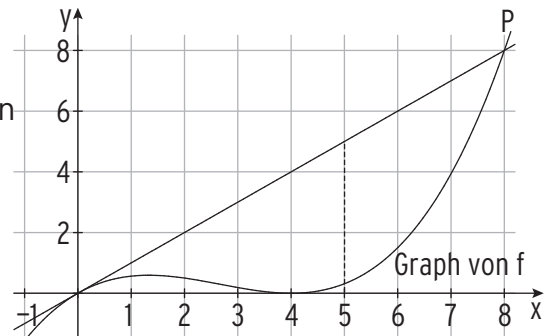
.....

2 Ein Geländeverlauf wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x; 0 \leq x \leq 8 \text{ (siehe Abbildung).}$$

Ein Seil soll vom Ursprung zum Punkt $P(8 | 8)$ gespannt werden.

Bestimmen Sie den größtmöglichen senkrechten Abstand des Seils zum Gelände.



Lösung

Wir wählen

Zielfunktion mit Definitionsbereich:

Untersuchung der Zielfunktion auf ein Maximum

Ableitungen:

Notwendige Bedingung:

Nachweis:

hat ein lokales Maximum für .

Lokales Maximum:

Randwerte

Für die Randstellen gilt:

Ergebnis:

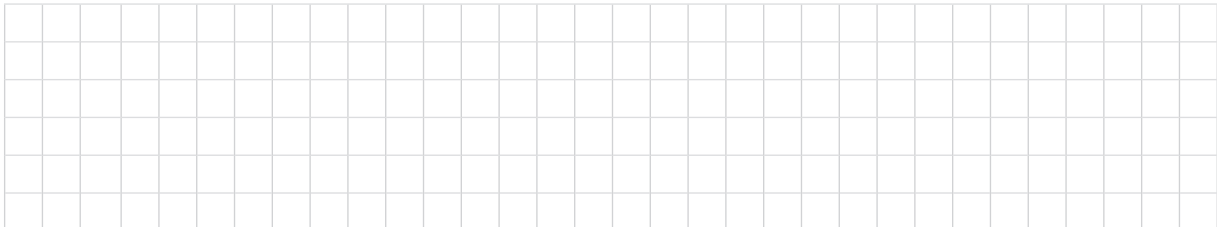


4 Integralrechnung

Aufleitung und Stammfunktion

1 Ein Mitschüler versteht nicht, weshalb eine Funktion mehrere Stammfunktionen besitzt.

a) Erklären Sie anhand der Ableitungsregeln.



b) Erklären Sie grafisch, anhand von Schaubildern.

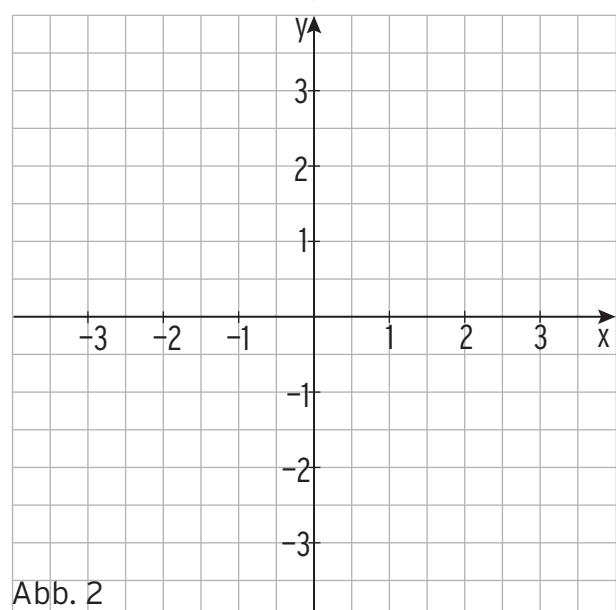
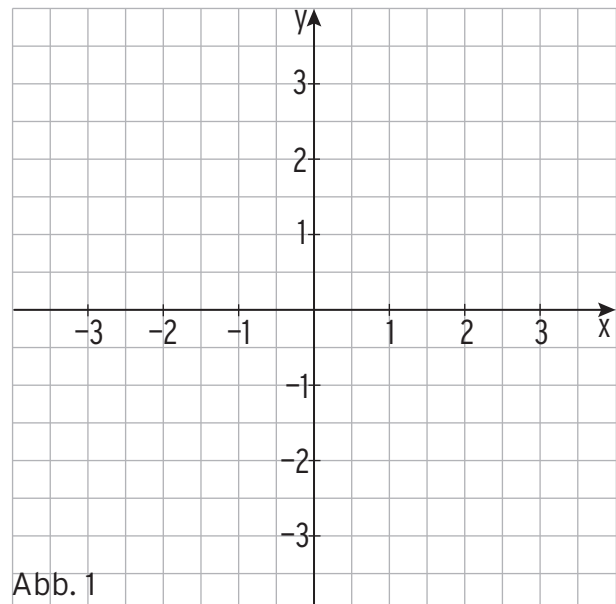
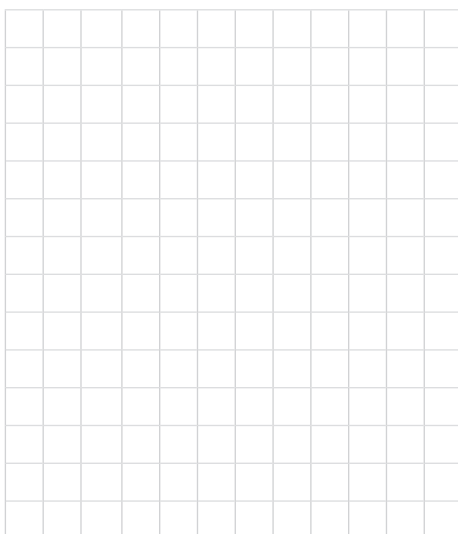
Skizzieren Sie hierfür die Schaubilder von F_1 bis F_3 in Abb. 1 und von f in Abb. 2.

$$F_1 \text{ mit } F_1(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$F_2 \text{ mit } F_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$$

$$F_3 \text{ mit } F_3(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$$

$$f \text{ mit } f(x) = x$$



I Analysis

.....

2 Bilden Sie eine Stammfunktion.

| | |
|--|--------------------------------------|
| $f(x) = 2\cos(3x) + 1$ | $F(x) = \frac{2}{3}\sin(3x) + x + C$ |
| $f(x) = -3\sin(\frac{x}{2}) - x$ | $F(x) =$ |
| $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^4 + 3$ | $F(x) =$ |
| $f(x) = \frac{1}{32}x^3 + x^2 + x - 4$ | $F(x) =$ |
| $f(x) = 5e^{2x} + 2x - 1$ | $F(x) =$ |
| $f(x) = ae^{-3x} + b$ | $F(x) =$ |
| $f(x) = \frac{3}{5}(x^3 - 2x^4)$ | $F(x) =$ |
| $f(x) = 4x - 1 - 4e^{1-2x}$ | $F(x) =$ |

3 Bilden Sie eine Stammfunktion mit $F(a) = b$.

| | |
|--|--|
| $f(x) = 4\sin(\pi x); F(1) = 2$ | $F(x) = -\frac{4}{\pi}\cos(\pi x) + C; F(1) = \frac{4}{\pi} + C = 2 \Rightarrow C = 2 - \frac{4}{\pi}$ $F(x) = -\frac{4}{\pi}\cos(\pi x) + 2 - \frac{4}{\pi}$ |
| $f(x) = -\frac{4}{3}\sin(\frac{x}{2}) - 3; F(\pi) = 0$ | $F(x) =$ $F(x) =$ |
| $f(x) = -\frac{1}{32}x^3 + x^2 + 3x; F(1) = 0$ | $F(x) =$ $F(x) =$ |
| $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x - 1); F(-1) = 1$ | $F(x) =$ $F(x) =$ |
| $f(x) = 0,2e^{2x+1} + 2,25; F(0) = 4$ | $F(x) =$ $F(x) =$ |
| $f(x) = 2a(e^{4-4x} + 1); F(1) = 0$ | $F(x) =$ $F(x) =$ |
| $f(x) = \frac{4}{5}(x^5 - 2x^4); F(-2) = 3$ | $F(x) =$ $F(x) =$ |
| $f(x) = \frac{4x}{3} - \frac{x^3}{12} - e^{\ln(2)x}; F(1) = 6$ | $F(x) =$ $F(x) =$ |

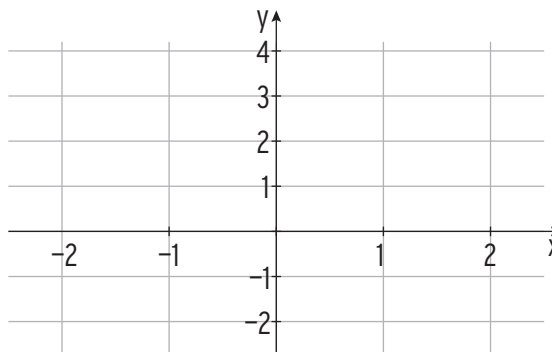
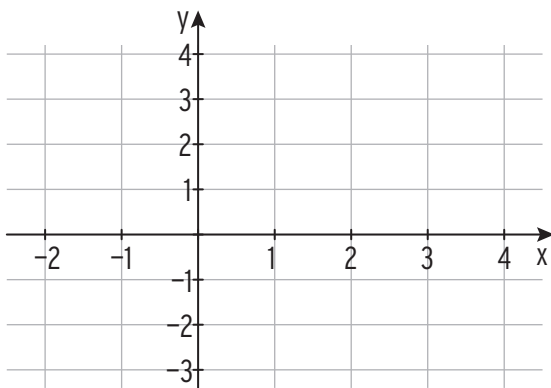
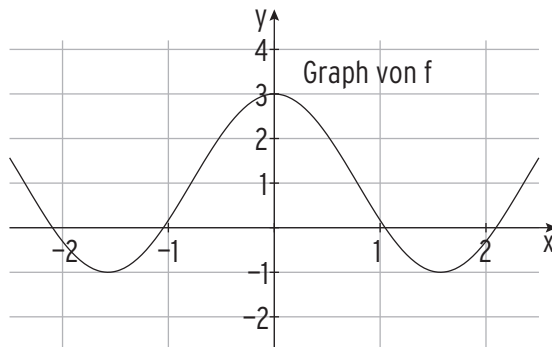
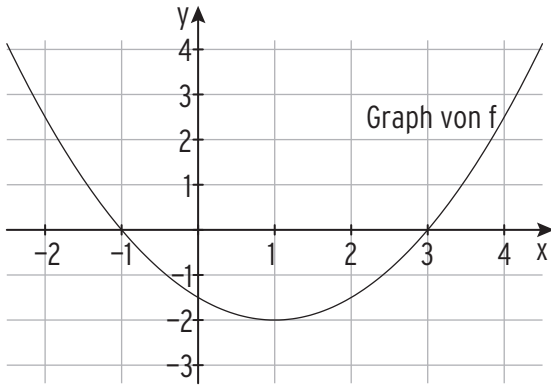
4 Entscheiden Sie, ob hier richtig oder falsch aufgeleitet wurde. Beschreiben Sie gegebenenfalls kurz, worin der Fehler besteht.

| Funktion f Stammfunktion F | richtig (r) falsch (f) | richtig wäre ... | Was wurde nicht beachtet? |
|--|---|--|--|
| $f(x) = 2x^3 - 4x^2$ $F(x) = 2x^4 - 4x^3$ | <input type="checkbox"/> (r) <input checked="" type="checkbox"/> (f) | $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3$ | $g(x) = x^3 \Rightarrow G(x) = \frac{1}{4}x^4$ $h(x) = x^2 \Rightarrow H(x) = \frac{1}{3}x^3$ |
| $f(x) = 1 + x$ $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$ | <input type="checkbox"/> (r) <input type="checkbox"/> (f) | $F(x) =$ | |
| $f(x) = e^{3x-2}$ $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ | <input type="checkbox"/> (r) <input type="checkbox"/> (f) | $F(x) =$ | |
| $f(x) = 2\sin(2x)$ $F(x) = \cos(2x)$ | <input type="checkbox"/> (r) <input type="checkbox"/> (f) | $F(x) =$ | |
| $f(x) = e^{2x} \cdot (2x + 1)$ $F(x) = e^{2x} \cdot x$ | <input type="checkbox"/> (r) <input type="checkbox"/> (f) | $F(x) =$ | |
| $f(x) = 2 - \cos(\pi x + 1)$ $F(x) = \sin(\pi x + 1)$ | <input type="checkbox"/> (r) <input type="checkbox"/> (f) | $F(x) =$ | |
| $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $F(x) = \frac{3}{x^3}$ | <input type="checkbox"/> (r) <input type="checkbox"/> (f) | $F(x) =$ | |
| $f(x) = -\frac{5}{2}(x^3 - 3x^2)$ $F(x) = -\frac{5}{2}(\frac{1}{4}x^4 - x^3)$ | <input type="checkbox"/> (r) <input type="checkbox"/> (f) | $F(x) =$ | |
| $f(x) = (2x - 1)^3$ $F(x) = \frac{1}{4}(2x - 1)^4$ | <input type="checkbox"/> (r) <input type="checkbox"/> (f) | $F(x) =$ | |
| $f(x) = 2x(2x + 5)$ $F(x) = x^2(x^2 + 5x)$ | <input type="checkbox"/> (r) <input type="checkbox"/> (f) | $F(x) =$ | |



Grafisches Aufleiten

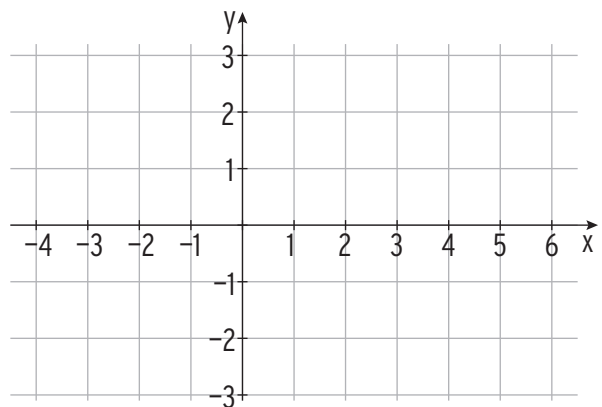
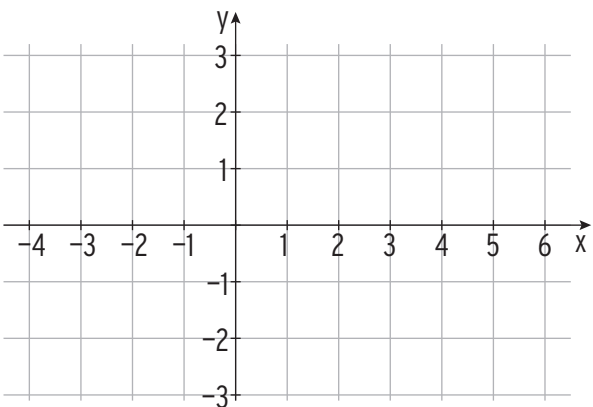
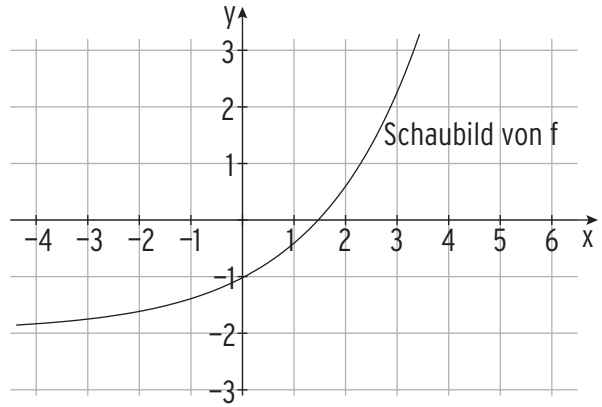
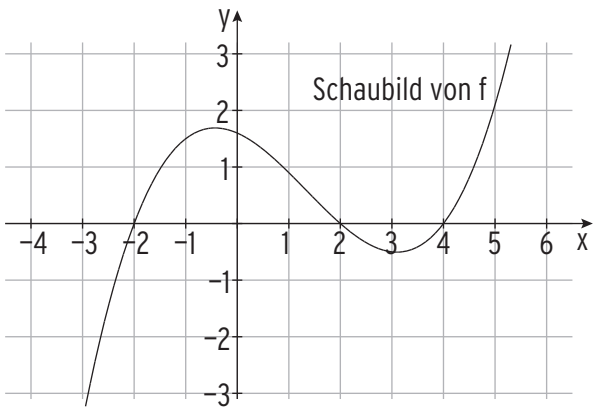
1 Skizzieren Sie das Schaubild einer Stammfunktion F von f .



2 Skizzieren Sie das Schaubild einer Stammfunktion F von f

a) durch den Ursprung.

b) durch $P(0 | 1)$



4 Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden g und h.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

LGS in Matrixform: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

Das LGS ist eindeutig lösbar: $r = 0,5; s = -0,5$

Einsetzen von z. B. $r = 0,5$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ 7,5 \end{pmatrix}$

g und h schneiden sich in $S(0,5 | 2 | 7,5)$.

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$



c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$



II Vektorielle Geometrie

.....

5 Die beiden Geraden g und h verlaufen windschief. Überprüfen Sie.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$

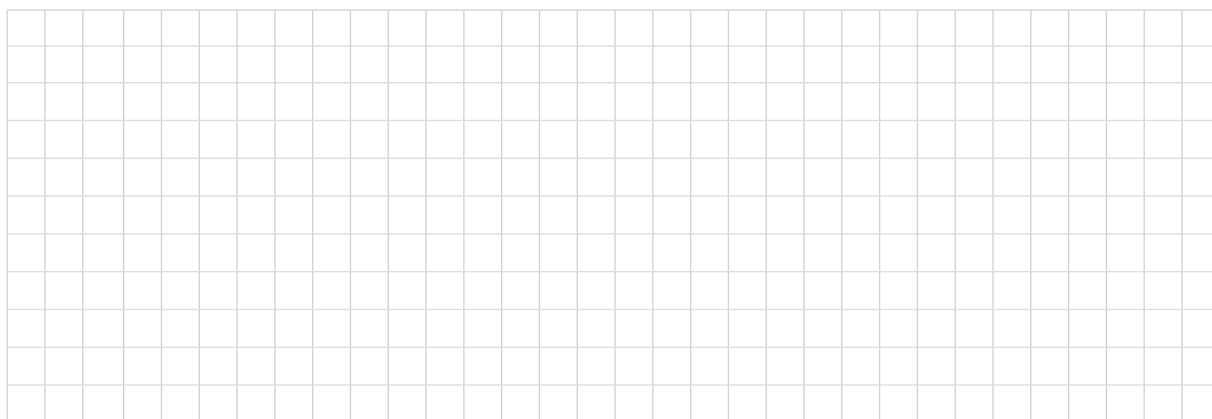
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; g \text{ und } h \text{ verlaufen nicht parallel.}$$

$$\text{Gleichsetzen: } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{LGS in Matrixform: } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ Das LGS ist unlösbar.}$$

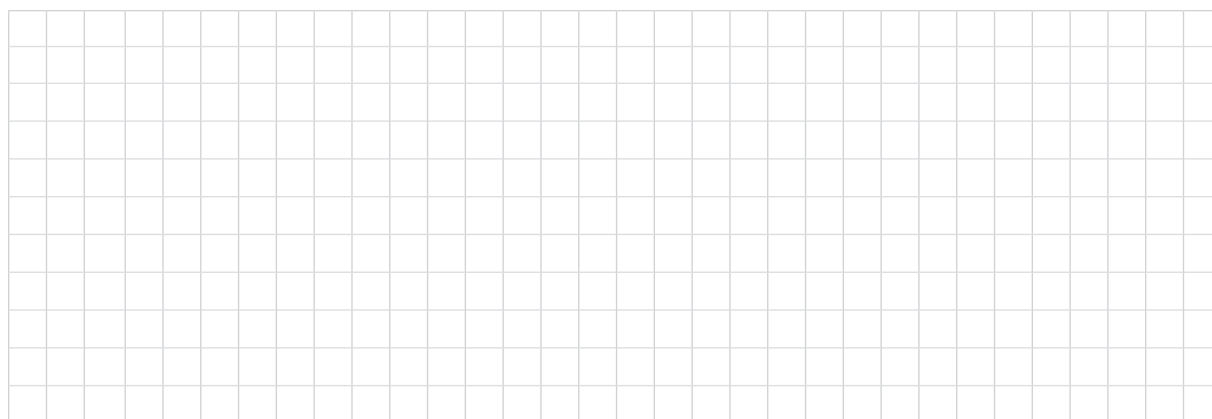
Die Richtungsvektoren sind nicht parallel. g und h sind windschief.

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$



6 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S und den Schnittwinkel.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$



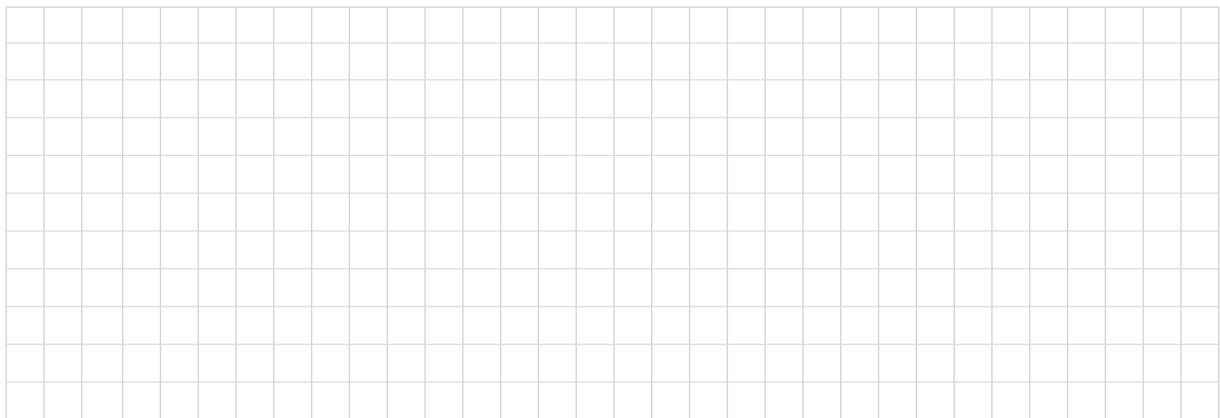
b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$



c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$



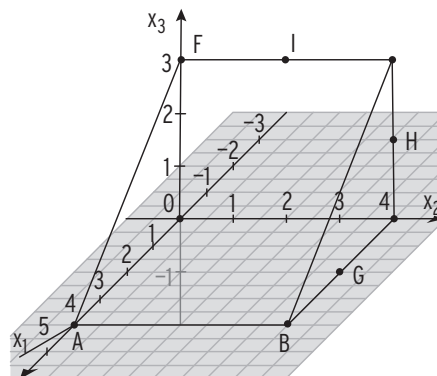
d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$



II Vektorielle Geometrie

.....

- 7 Die Gerade g verläuft durch die Punkte B und I.
 Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und H.
 Die Gerade i verläuft durch die Punkte F und G.



- a) Zeichnen Sie die Geraden ein.
 b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden mithilfe der Abbildung. Begründen Sie Ihre Antwort:

g und h sind _____

g und i sind _____

- c) Überprüfen Sie: h und i schneiden sich in $S(\frac{4}{3} | \frac{8}{3} | 1)$.

h: $\vec{x} =$

Punktprobe mit S:

i: $\vec{x} =$

Punktprobe mit S:

- 8 Sind die Aussagen über Geraden wahr oder falsch?

Das Vervielfache des Richtungsvektors einer Geraden ändert die Lage der Geraden.

(w) (f)

Zu jeder Geraden gehört genau eine Geradengleichung.

(w) (f)

Falls der Richtungsvektor einer Geraden keine 0 enthält, durchquert die Gerade jede Koordinatenebene ein Mal.

(w) (f)

Falls bei einer Geraden Stützvektor und Richtungsvektor übereinstimmen, verläuft sie durch den Ursprung.

(w) (f)

Falls der Richtungsvektor ein Mal den Eintrag 0 hat, verläuft die Gerade parallel zu einer Koordinatenachse.

(w) (f)

Zwei Geraden, die sich nicht schneiden, verlaufen stets parallel zueinander.

(w) (f)

Parallele Geraden haben denselben Richtungsvektor.

(w) (f)



Ebenengleichung in Parameterform

1 Die Ebene E verläuft durch den Punkt A und wird von den Vektoren \vec{u} und \vec{v} aufgespannt. Geben Sie eine Gleichung von E an.

$A(-2 | 2 | 0); \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; E: \vec{x} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$

2 Gegeben ist die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie für die angegebenen Parameterwerte den zugehörigen Ebenenpunkt.

a) $r = 0; s = -1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}; A(-3 | -1 | -2)$

b) $r = 2; s = -2:$

3 Die Punkte liegen auf der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$.

Vervollständigen Sie deren Koordinaten.

a) $A(0 | 3 | \underline{\quad}) \quad 0 = -1 + r \Rightarrow r = 1$
 $3 = 2 + s \Rightarrow s = 1 \quad x_3 = 3 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 4 \quad A(0 | 3 | 4)$

b) $B(3 | 3 | \underline{\quad})$

4 Untersuchen Sie, ob die Punkte auf der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ liegen.

a) $A(-3 | -11 | -2) \quad \square$ liegt auf E \times liegt nicht auf E

$\begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ LGS: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -11 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$

Das LGS ist nicht lösbar, der Punkt A liegt nicht auf der Ebene.

b) $B(7 | -2 | 1) \quad \square$ liegt auf E \square liegt nicht auf E

II Vektorielle Geometrie

.....

5 Die gegebenen Punkte liegen auf der Ebene E. Bestimmen Sie eine mögliche Parametergleichung von E.

a) $A(-2 \mid 1 \mid 5)$; $B(5 \mid -7 \mid 1)$; $C(0 \mid 2 \mid -3)$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right) + s \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right); E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$$

b) $A(2 \mid 0 \mid -1)$; $B(1 \mid -1 \mid 1)$; $C(0 \mid 2 \mid -1)$

$$E: \vec{x} =$$

c) $A(0 \mid -2 \mid 3)$; $B(-1 \mid -1 \mid 2)$; $C(3 \mid 4 \mid -2)$

$$E: \vec{x} =$$

6 Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

a) Der Punkt $P(1 \mid 3 \mid 5)$ liegt nicht auf g . Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene E, in welcher die Gerade g und der Punkt P liegen.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \end{pmatrix}$$

b) Die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ schneidet g .

Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene F, in welcher die Geraden g und h liegen.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \end{pmatrix}$$

c) Die Gerade $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}$ verläuft parallel zu g .

Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene G, in welcher die Geraden g und i liegen.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \\ \rule{1cm}{0.4pt} \end{pmatrix}$$

7 Die Ebene E verläuft durch den Punkt A(1 | 1 | 3). Geben Sie eine Gleichung von E an, wenn

a) E parallel zur x_1x_2 -Ebene verläuft.

E: $\vec{x} =$

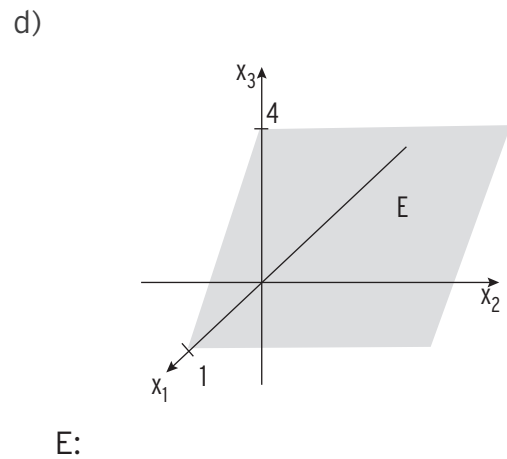
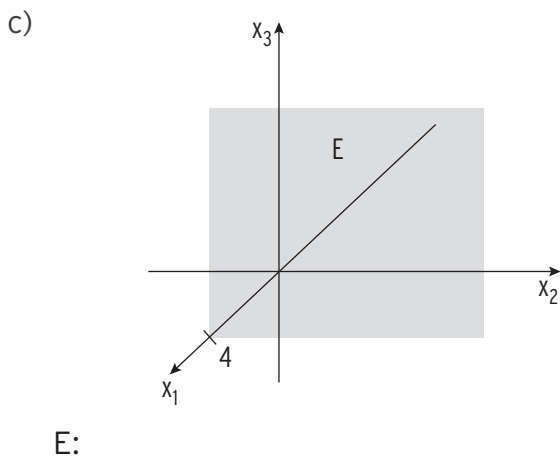
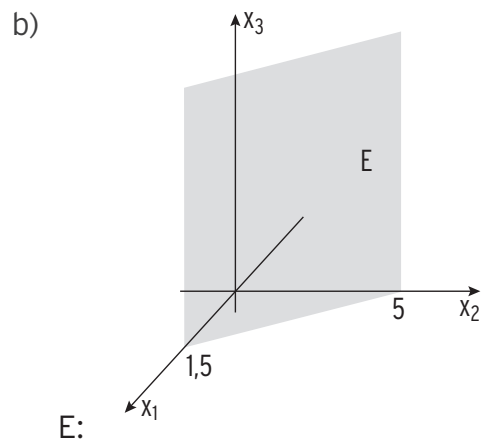
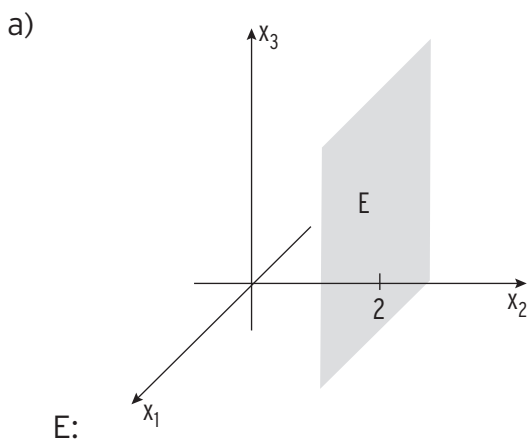
b) E parallel zur x_2x_3 -Ebene verläuft.

E: $\vec{x} =$

c) die Ebene E durch den Punkt B (2 | 0 | -3) parallel zur x_2 -Achse verläuft.

E: $\vec{x} =$

8 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene mit Hilfe der Abbildung.





mvurl.de/snz

Spurpunkte und Spurgeraden

1 Bestimmen Sie die Spurpunkte und die Spurgeraden der Ebene E.

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$

Spurpunkte:

$$x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$$

$$-2 + r + 2s = 0 \wedge -1 - r + s = 0$$

Addition ergibt $3s = 3 \Leftrightarrow s = 1$ und damit $r = 0$

Einsetzen ergibt den Spurpunkt mit der x_3 -Achse: $S_3(0 \mid 0 \mid 4)$

$$x_1 = 0 \wedge x_3 = 0$$

$$-2 + r + 2s = 0 \wedge 4 - 4r = 0$$

$r = 1$ und damit $s = 0,5$

Einsetzen ergibt den Spurpunkt mit der x_2 -Achse: $S_2(0 \mid -1,5 \mid 0)$

$$x_2 = 0 \wedge x_3 = 0$$

$$-1 - r + s = 0 \wedge 4 - 4r = 0$$

$r = 1$ und damit $s = 2$

Einsetzen ergibt den Spurpunkt mit der x_1 -Achse: $S_1(3 \mid 0 \mid 0)$

Spurgeraden:

Durch $S_1(3 \mid 0 \mid 0)$ und $S_2(0 \mid -1,5 \mid 0)$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1,5 \\ 0 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

Spurgerade von E mit der x_1x_2 -Ebene.

Durch $S_1(3 \mid 0 \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid 4)$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

Spurgerade von E mit der x_1x_3 -Ebene.

Durch $S_2(0 \mid -1,5 \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid 4)$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 4 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

Spurgerade von E mit der x_2x_3 -Ebene.

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$

2 Ist hierdurch eine Ebene eindeutig festgelegt?

| | |
|---|---|
| Drei verschiedene Punkte. | <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein |
| Die beiden einzigen Spurpunkte. | <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein |
| Zwei von drei Spurgeraden. | <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein |
| Drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. | <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein |
| Zwei echt parallele Geraden. | <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein |
| Zwei sich schneidende Geraden. | <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein |
| Eine Gerade und ein Punkt, der nicht auf der Geraden liegt. | <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein |
| Zwei windschiefe Geraden. | <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein |

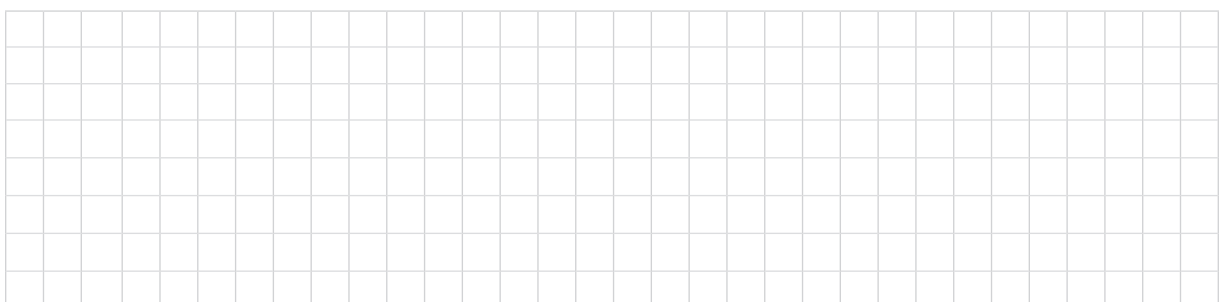
3 Gegeben sind die Gleichungen der Ebenen E, F, G und H:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}; \quad F: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R};$$

$$G: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}; \quad H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$$

Auf welche der Ebenen treffen die Aussagen zu?

| | |
|--|---|
| Die Ebene besitzt nur zwei Spurpunkte. | <input type="checkbox"/> E <input type="checkbox"/> F <input type="checkbox"/> G <input type="checkbox"/> H |
| Die Ebene enthält den Ursprung. | <input type="checkbox"/> E <input type="checkbox"/> F <input type="checkbox"/> G <input type="checkbox"/> H |
| Die Ebene ist parallel zu mindestens einer Koordinatenachse. | <input type="checkbox"/> E <input type="checkbox"/> F <input type="checkbox"/> G <input type="checkbox"/> H |
| Die Ebene ist parallel zur x_1 -Achse. | <input type="checkbox"/> E <input type="checkbox"/> F <input type="checkbox"/> G <input type="checkbox"/> H |
| Die Ebene ist parallel zur x_3 -Achse. | <input type="checkbox"/> E <input type="checkbox"/> F <input type="checkbox"/> G <input type="checkbox"/> H |
| Die Ebene ist parallel zur x_1x_2 -Ebene. | <input type="checkbox"/> E <input type="checkbox"/> F <input type="checkbox"/> G <input type="checkbox"/> H |





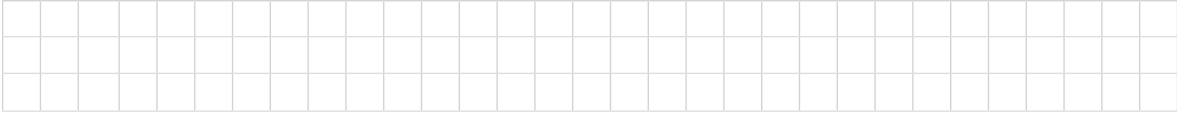
Abstandsberechnungen

Abstand von zwei Punkten

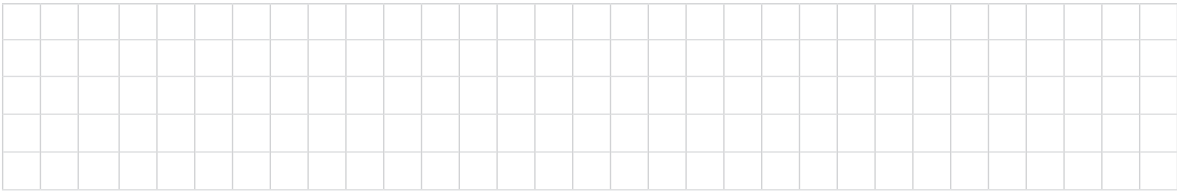
1 Berechnen Sie den Abstand der beiden Punkte A und B.

a) $A(0 \mid -1 \mid 2); B(1 \mid 3 \mid -5)$

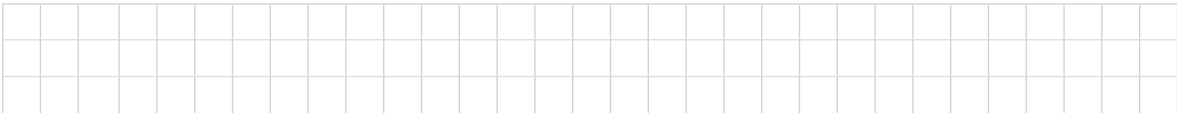
b) $A(4 \mid -2 \mid 0); B(-1 \mid 4 \mid -2)$



2 Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC mit $A(2 \mid -2 \mid 1)$, $B(-2 \mid 2 \mid 1)$ und $C(-2 \mid -2 \mid 5)$ ein gleichseitiges Dreieck ist.



3 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0 \mid 2 \mid 2)$ und $B(-3 \mid u \mid 6)$ gegeben. Zeigen Sie, dass der Abstand von A und B mindestens 5 beträgt.



Abstand Punkt - Gerade

1 Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Geraden g.

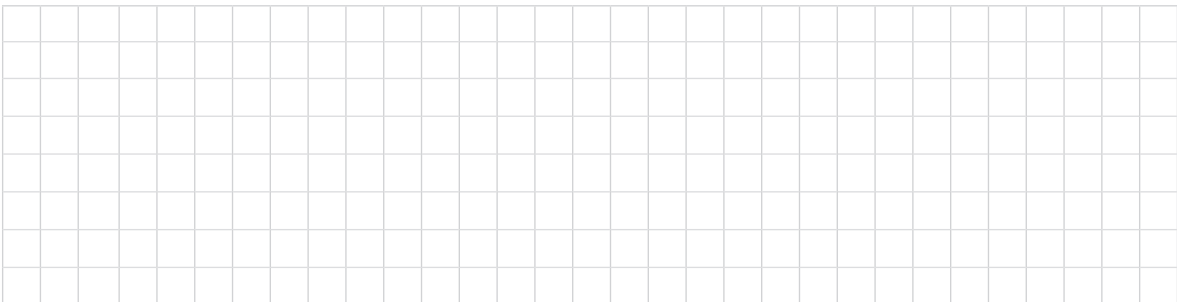
a) $A(4 \mid -2 \mid 4); g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}.$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} -r \\ 2+r \\ 2-2r \end{pmatrix}; \vec{AQ} = \begin{pmatrix} -4-r \\ 4+r \\ -2-2r \end{pmatrix}$$

$$\vec{AQ} \cdot \vec{u} = 0: \begin{pmatrix} -4-r \\ 4+r \\ -2-2r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4+r+4+r+4+4r=0 \Leftrightarrow r=-2$$

Einsetzen ergibt den Abstand für $r = -2: |\vec{AQ}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{12}$

b) $A(0 \mid -1 \mid 3); g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}.$



2 Gegeben ist die Gerade g mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$.

Geben Sie eine Gleichung einer Geraden an, die parallel zu g durch P (0 | 1 | - 2) verläuft.
Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

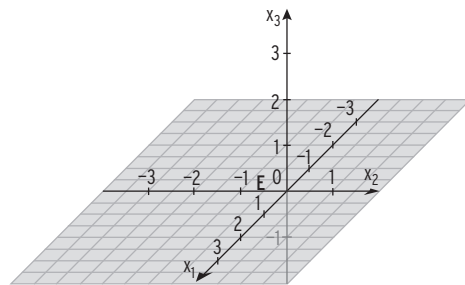
Abstand Punkt - Koordinatenebene

1 Ermitteln Sie den Abstand von Punkt P(3 | - 4 | 5) zur

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| x_1x_2 -Ebene: x_1x_3 -Ebene: x_2x_3 -Ebene: | <table border="1" style="width:100%; height: 60px; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

2 Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie g.



b) Geben Sie den Abstand von g zu den Koordinatenebenen an.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| x_1x_2 -Ebene: x_2x_3 -Ebene: | <table border="1" style="width:100%; height: 50px; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

c) Geben Sie den Abstand von g zur x_2 -Achse an: _____

3 Geben Sie die Gleichung einer Geraden h an, die zur x_1 -Achse und zur x_3 -Achse jeweils den Abstand 2 hat.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Der Abstand der Geraden h zur x_2 -Achse beträgt _____ .

2 Binomialverteilung



Bernoulli-Formel

1 Untersuchen Sie, ob es sich hier um einen Bernoulli-Versuch handelt. Geben Sie in diesem Fall die Länge der Bernoullikette und die Trefferwahrscheinlichkeit an.

| | |
|---|--|
| Ein Würfel wird 10-mal geworfen. Nach jedem Wurf wird die Augenzahl notiert. | <input type="checkbox"/> kein Bernoulli-Versuch <input type="checkbox"/> Bernoulli-Versuch; $n = \underline{\quad}$; $p = \underline{\quad}$ |
| Ein Würfel wird 10-mal geworfen. Nach jedem Wurf wird notiert ob eine Eins gewürfelt wurde. | <input type="checkbox"/> kein Bernoulli-Versuch <input type="checkbox"/> Bernoulli-Versuch; $n = \underline{\quad}$; $p = \underline{\quad}$ |
| Unter 10 Personen befinden sich 3 Schmuggler. Ein Zollbeamter kontrolliert die Personen nacheinander. | <input type="checkbox"/> kein Bernoulli-Versuch <input type="checkbox"/> Bernoulli-Versuch; $n = \underline{\quad}$; $p = \underline{\quad}$ |
| Im Schnitt haben 15 % aller Autos abgefahrene Reifen. Ein Polizist überprüft die Reifen von 20 Autos. | <input type="checkbox"/> kein Bernoulli-Versuch <input type="checkbox"/> Bernoulli-Versuch; $n = \underline{\quad}$; $p = \underline{\quad}$ |
| Von den 24 Schülern aus einer Klasse besitzen 7 ein i-Phone. Nacheinander werden 6 Schüler aus der Klasse befragt, ob sie ein i-Phone besitzen. | <input type="checkbox"/> kein Bernoulli-Versuch <input type="checkbox"/> Bernoulli-Versuch; $n = \underline{\quad}$; $p = \underline{\quad}$ |
| In 87 % aller Haushalte in Deutschland ist mindestens ein Fernseher vorhanden. Es werden 50 Haushalte befragt, ob mindestens ein Fernseher vorhanden ist. | <input type="checkbox"/> kein Bernoulli-Versuch <input type="checkbox"/> Bernoulli-Versuch; $n = \underline{\quad}$; $p = \underline{\quad}$ |

2 Berechnen Sie den Wert der Binomialkoeffizienten ohne Hilfsmittel.

| | |
|--|-------------------|
| $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ | $\binom{3}{2} =$ |
| $\binom{10}{1} =$ | $\binom{10}{8} =$ |
| $\binom{6}{2} =$ | $\binom{20}{0} =$ |
| $\binom{8}{7} =$ | $\binom{14}{1} =$ |

3 Vervollständigen Sie die Bernoulliformel.

| | |
|---|---|
| $P(X = __) = \binom{4}{2} \cdot 0,7^{\square} \cdot \triangle^{\circ}$ | Lösung: $P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^2$ |
| $P(X = __) = \binom{10}{1} \cdot 0,4^{\square} \cdot \triangle^{\circ}$ | $P(X = 5) = \binom{12}{\diamond} \cdot 0,1^{\square} \cdot \triangle^{\circ}$ |
| $P(X = 10) = \binom{50}{\diamond} \cdot \triangle^{\circ} \cdot 0,99^{\square}$ | $P(X = __) = \binom{20}{0} \cdot 0,05^{\square} \cdot \triangle^{\circ}$ |
| $P(X = 7) = \binom{8}{7} \cdot 0,4^{\square} \cdot \triangle^{\circ}$ | $P(X = __) = \binom{\quad}{\quad} \cdot 0,1^5 \cdot \triangle^{15}$ |

4 Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Bernoulliformel.

| | |
|---|--|
| Eine Maschine produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % fehlerfreie Schrauben. Bei einer Qualitätskontrolle werden 100 Schrauben überprüft. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 89 fehlerfrei sind. | X: _____ P(X = ___) = _____ = _____ |
| Eine verbeulte Münze, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 42 % „Wappen“ zeigt, wird 25 Mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass 12 Mal „Zahl“ erscheint. | X: _____ P(X = ___) = _____ = _____ |
| Ein Glücksrad hat 4 gleich große Felder mit den Farben gelb, grün, rot und blau. Das Glücksrad wird 13 Mal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass 8 Mal die Farbe blau erscheint. | X: _____ P(X = ___) = _____ = _____ |
| Ein Basketballspieler verwandelt einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 78 %. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er von 20 Freiwürfen zwei nicht verwandelt. | X: _____ P(X = ___) = _____ = _____ |
| Bei der Endkontrolle werden 50 Bälle überprüft. 10 % der produzierten Bälle sind defekt und damit nicht wettkampftauglich. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für genau 5 defekte Bälle. | X: _____ P(X = ___) = _____ = _____ |

III Stochastik

.....

- 5 Andreas möchte eine 10-tätige Gebirgstour machen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag beträgt dort in dieser Jahreszeit 34 %.

Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Bernoulliformel.

X: Anzahl _____ ; X ist _____ -verteilt

| | |
|--|---|
| Wahrscheinlichkeit für 2 Regentage | $P(X = \underline{\quad})$ = _____ |
| Wahrscheinlichkeit für 3 oder 4 Regentage | $P(X = \underline{\quad}) + P(\underline{\quad})$ = _____ |
| Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Regentag | $1 - P(X = \underline{\quad})$ = _____ |
| Wahrscheinlichkeit für höchstens 8 Regentage | $1 - P(X = \underline{\quad}) - \underline{\quad}$ = _____ |

- 6 Bei einer Tombola führen 10 % der Lose zu einem Gewinn. Jan kauft 12 Lose. Geben Sie jeweils eine Aufgabenstellung an, deren Lösung auf die folgende Weise berechnet wird. Gehen Sie von einer Binomialverteilung aus.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Jan:

| | |
|--|---|
| | $P = \binom{12}{3} \cdot 0,10^3 \cdot 0,90^9$ |
| | $P = \binom{12}{2} \cdot 0,10^2 \cdot 0,90^{10} + \binom{12}{3} \cdot 0,10^3 \cdot 0,90^9$ |
| | $P = 1 - \binom{12}{0} \cdot 0,10^0 \cdot 0,90^{12}$ |
| | $P = \binom{12}{0} \cdot 0,10^0 \cdot 0,90^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0,10^1 \cdot 0,90^{11}$ |

13 Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 16$ und $p = 0,58$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten mithilfe des WTR.

| | |
|---|---|
| $P(X = 7) =$ _____ _____ | $P(X < 9) =$ _____ $=$ _____ |
| $P(X \geq 5) =$ _____ $=$ _____ | $P(X > 6) =$ _____ $=$ _____ |
| $P(X = 10) + P(X = 11)$ $=$ _____ | $P(4 < X < 8) =$ _____ $=$ _____ |
| $P(3 \leq X \leq 8) =$ _____ $=$ _____ | $P(1 \leq X \leq 5) =$ _____ $=$ _____ |

14 Ein Glücksrad hat 6 gleich große Felder. 2 der Felder sind grün, 3 sind rot und eines ist blau. Das Glücksrad wird 15 Mal gedreht.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des WTR die Wahrscheinlichkeit

| | |
|--|--------------------------------------|
| für mehr als 7 Mal grün. | $p =$ _____ ; $P(X \text{ _____}) =$ |
| für höchstens 8 Mal grün oder rot. | |
| für 5 oder 6 Mal blau. | |
| für mindestens 7 und höchstens 12 Mal rot. | |
| für mehr als 8 Mal rot oder blau. | |

b) Wie oft müsste man mindestens drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,9 % mindestens einmal grün zu erhalten?

$$P(\text{mind. einmal grün bei } n \text{ Drehungen}) > 0,999 \Leftrightarrow 1 - P(\text{_____}) > 0,999$$

$$P(\text{_____}) < 0,001 \Leftrightarrow \text{_____}$$

Aufrunden ergibt $n =$ _____.

Es müsste also mindestens _____ Mal gedreht werden.



mvurl.de/5jmc

Erwartungswert, Standardabweichung einer Binomialverteilung

1 Es liegt eine binomialverteilte Zufallsvariable vor.

a) Ergänzen Sie die unvollständigen Spalten.

| | | | | | |
|----------|---|-----|----|-----|------|
| n | 50 | 50 | 80 | | 125 |
| p | 0,2 | 0,6 | | 0,5 | |
| μ | $n \cdot p = 10$ | | 40 | 60 | 12,5 |
| σ | $\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 2,83$ | | | | |

b) Vervollständigen Sie die nachfolgenden Aussagen. Berechnen Sie hierzu eventuell weitere Spalten in der Tabelle aus a).

- Eine Vervielfachung von n (p = konstant) führt zu einer _____ von μ .
- Eine Vervielfachung von n (p = konstant) führt zu einer _____ von σ .
- Eine Vervielfachung von p (n = konstant) führt zu einer _____ von μ .
- Bei gegebenem n erhält man den höchsten Wert für σ , wenn man p = _____ wählt. Hingegen sinkt σ , wenn p gegen die Zahl _____ oder gegen die Zahl _____ strebt.

2 Eine Maschine produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % fehlerfreie Schrauben. Bei einer Qualitätskontrolle werden 3 Schrauben überprüft. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl an fehlerfreien Schrauben bei der Qualitätskontrolle an.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen: _____

b) μ gibt inhaltlich _____ an.

c) Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X an.

| | | | | |
|----------|---|---|---|---|
| k | 0 | 1 | 2 | 3 |
| P(X = k) | | | | |

d) Berechnen Sie μ erneut. Verwenden Sie hierzu jedoch die Wahrscheinlichkeitsverteilung. _____

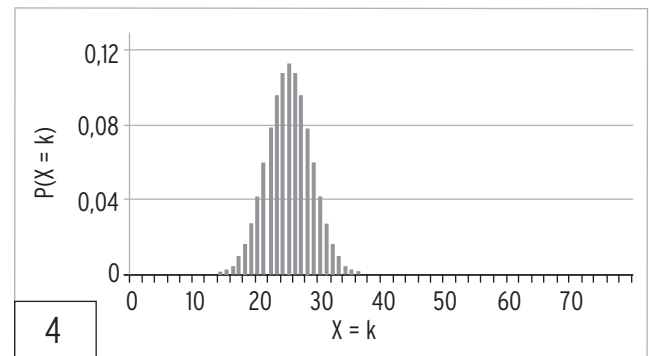
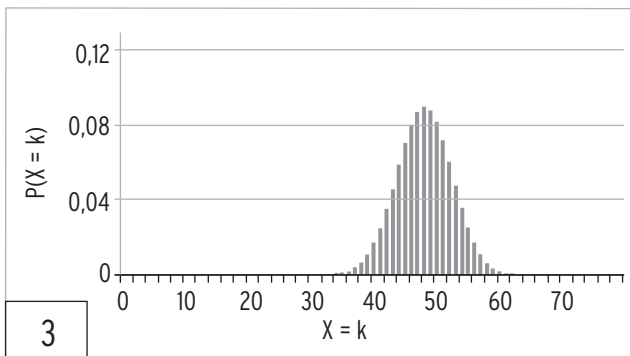
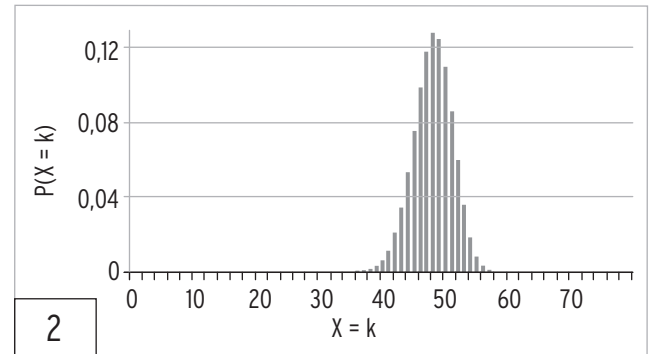
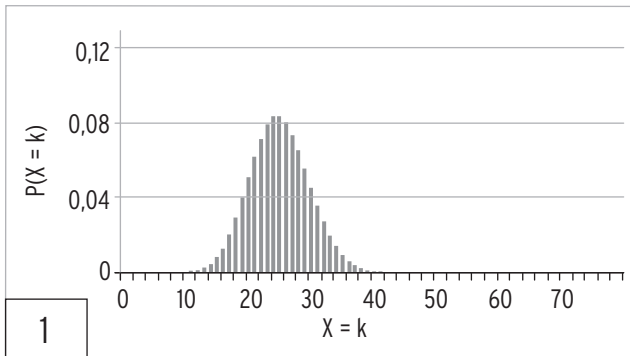
e) Berechnen Sie die Standardabweichung der Zufallsvariablen.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

f) σ gibt inhaltlich _____ an.

5 Vervollständigen Sie die Tabelle. Ordnen Sie dann die Schaubilder zu.

| | | | | |
|-----------|-----|-----|-----|-----|
| n | 250 | 50 | 80 | 60 |
| p | 0,1 | 0,5 | 0,6 | 0,8 |
| μ | | | | |
| σ | | | | |
| Schaubild | | | | |



6 In einem Hallenbad gibt der Eintrittskartenautomat jedem zwölften Besucher eine unbrauchbare Eintrittskarte aus. An einem Samstag Vormittag benutzen 155 Personen den Automat.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Personen an diesem Tag mit einer unbrauchbaren Eintrittskarte im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegt.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Anzahl der unbrauchbaren Eintrittskarten

- 14 oder mehr
- 10 bis 13
- weniger als 9
- mindestens 8 und höchstens 12

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Bohner | Ott | Deusch | Rosner

Arbeitsheft

Mathematik – Jahrgangsstufen 1 und 2 Grundlegendes Anforderungsniveau

Berufliches Gymnasium

Baden-Württemberg

Analysis

Vektorielle Geometrie

Stochastik

Lösungen

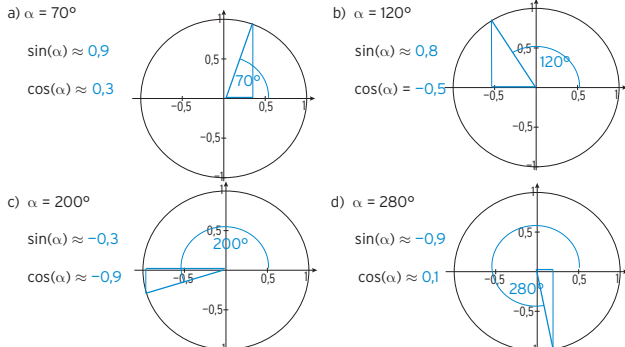
Merkur 
Verlag Rinteln

I Analysis

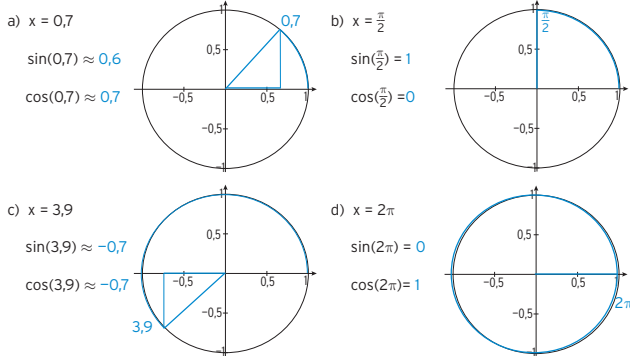
1 Trigonometrische Funktionen und zugehörige Gleichungen

Definition der Winkelfunktionen

1 Zeichnen Sie den Winkel α ein und bestimmen Sie $\sin(\alpha)$ bzw. $\cos(\alpha)$.

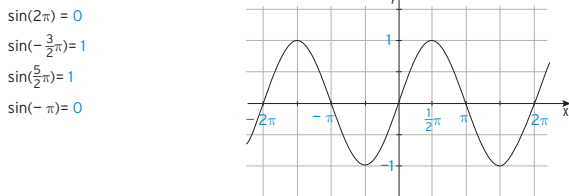


2 Zeichnen Sie den Winkel x (im Bogenmaß) ein und bestimmen Sie $\sin(x)$ bzw. $\cos(x)$.

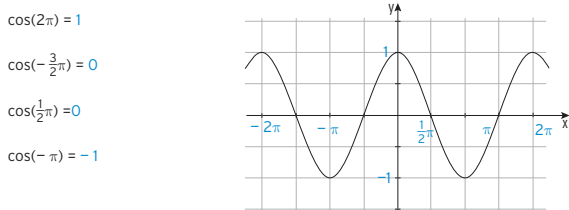


4

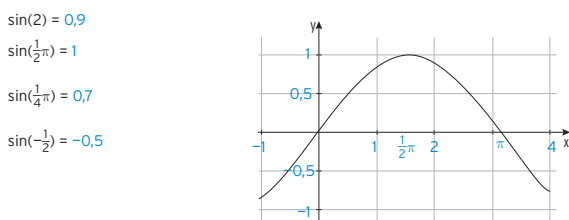
6 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$. Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:



7 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Kosinusfunktion f mit $f(x) = \cos(x)$. Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:



8 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$. Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:



6

3 Vervollständigen Sie die Tabelle mithilfe eines Hilfsmittels.

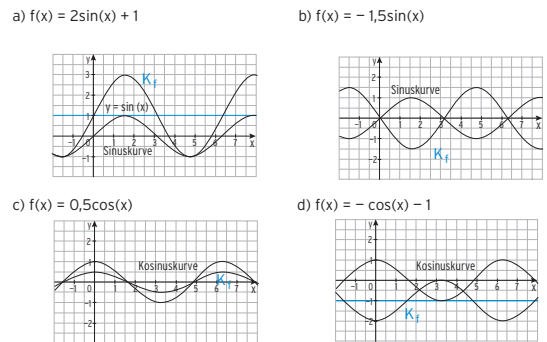
| α | x | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
|-------------|-------------------------------|-----------|-----------|
| 60° | $\frac{1}{3}\pi$ | 0,866 | 0,5 |
| 20° | $\frac{1}{9}\pi \approx 0,35$ | 0,342 | 0,940 |
| 90° | $\frac{1}{2}\pi \approx 1,57$ | 1 | 0 |
| 120° | $\frac{2}{3}\pi \approx 2,09$ | 0,866 | -0,5 |

| α | x | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
|---------------|------------------|-----------|-----------|
| $57,3^\circ$ | 1 | 0,841 | 0,540 |
| 30° | $\frac{1}{6}\pi$ | 0,5 | 0,866 |
| $143,3^\circ$ | 2,5 | 0,598 | -0,801 |
| $286,6^\circ$ | 5 | -0,959 | 0,284 |

4 Vervollständigen Sie die Tabelle. Skalieren Sie die x-Achse.

| x | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
|-------------------|-----------|-----------|
| 0 | 0 | 1 |
| 2π | 0 | 1 |
| $\frac{1}{2}\pi$ | 1 | 0 |
| $-\frac{1}{2}\pi$ | -1 | 0 |
| $\frac{3}{2}\pi$ | 1 | 0 |
| $\frac{5}{2}\pi$ | 1 | 0 |
| 7π | 0 | -1 |
| 12π | 0 | 1 |

5 Zeichnen Sie den Graphen von f ein.



5

Transformationen

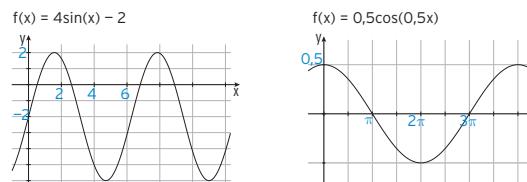
1 Geben Sie die Amplitude a und die Periode p der Funktion f an.

| Funktionsterm | a | p | Funktionsterm | a | p |
|------------------------------|------------|-------------------------------|--|-------------------|-------------------------------|
| $f(x) = 0,25\sin(\pi x)$ | $a = 0,25$ | $p = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ | $f(x) = -5\cos(\frac{\pi}{2}x)$ | $a = 5$ | $p = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$ |
| $f(x) = 6\cos(5x)$ | $a = 6$ | $p = \frac{2\pi}{5}$ | $f(x) = 1,6\sin(3x)$ | $a = 1,6$ | $p = \frac{2\pi}{3}$ |
| $f(x) = -4\sin(\frac{x}{3})$ | $a = 4$ | $p = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$ | $f(x) = -\frac{4}{3}\sin(\frac{x}{2})$ | $a = \frac{4}{3}$ | $p = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$ |
| $f(x) = 3\cos(2x)$ | $a = 3$ | $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ | $f(x) = \cos(x) + 1$ | $a = 1$ | $p = 2\pi$ |

2 Geben Sie den Funktionsterm einer Sinusfunktion bzw. einer Kosinusfunktion mit der Periode p und der Amplitude a an.

| a | p | Sinusfunktion | a | p | Kosinusfunktion |
|-----------|----------------------|--------------------------|-------------------|-------------------|--|
| $a = 2$ | $p = 2$ | $f(x) = 2\sin(\pi x)$ | $a = 6$ | $p = 4\pi$ | $f(x) = 6\cos(\frac{x}{2})$ |
| $a = \pi$ | $p = 1$ | $f(x) = \pi\sin(2\pi x)$ | $a = 4$ | $p = 4$ | $f(x) = 4\cos(\frac{x}{2})$ |
| $a = 0,5$ | $p = \frac{2}{3}\pi$ | $f(x) = 0,5\sin(3x)$ | $a = \frac{5}{2}$ | $p = \frac{3}{4}$ | $f(x) = \frac{5}{2}\cos(\frac{8}{3}\pi x)$ |

3 Beschriften Sie die Koordinatenachsen.



4 Geben Sie den zugehörigen Funktionsterm an. Der Graph von f mit $f(x) = \sin(x)$ wird

- a) um 2 nach links und um 0,5 nach unten verschoben. $g(x) = \sin(x + 2) - 0,5$
- b) an der x-Achse gespiegelt und dann um 1 nach oben verschoben. $g(x) = -\sin(x) + 1$
- c) mit Faktor 3 in y-Richtung gestreckt und dann um 3 nach links verschoben. $g(x) = 3\sin(x + 3)$
- d) mit Faktor 2 in x-Richtung gestreckt und dann um 3 nach unten verschoben. $g(x) = \sin(0,5x) - 3$

7

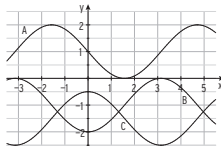
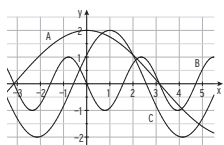
5 Ergänzen Sie die folgenden Sätze.

- a) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 0,5\sin(x) - 1$ entsteht aus der Sinuskurve ($y = \sin(x)$) durch Streckung mit dem Faktor **0,5** in y -Richtung und durch Verschiebung um **1** nach **unten**.
- b) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -3\cos(2x) + 4$ entsteht aus der Kosinuskurve ($y = \cos(x)$) durch Spiegelung an der x -Achse, durch Streckung mit dem Faktor **3** in y -Richtung, Streckung mit dem Faktor **0,5** in x -Richtung und durch Verschiebung um **4** nach **oben**.
- c) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2\cos(x + 4) + 5$ entsteht aus der Kurve mit $y = \cos(x)$ durch Streckung mit dem Faktor **2** in y -Richtung, durch Verschiebung um **4** nach **links** und durch Verschiebung um **5** nach **oben**.
- d) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 5\sin(0,5x) - 1$ entsteht aus der Kurve mit $y = \sin(x)$ durch Streckung mit dem Faktor **5** in y -Richtung, durch Streckung mit dem Faktor **2** in x -Richtung und durch Verschiebung um **1** nach **unten**.

6 Wie geht der Graph von g aus dem Graphen von f mit $f(x) = \sin(x)$ hervor?

| | |
|------------------------------|---|
| $g(x) = 2\sin(x) + 1$ | Streckung in y -Ri mit 2 ; Verschiebung nach oben um 1 |
| $g(x) = -3\sin(4x) + 2$ | Streckung in y -Ri mit 3 ; Spiegelung an der x -Achse; Streckung in x -Ri mit 0,25 ; Verschiebung nach oben um 2 |
| $g(x) = 0,25\sin(x - 3) + 5$ | Streckung in y -Ri mit 0,25 ; Verschiebung nach rechts um 3 ; Verschiebung nach oben um 5 |
| $g(x) = 2,5\sin(2x) - 3$ | Streckung in y -Ri mit 2,5 ; Streckung in x -Ri mit 0,5 ; Verschiebung nach unten um 3 |
| $g(x) = \cos(x) - 1$ | $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) - 1$; Verschiebung nach links um $\frac{\pi}{2}$; Verschiebung nach unten um 1 |

7 Ordnen Sie zu.



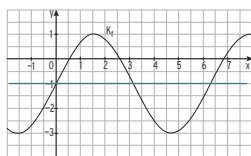
- A: $f(x) = 2\cos(0,5x)$; B: $g(x) = -\sin(2x)$
 C: $h(x) = 2\cos(x-1)$
 B: $f(x) = -\cos(x) - 1$; C: $g(x) = \cos(x) - 1,5$
 A: $h(x) = -\sin(x) + 1$

8

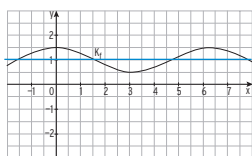
Aufstellen von Funktionstermen

1 Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm der Form $f(x) = a\sin(x) + c$ bzw. $f(x) = a\cos(x) + c$.

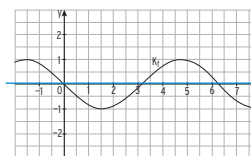
a) $f(x) = 2\sin(x) - 1$



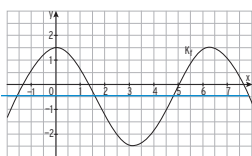
b) $f(x) = 0,5\cos(x) + 1$



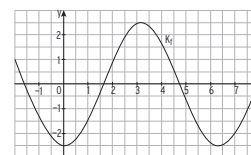
c) $f(x) = -\sin(x)$



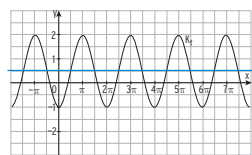
d) $f(x) = 2\cos(x) - 0,5$



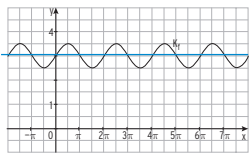
e) $f(x) = -2,5\cos(x)$



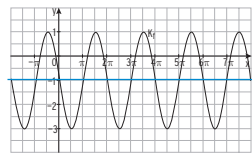
f) $f(x) = -1,5\cos(x) + 0,5$



g) $f(x) = 0,5\sin(x) + 3$



h) $f(x) = -2\sin(x) - 1$



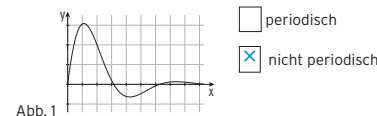
10

8 Sind die Aussagen falsch (f) oder wahr (w)?

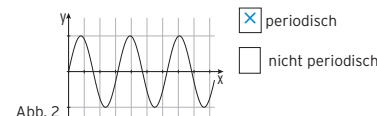
- a) Durch eine Streckung in y -Richtung mit Faktor $\frac{3}{2}$ vergrößert sich die Amplitude einer Funktion. w f
- b) Durch eine Streckung in x -Richtung mit Faktor 2 vergrößert sich die Periodenlänge einer Funktion. w f
- c) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 3\sin(3x)$ geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung mit Faktor 3 in x - und y -Richtung hervor. w f
- d) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2\sin(x + 1)$ geht aus der Sinuskurve durch Streckung in x -Richtung und Verschiebung um eine Einheit nach links vor. w f
- e) f mit $f(x) = 2\sin(x) + 1$ hat den Wertebereich $[-2; 2]$. w f
- f) Die Funktion f mit $f(x) = a\sin(x) + 4$ hat für $a > 0$ den Wertebereich $[4 - a; 4 + a]$. w f

9 Die Abbildungen zeigen Ausschnitte von Schaubildern.

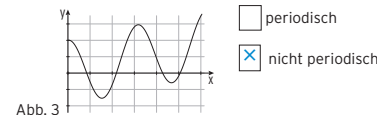
Welche der Schaubilder gehören zu periodischen Funktionen? Entscheiden und begründen Sie.



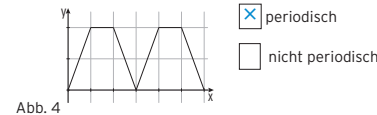
Begründung:
Die Funktionswerte wiederholen sich nicht im gleichem Abstand.



Begründung:
Die Funktionswerte wiederholen sich im gleichen Abstand.



Begründung:
Die Funktionswerte wiederholen sich nicht im gleichem Abstand.

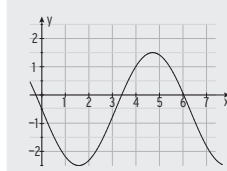


Begründung:
Die Funktionswerte wiederholen sich im gleichen Abstand.

9

2 Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm.

$g(x) = -2\sin(x) - 0,5$



$g(x) = a\sin(bx) + c$

Durch Ablesen:

$c = -0,5$

$|a| = 2$

$a = -2$

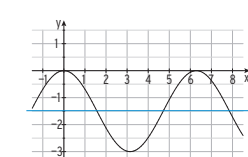
$p = 2\pi$

$b = \frac{2\pi}{p} = 1$

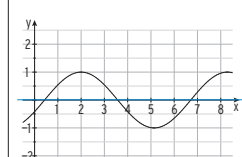
$y = -0,5$

$g(x) = -2\sin(x) - 0,5$

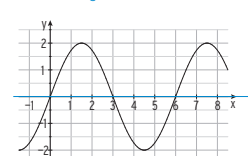
$g(x) = 1,5\cos(x) - 1,5$



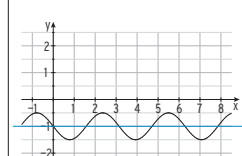
$g(x) = \cos(x - 2)$



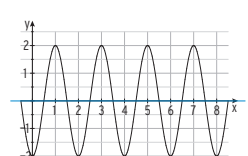
$g(x) = 2\sin(\frac{\pi}{2}x)$



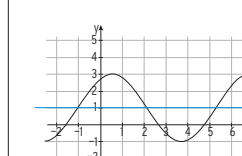
$g(x) = -0,5\sin(2x) - 1$



$g(x) = -2\cos(\pi x)$



$g(x) = 2\sin(x + 1)$

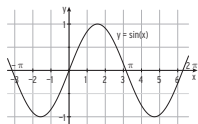


11

Trigonometrische Gleichungen

1 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$. Lesen Sie alle Lösungen der Gleichungen im Intervall $[-\pi; 2\pi]$ aus der Zeichnung ab.

- a) $\sin(x) = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}$
- b) $\sin(x) = 0,5 \Rightarrow x = 0,5; x = 2,6$
- c) $\sin(x) = -0,5 \Rightarrow x = -0,5; x = -2,6$
 $x = 3,7; x = 5,8$



2 Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

| | | | |
|--|--|---|--|
| $2\sin(x) = \sqrt{2}$ $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ Sinuskurve: $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{4}; x_2 = \frac{3\pi}{4}$ | $\cos(x) = 0,5$ WTR: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $x_2 = -\frac{\pi}{3}$ Periode: 2π Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ $x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ | $2\sin(x) = -1$ $\sin(x) = -0,5$ WTR: $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ Sinuskurve: $x_2 = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$ Periode: 2π Lösungen: $x_3 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6}$ $x_4 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$ | $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ WTR: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ Symmetrie: $x_2 = -\frac{\pi}{6}$ Periode: 2π Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ $x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$ |
|--|--|---|--|

3 Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

| | | | |
|---|--|---|---|
| $2\sin(2x) = \sqrt{2}$ $\sin(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{4}$ Sinus(z)-Kurve: $z_2 = \frac{3\pi}{4}$ Mit $z = 2x$: $x_1 = \frac{\pi}{8}; x_2 = \frac{3\pi}{8}$ Periode: $\frac{2\pi}{2} = \pi$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{8}; x_2 = \frac{3\pi}{8}$ $x_3 = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$ $x_4 = \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11\pi}{8}$ | $\cos(\frac{z}{2}) = 0,5$ $\cos(z) = 0,5$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $z_2 = -\frac{\pi}{3}$ Mit $z = \frac{z}{2}$: $x_{1 2} = \pm \frac{2\pi}{3}$ Periode: $\frac{2\pi}{0,5} = 4\pi$ Lösung: $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ | $2\sin(\frac{z}{3}x) = -1$ $\sin(z) = -0,5$ WTR: $z_1 = -\frac{\pi}{6}$ Sinus(z)-Kurve: $z_2 = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$ Mit $z = \frac{z}{3}x$: $x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = -\frac{5}{2}$ Periode: $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6$ Lösungen: $x_3 = -\frac{1}{2} + 6 = \frac{11}{2}$ $x_4 = -\frac{5}{2} + 6 = \frac{7}{2}$ | $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{6}$ Symmetrie: $z_2 = -\frac{\pi}{6}$ Mit $z = 2x$: $x_{1 2} = \pm \frac{\pi}{12}$ Periode: $\frac{2\pi}{2} = \pi$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{12}$ $x_3 = -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11\pi}{12}$ $x_4 = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}$ $x_5 = -\frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{23\pi}{12}$ |
|---|--|---|---|

12

4 Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

| | | |
|--|---|--|
| $\sin(x) = -0,5\sqrt{2}$ $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $x_1 = -\frac{\pi}{4}$ Mithilfe der Sinuskurve: $x_2 = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$ Periode: 2π Lösungen: $x_3 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$ $x_4 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$ | $\sin(\pi x) = 0,5\sqrt{3}$ $\sin(z) = 0,5\sqrt{3}$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{3}$ Sinus(z)-Kurve: $z_2 = \frac{2\pi}{3}$ Mit $z = \pi x$: $x_1 = \frac{1}{3}; x_2 = \frac{2}{3}$ Periode: $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ Lösungen: $x_1 = \frac{1}{3}$ $x_2 = \frac{2}{3}$ $x_3 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$ $x_4 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$ $x_5 = \frac{7}{3} + 2 = \frac{13}{3}$ $x_6 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$ | $\sin(\frac{\pi}{4}x) = 0$ $\frac{\pi}{4}x = 0; \pm\pi; \pm 2\pi; \dots$ $x = 0; \pm 4; \pm 8; \dots$ Lösungen: $x_1 = 0$ $x_2 = 4$ |
|--|---|--|

| | | |
|--|---|---|
| $\cos(\frac{\pi}{3}x) = 0,5\sqrt{3}$ $\cos(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{6}$ Symmetrie: $z_2 = -\frac{\pi}{6}$ Mit $z = \frac{\pi}{3}x$: $x_{1 2} = \pm \frac{1}{2}$ Periode: $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6$ Lösungen: $x_1 = \frac{1}{2}$ $x_3 = -\frac{1}{2} + 6 = 5,5$ | $\cos(\frac{z}{5}) = -0,5$ $\cos(z) = -0,5$ WTR: $z_1 = \frac{2\pi}{3}$ Symmetrie: $z_2 = -\frac{2\pi}{3}$ Mit $z = \frac{z}{5}$: $x_1 = 2\pi; x_2 = -2\pi$ Periode: $\frac{2\pi}{\frac{1}{5}} = 6\pi$ Lösung: $x_1 = 2\pi$ | $\cos(2x) = 0$ $2x = \pm \frac{\pi}{2}; \pm \frac{3\pi}{2}; \pm \frac{5\pi}{2}; \pm \frac{7\pi}{2}; \dots$ $x = \pm \frac{\pi}{4}; \pm \frac{3\pi}{4}; \pm \frac{5\pi}{4}; \pm \frac{7\pi}{4}; \dots$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ $x_3 = \frac{5\pi}{4}$ $x_4 = \frac{7\pi}{4}$ |
|--|---|---|

13

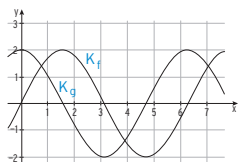
Gemeinsame Punkte

1 Lösen Sie die Gleichung $f(x) = 0$, indem Sie drei Lösungen angeben.

| | | |
|---|--|---|
| $f(x) = 3\sin(3x)$ $3x = 0; \pm\pi; \pm 2\pi; \dots$ $x = 0; \pm\frac{\pi}{3}; \pm\frac{2\pi}{3}; \dots$ Lösungen: $x_1 = 0; x_2 = -\frac{\pi}{3}\pi; x_3 = \frac{1}{3}\pi$ | $f(x) = -\cos(x-1)$ $x-1 = \pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{3\pi}{2}; \dots$ $x = \pm\frac{\pi}{2} + 1; \pm\frac{3\pi}{2} + 1; \dots$ Lösungen: $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 1; x_2 = \frac{\pi}{2} + 1$ $x_3 = -\frac{3\pi}{2} + 1$ | $f(x) = 1 + \sin(\frac{1}{2}x)$ $\sin(z) = -1$ WTR: $z_1 = -\frac{\pi}{2}$ Mit $z = \frac{1}{2}x$: $x_1 = -\pi$ Periode: $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ Lösungen: $x_1 = -\pi; x_2 = 3\pi; x_3 = 7\pi$ |
|---|--|---|

2 Begründen Sie: Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - 1$; $x \in \mathbb{R}$ hat keine Nullstelle. h mit $h(x) = \frac{1}{2}\cos(2x)$ hat den Wertebereich $[-0,5; 0,5]$; f mit $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - 1$ hat den Wertebereich $[-0,5 - 1; 0,5 - 1] = [-1,5; -0,5]$, damit hat f keine Nullstelle.

3 Die abgebildeten Graphen der Funktionen f und g schneiden sich in $x = \frac{\pi}{4}$. Bestimmen Sie f(x) und g(x). Geben Sie weitere Schnittstellen an.



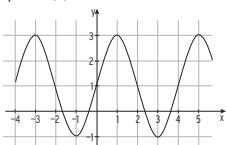
$f(x) = 2\sin(x)$; $g(x) = 2\cos(x)$
weitere Schnittstellen: $\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x) + 1$; $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f ist K.

a) Wie entsteht das Schaubild K aus der Sinuskurve mit $y = \sin(x)$? Skizzieren Sie K. Bestimmen Sie den Wertebereich von f.

K entsteht aus der Sinuskurve durch Streckung in y-Richtung mit Faktor 2 ($y = 2 \sin(x)$), Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{2}{\pi}$ ($y = 2 \sin(\frac{\pi}{2}x)$), und Verschiebung um 1 nach oben.

Da $\sin(\frac{\pi}{2}x)$ nur Werte zwischen -1 und 1 annimmt, gilt für den Wertebereich von f: $-1 \leq f(x) \leq 3$.



b) Die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ und das Schaubild K schneiden sich. Bestimmen Sie zwei Schnittstellen.

$2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x) + 1 = 1 \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{2}x) = 0$ für $\frac{\pi}{2}x = 0; \pm\pi; \pm 2\pi; \dots$
 $x = 0; \pm 2; \pm 4; \dots$
Zwei Schnittstellen: $0; 2$

14

Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben

1 Welche Modellierung passt zur gegebenen Situation? Ordnen Sie zu, indem Sie die Koordinatenachsen benennen.

A: An einer Hafenanlage ändert sich die Meerestiefe ständig aufgrund der Gezeiten. Über einen gewissen Zeitraum wird die Meerestiefe gemessen und dargestellt.

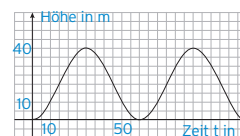


Abb. 1

Abb. 3

B: Jannis fährt Riesenrad. Zu jedem Zeitpunkt nach dem Einsteigen wird seine Höhe über dem Boden dargestellt.

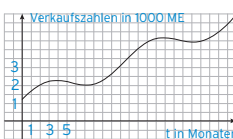


Abb. 2

Abb. 1

C: Ein Unternehmen bietet erfolgreich Saisonware an. Die Entwicklung der monatlichen Verkaufszahl über mehrere Jahre wird dargestellt.

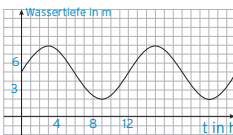


Abb. 3

Abb. 2

2 Die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion eines guten Brustschwimmers lässt sich näherungsweise beschreiben durch $v(t) = 0,4\sin(6t) + 1,5$. (Zeit t in s, Geschwindigkeit v(t) in $\frac{m}{s}$).

- a) Die Zeitspanne zwischen zwei Zügen beträgt $\frac{2}{3} \approx 1,05$ s.
- b) Die maximale Geschwindigkeit des Schwimmers beträgt $1,9 \frac{m}{s}$, die minimale Geschwindigkeit beträgt $1,1 \frac{m}{s}$.
- c) Die mittlere Geschwindigkeit beträgt $1,5 \frac{m}{s}$. Somit benötigt der Schwimmer für eine Strecke von 100 m $66,7$ s.
- d) Treffen Sie Annahmen darüber, welche Werte für einen guten Kraulschwimmer gelten könnten. Geben Sie einen entsprechenden Funktionsterm an.
Mittlere Geschwindigkeit: $1,8 \frac{m}{s}$ Maximale Geschwindigkeit: $2,1 \frac{m}{s}$
Zeitspanne zwischen zwei Zügen: $0,6$ s $g(t) = 0,3\sin(\frac{2\pi}{0,6}t) + 1,8$

15

- 3 Das Riesenrad in Wien hat einen Durchmesser von 61 Meter.
Die Gondel erreicht (mit Ihrer Aufhängung A) eine Höhe von 64,75 Meter.
Eine Umdrehung dauert etwa 300 Sekunden.



- a) Bestimmen Sie die Entfernung von zwei nebeneinander hängenden Gondeln, wenn 15 Gondeln angebracht sind. Vereinfacht nehmen wir an, eine Gondel entspricht einem Punkt.

$$\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ; r = 30,5$$

$$\text{Es gilt: } \sin(12^\circ) = \frac{e}{30,5} \Rightarrow e = 12,68$$

Die Gondeln haben eine Entfernung von etwa 12,7 m oder als Überschlag: Abstand = $\frac{\text{Umfang}}{15} \approx 12,77$

Ermitteln Sie die Länge der Strecke, die der Punkt A in einer Stunde zurücklegt.

$$\text{Umfang der Umdrehung in m: } U = 2 \cdot \pi \cdot 30,5 = 191,64$$

$$\text{Geschwindigkeit von Punkt A: } v = \frac{e}{t} = \frac{191,64 \text{ m}}{300 \text{ s}} = 0,638 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,2968 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Punkt A legt in einer Stunde etwa 2,3 km zurück.

- b) Beschreiben Sie die Höhe des Punktes A im Verlauf einer Umdrehung. Stellen Sie die Höhe von A in Abhängigkeit von der Zeit in einem geeigneten Koordinatensystem dar und geben Sie einen passenden Funktionsterm an. Bestimmen Sie die Höhe des Punktes A nach einer Minute.

Trigonometrische Funktion: $h(t) = a \cos(bt) + c$

wegen $h(0) = 64,75$ größter Wert

Größte Höhe: 64,75; kleinste Höhe: 3,75

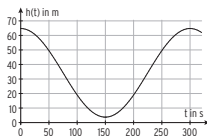
$$\text{also Mittellinie } y = 34,25; \frac{64,75 + 3,75}{2} = 34,25$$

$$\text{Periode 300s ergibt aus } p = \frac{2\pi}{b}; b = \frac{\pi}{150}$$

$$\text{Amplitude: } \frac{61}{2} = 30,5 = a$$

$$h(t) = 30,5 \cos\left(\frac{\pi}{150}t\right) + 34,25; h(60) = 43,675$$

A ist nach einer Minute 43,675 m hoch.



- c) Jan behauptet, die Höhe des Punktes A im Verlauf einer Umdrehung kann durch eine Polynomfunktion beschrieben werden.

Diskutieren Sie diese Behauptung.

Die Polynomfunktion müsste zwei Maximalstellen und eine Minimalstelle besitzen, der Graph muss symmetrisch sein zur Geraden mit der Gleichung $x = 150$. In Frage kommt eine Polynomfunktion 4. Grades.

16

3 Differenzialrechnung

Ableitung

- 1 Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate auf [a; b].

$$f(x) = (x-3)^2; [0; 3] \quad \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{0 - 9}{3} = -3$$

$$f(x) = 4x^2 - 2x^3; [1; 3] \quad \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-18 - 2}{2} = -10$$

$$f(x) = 3e^{2x}; [-1; 2] \quad \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{3e - 3e^{-0,5}}{3} = 2,11$$

$$f(x) = 2\sin(2x); [0; \frac{\pi}{4}] \quad \frac{f(\frac{\pi}{4}) - f(0)}{\frac{\pi}{4} - 0} = \frac{2 - 0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{\pi}$$

- 2 Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate in x_0 .

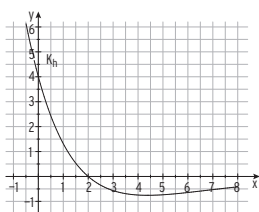
$$f(x) = x^2 + 2; x_0 = 2 \quad \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 + 2 - 6}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4 \quad m_t = f'(2) = 4$$

$$f(x) = 6x^2 - 2; x_0 = 1 \quad \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{6(1+h)^2 - 2 - 4}{h} = \frac{6h^2 + 12h}{h} = 6h + 12 \quad m_t = f'(1) = 12$$

$$f(x) = x^2 - x; x_0 = 0 \quad \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 - h}{h} = h - 1; \quad h - 1 \rightarrow -1 \text{ für } h \rightarrow 0 \quad m_t = f'(0) = -1$$

- 3 Gezeichnet ist das Schaubild einer Funktion h mit der Definitionsmenge $D = [-0,5; 8]$. Prüfen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

| | |
|--|--|
| $h(1) < 0$ | <input checked="" type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f) |
| Das Schaubild von h' geht durch den Punkt $Q(2 0)$. | <input type="checkbox"/> (w) <input checked="" type="checkbox"/> (f) |
| $h(7) = -0,5$ | <input type="checkbox"/> (w) <input checked="" type="checkbox"/> (f) |
| Es gibt ein $x \in D$ für das gilt: $h'(x) = 0$. | <input checked="" type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f) |
| Die Gleichung $h'(x) = 1$ hat eine Lösung. | <input type="checkbox"/> (w) <input checked="" type="checkbox"/> (f) |



18

2 Verknüpfung, Verkettung und Umkehrung von Funktionen

- 1 Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = x - 1$ und g mit $g(x) = \frac{1}{2}x^2$; $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Funktion mit dem Funktionsterm.

a) $f(x) + g(x) = x - 1 + \frac{1}{2}x^2$

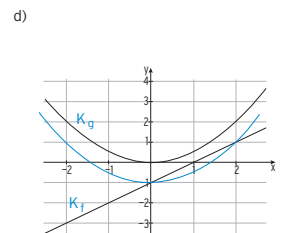
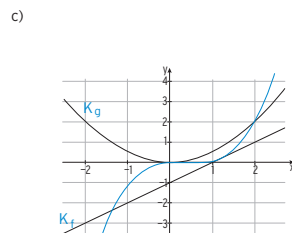
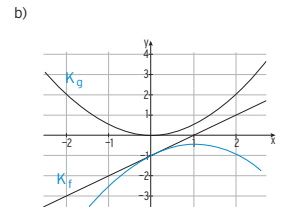
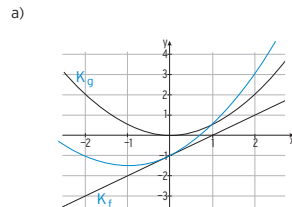
b) $f(x) - g(x) = x - 1 - \frac{1}{2}x^2$

c) $f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot (x - 1)$

d) $f(g(x)) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

e) $g(f(x)) = \frac{1}{2}(x - 1)^2$

Zeichnen Sie das Schaubild der Funktionen a) bis d).



17

- 4 Bilden Sie die erste Ableitung.

| | |
|---|--|
| $f(x) = 2\cos(x) + 1$ | $f(x) = -2\sin(x)$ |
| $f(x) = -3\sin(x) - x$ | $f(x) = -3\cos(x) - 1$ |
| $f(x) = \frac{1}{4}x^5 + x^3 - \frac{x}{3}$ | $f(x) = \frac{5}{4}x^4 + 3x^2 - \frac{1}{3}$ |
| $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + 12x^2 + 4x - \frac{13}{8}$ | $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 24x + 4$ |
| $f(x) = 5e^x + 2x - 1$ | $f(x) = 5e^x + 2$ |
| $f(x) = ae^x + b$ | $f(x) = ae^x$ |
| $f(x) = \frac{3}{x}$ | $f(x) = -\frac{3}{x^2}$ Bem.: $f(x) = 3x^{-1}$ |
| $f(x) = -4\sqrt{x}$ | $f(x) = -2x^{-0,5}$ Bem.: $f(x) = -4x^{0,5}$ |

- 5 Bilden Sie die erste Ableitung mithilfe der Kettenregel.

| | |
|-----------------------------------|--|
| $f(x) = 2\sin(3x)$ | $f(x) = 3 \cdot 2\cos(3x) = 6\cos(3x)$ |
| $f(x) = \frac{5}{2}e^{4x} + 5x$ | $f(x) = 10e^{4x} + 5$ |
| $f(x) = 0,25e^{x-1} + 2$ | $f(x) = 0,25e^{x-1}$ |
| $f(x) = (2x - 4)^3$ | $f(x) = 3(2x - 4)^2 \cdot 2 = 6(2x - 4)^2$ |
| $f(x) = -1,2e^{2-3x} + x^3$ | $f(x) = -3 \cdot (-1,2e^{2-3x}) + 3x^2 = 3,6e^{2-3x} + 3x^2$ |
| $f(x) = 2ae^{bx+c}$ | $f(x) = 2abe^{bx+c}$ |
| $f(x) = -\pi \cos(0,5x)$ | $f(x) = 0,5\pi \sin(0,5x)$ |
| $f(x) = x - \sin(0,3\pi x)$ | $f(x) = 1 - 0,3\pi \cos(0,3\pi x)$ |
| $f(x) = \frac{9}{5}e^{x^2+1} + 2$ | $f(x) = 2x \cdot \frac{9}{5}e^{x^2+1} = \frac{18}{5}x \cdot e^{x^2+1}$ |
| $f(x) = 4\sin(3+2x) + 1$ | $f(x) = 8\cos(3+2x)$ |
| $f(x) = \pi - 2\cos(2(x+1))$ | $f(x) = 4\sin(2(x+1))$ |
| $f(x) = 4 \cos(\frac{x}{5})$ | $f(x) = -\frac{4}{5} \sin(\frac{x}{5})$ |

19