Patyna

Mathematik

für das Berufliche Gymnasium in Niedersachsen
Kerncurriculum und Bildungsstandards

Einführungs- und Qualifikationsphase – Schwerpunkt Wirtschaft

Formelsammlung

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasserin:

Marion Patyna

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Umschlag: Hintergrund: ECE, Ernst-August-Galerie, Hannover,
Kreis rechts oben: Candy Box – Fotolia.com, Kreis Mitte: Colourbox.de,
Kreis links: Syda Productions – Colourbox.de, Grafik: Colourbox.de

* * * * *

3. Auflage 2021
© 2018 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 1685-03
ISBN 978-3-8120-1685-8

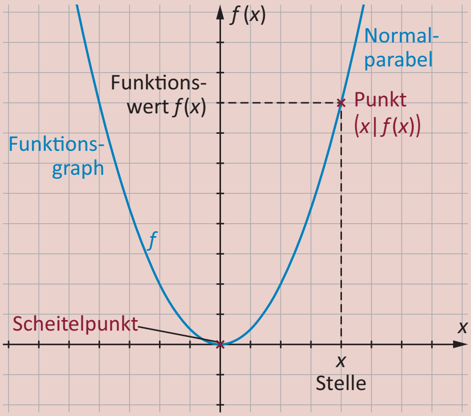
Quadratische Funktionen

$f\colon f(x) = ax^2 + bx + c$

f	Name der Funktion
$f(x)$	Funktionswert
$ax^2 + bx + c$	Funktionsterm

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b, c \in \mathbb{R}$

$f(x) = ax^2 + bx + c$



Gleichung und Graph
einer quadratischen Funktion

ax^2	Quadratglied
bx	Linearglied
c	Absolutglied

Funktionsgraph: Parabel

Polynomdarstellung
(allgemeine Form, Normalform)
$f(x) = ax^2 + bx + c$
Streckungs-, Stauchungs-, Spiegelungs-faktor (Formfaktor)

$a = 1$	Normalparabel
$\lvert a \rvert > 1$	Streckung in $f(x)$-Richtung (Ordinatenrichtung)
$0 < \lvert a \rvert < 1$	Stauchung in $f(x)$-Richtung (Ordinatenrichtung)
$a < 0$	Spiegelung an der Abszissenachse, Öffnung der Parabel nach unten

Linearfaktordarstellung
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
Nullstellen bei x_1 und x_2
Scheitelpunkt bei $x_S = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2}$;
mit $x_1 < x_2$

Darstellungsformen und Parametervariation
$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Fortsetzung

Scheitelpunktform

$f(x) = a(x-u)^2 + v$

Scheitelpunkt $S(u \mid v)$

$u<0$	Verschiebung nach links
$u>0$	Verschiebung nach rechts
$v<0$	Verschiebung nach unten
$v>0$	Verschiebung nach oben

Fortsetzung

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

und einer Parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$

Schnittpunkt mit der Ordinatenachse

$x = 0 \Rightarrow$

$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

$f(0) = c$

Schnittpunkte mit der Abszissenachse

(Nullstellen)

$f(x) = 0$

Polynomdarstellung/Normalform

p-q-Formel

$f(x) = x^2 + px + q$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{\text{Diskriminante } D}}$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

a-b-c-Formel

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{mit } D = b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fortsetzung

Quadratische Funktionen

Fortsetzung

Scheitelpunktform

$f(x) = a(x-u)^2 + v = 0$

Lösung

$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{v}{a}} + u$ mit $D = -\frac{v}{a}$

$x_1 = \sqrt{-\frac{v}{a}} + u$ und $x_2 = -\sqrt{-\frac{v}{a}} + u$

Linearfaktordarstellung

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

Satz vom Nullprodukt

$0 = a(x-x_1)(x-x_2)$

$0 = (x-x_1) \Rightarrow x = x_1$

$0 = (x-x_2) \Rightarrow x = x_2$

Nullstellenarten bei einer Parabel

$D > 0$

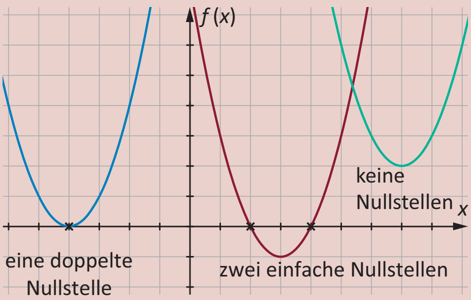
zwei einfache Nullstellen,

$D = 0$

eine doppelte Nullstelle,

$D < 0$

keine Nullstelle



Begrenztes Wachstum

Begrenztes Wachstum

Explizite Darstellung

$f\colon f(t) = g - a \cdot b^t = g - a \cdot e^{(\ln b)\cdot t}$
$= g - a \cdot e^{k \cdot t}$

Begrenzte Zunahme
$b = 1 - p$ mit $0 < b < 1$
$k < 0$
$a > 0$
$g > f(0)$

Begrenzte Abnahme
$b = 1 - p$ mit $0 < b < 1$
$k < 0$
$a < 0$
$g < f(0)$

t	Zeitschritt, Variable
$f(t)$	Bestand
b	Wachstums- oder Zerfallsfaktor
p	Prozentsatz $0 < p < 1$
k	Wachstums- oder Zerfallskonstante $k = \ln b$
g	Sättigungsgrenze
$a \cdot b^t = a \cdot e^{(\ln b)\cdot t} = a \cdot e^{k \cdot t}$ $g - f(t)$	Sättigungsmanko
$f(0) = g - a$	Anfangsbestand bei $t = 0$

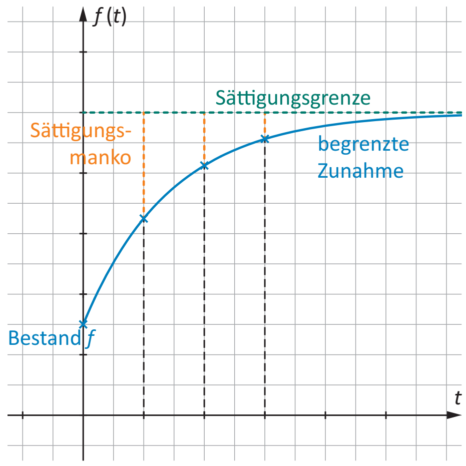
Rekursive Darstellung

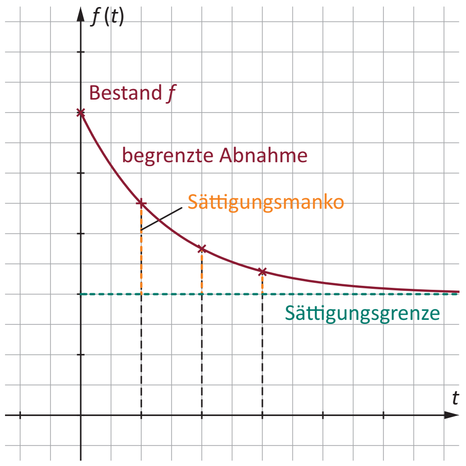
$f(t+1) = f(t) + (g - f(t)) \cdot p$

Differenzialgleichung

$f'(t) = -k \cdot (g - f(t))$

$f'(t)$	Wachstumsgeschwindigkeit, proportional zum Sättigungsmanko





Logistisches Wachstum

Explizite Darstellung

$$f\colon f(t) = \frac{g}{1 + a \cdot e^{-b \cdot t}} = \frac{g}{1 + \left(\frac{g}{f(0)} - 1\right) \cdot e^{-k \cdot g \cdot t}}$$

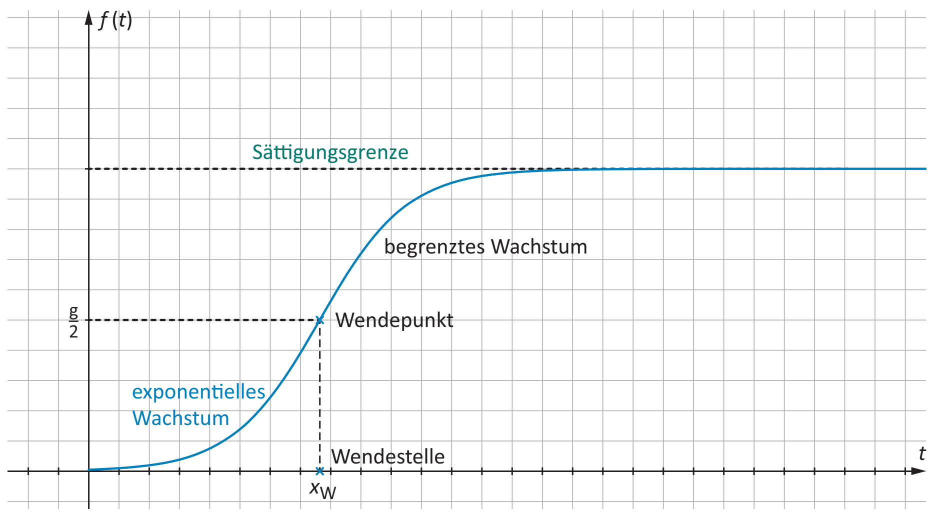
t	Zeitschritt, Variable
$f(t)$	Bestand
b	$b = k \cdot g$ $b > 0$
a	$a = \frac{g}{f(0)} - 1$ $a > 0$
k	Wachstumskonstante $k > 0$
g	Sättigungsgrenze $g = f(0) \cdot (a + 1)$ $g > 0$
$f(0) = \frac{g}{a+1}$	Anfangsbestand bei $t = 0$
$g - f(t)$	Sättigungsmanko

Differenzialgleichung

$$f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (g - f(t))$$

$$k > 0$$

$f'(t)$	Wachstumsgeschwindigkeit, proportional zum Bestand und zum Sättigungsmanko



Logistisches Wachstum

Angebot und Nachfrage

Angebot und Nachfrage

Lineare Nachfragefunktion

$p_N\colon\ p_N(x) = m\,x + b$

$m < 0,\ \ b > 0$

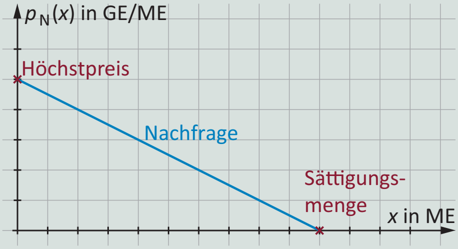
Höchstpreis

$p_N(0) = m \cdot 0 + b = b$

Sättigungsmenge

$p_N(x) = m\,x + b = 0$

$x = \frac{-b}{m} > 0$



Nachfragefunktion

$p_N(x)$	Preis
x	Menge
b	Höchstpreis
$\frac{-b}{m}$	Sättigungsmenge

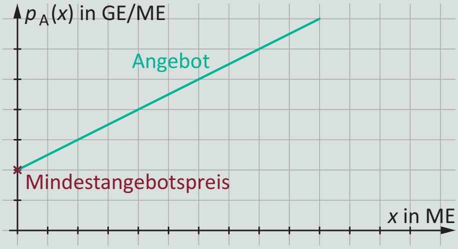
Lineare Angebotsfunktion

$p_A\colon p_A(x) = m\,x + b$

$m, b > 0$

Mindestangebotspreis

$p_A(0) = m \cdot 0 + b$



Angebotsfunktion

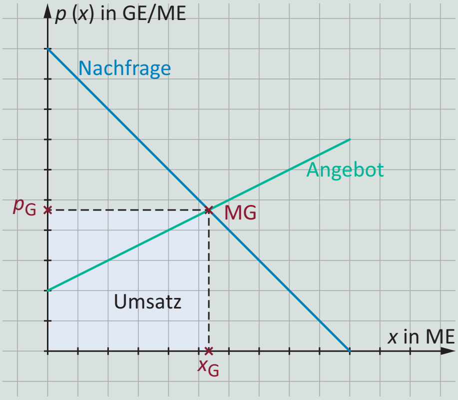
$p_A(x)$	Preis
x	Menge
b	Mindestangebotspreis

$p_N(x) = p_A(x)$

$\Rightarrow$ MG $(x_G \mid p_G)$

Umsatz im Marktgleichgewicht

$U = x_G \cdot p_G$



Marktgleichgewicht

MG	Marktgleichgewicht
x_G	Gleichgewichtsmenge
p_G	Gleichgewichtspreis
U	Umsatz
$p_N(x)$	Nachfragefunktion
$p_A(x)$	Angebotsfunktion

Nachfrageüberschuss

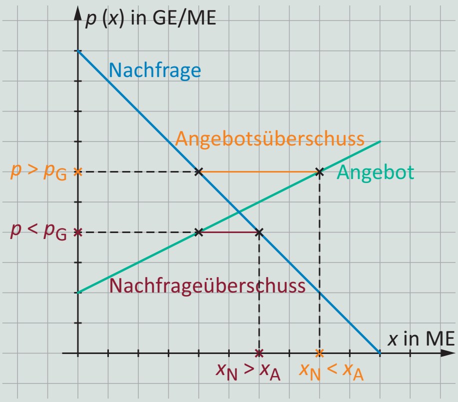
$p < p_G$

$\Rightarrow x_N > x_A$

Angebotsüberschuss

$p > p_G$

$\Rightarrow x_N < x_A$

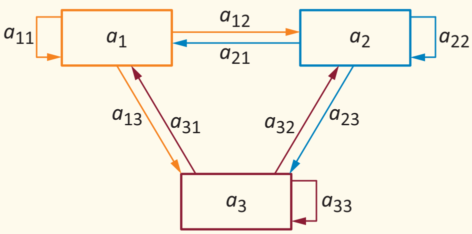


Marktungleichgewicht

p	Marktpreis
p_G	Gleichgewichtspreis
x_N	Nachfragemenge
x_A	Angebotsmenge

Angebot und Nachfrage

Markow-Ketten



Übergangsdiagramm

Untersuchung langfristiger Entwicklungs- und Veränderungsprozesse

a_{mm}	Stammkunden, Stammwähler, Wechsel von a_m zu a_m, Übergangswahrscheinlichkeit $0 \le a_{mm} \le 1$
a_{1m}	Wechsel von a_1 zu a_m, $0 \le a_{1m} \le 1$

nach / von	a_1	a_2	a_1
a_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_2	a_{21}	a_{22}	a_{32}
a_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Übergangstabelle

a_{mm}	Stammkunden, Stammwähler, Wechsel von a_m zu a_m, Übergangswahrscheinlichkeit $0 \le a_{mm} \le 1$
a_{1m}	Wechsel von a_1 zu a_m, $0 \le a_{1m} \le 1$

Stochastische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Übergangsmatrix

A	reguläre Übergangsmatrix, quadratische und invertierbare Matrix
a_{mm}	Elemente der Matrix $0 \le a_{mm} \le 1$
Zeilensumme = 1	

Anfangsverteilung / Ausgangsverteilung

$$\vec{v}_0^{\,T} = (v_1 \quad \dots \quad v_m)$$

Ausgangsvektor

$\vec{v}_0^{\,T}$	Ausgangsvektor
v_m	prozentuale Häufigkeit zu Beginn der Untersuchung
Zeilensumme = 1	

Prozentuale Verteilung nach *n* Perioden

$$\vec{v}_n^{\,T} = \vec{v}_0^{\,T} \cdot A^n$$

Situationen nach *n* Perioden

$\vec{v}_n^{\,T}$	Vektor für die Verteilung nach n Perioden
$\vec{v}_0^{\,T}$	Ausgangsvektor
A	Übergangsmatrix
n	Anzahl der Perioden
Zeilensumme = 1	

Prozentuale Verteilung in der Vor-Periode

$\vec{v}_{-1}^{\,T} = \vec{v}_0^{\,T} \cdot A^{-1}$

Situation in der Periode vor der Untersuchung

$\vec{v}_{-1}^{\,T}$	prozentuale Häufigkeit für die Periode vor der Untersuchung
$\vec{v}_0^{\,T}$	Ausgangsvektor
A^{-1}	Inverse der Übergangsmatrix A
Zeilensumme = 1	

Stationäre Verteilung / stabile prozentuale Verteilung

$\vec{v}_{\infty}^{\,T} \cdot A = \vec{v}_{\infty}^{\,T}$

Beispiel

$$(v_1 \quad v_2 \quad 1 - v_1 - v_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= (v_1 \quad v_2 \quad 1 - v_1 - v_2)$$

Fixvektor

$\vec{v}_{\infty}^{\,T}$	Fixvektor
A	Übergangsmatrix
Zeilensumme = 1	

Stabile prozentuale Verteilung

$$\lim_{n \to \infty} A^n = A_\infty = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$$

Grenzmatrix

A	Übergangsmatrix
n	Anzahl der Perioden
A_∞	Grenzmatrix
v_n	langfristig, stabile prozentuale Häufigkeit

Rechnen mit Vektoren

Rechnen mit Vektoren

Addition von Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	Vektoren
a_n, b_n	Elemente der Vektoren

Rechengesetze

Neutrales Element

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

Inversität

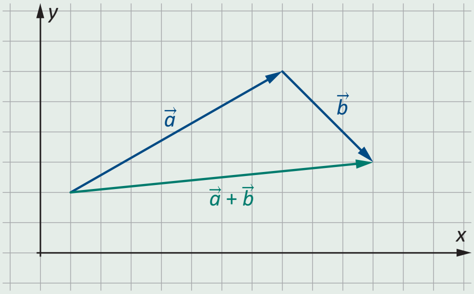
$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$

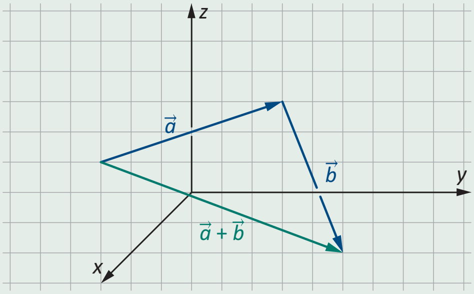
Kommutativgesetz

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Assoziativgesetz

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$



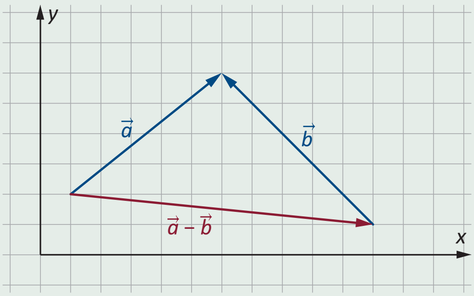


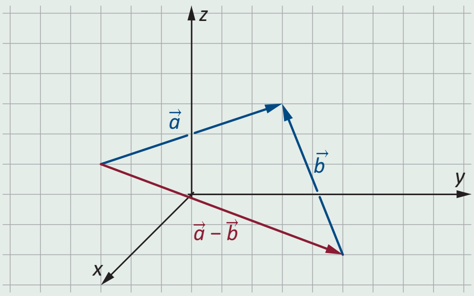
$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Rechengesetze

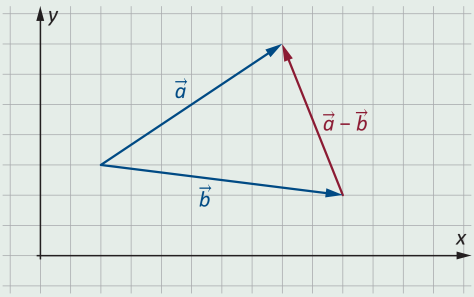
$\vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \vec{a} - \vec{b}$

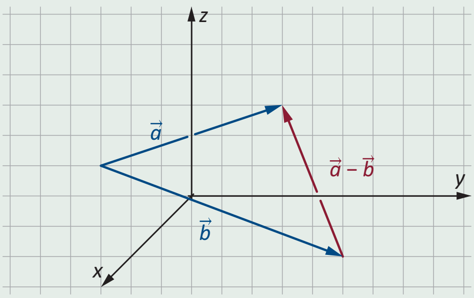
- **Spitze an Spitze**





- **Anfangspunkt an Anfangspunkt**





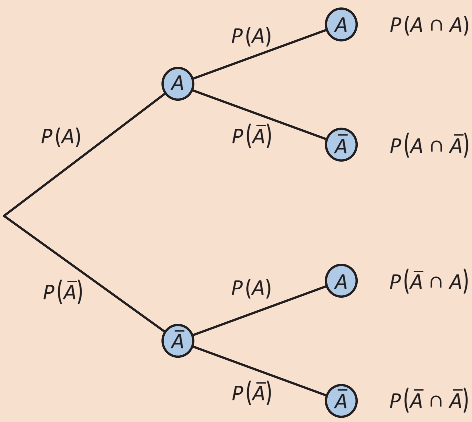
Subtraktion von Vektoren

$\vec{a}, \vec{b}$	Vektoren
a_n, b_n	Elemente der Vektoren

Baumdiagramme und Pfadregeln

Baumdiagramm

$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A
$P(\bar{A})$	Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis $\bar{A}$
$P(A \cap \bar{A})$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ereignis (A und $\bar{A}$) eintritt



- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(A \cap A) + P(A \cap \bar{A}) + P(\bar{A} \cap A)$
  $+ P(\bar{A} \cap \bar{A}) = 1$

Variation

Reihenfolge wird beachtet

$A\bar{A} \neq \bar{A}A$

Kombination

Reihenfolge wird nicht beachtet

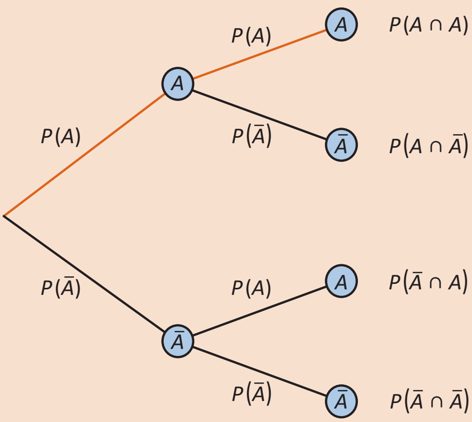
$A\bar{A} = \bar{A}A$

Pfadmultiplikationsregel

$P(A \cap A)$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ereignis (A und A) eintritt
$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A

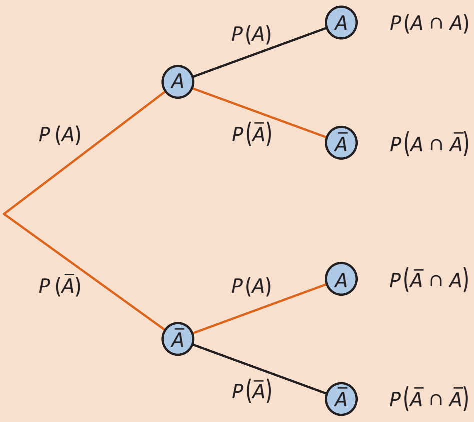
1. Pfadregel

$P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A)$



2. Pfadregel

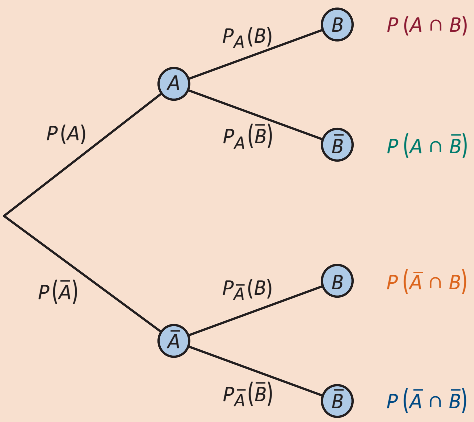
$$P(A\bar{A}) = P(A \cap \bar{A}) + P(\bar{A} \cap A)$$
$$= P(A) \cdot P(\bar{A}) + P(\bar{A}) \cdot P(A)$$



Pfadadditionsregel

$P(A\bar{A})$	Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis, in dem sowohl A als auch $\bar{A}$ vorkommt
$P(A \cap A)$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ereignis (A und A) eintritt
$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A

Bedingte Wahrscheinlichkeit



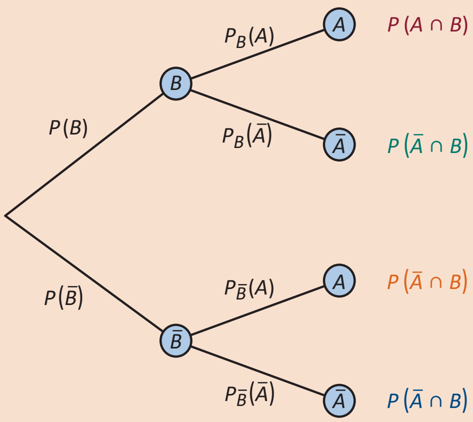
Baumdiagramm

$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A
$P_A(B)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B unter der Voraussetzung, dass Ereignis A schon eingetreten ist
$P(A \cap B)$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ereignis (A und B) eintritt

Vier-Felder-Tafel

	B	$\bar{B}$	$\sum$
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
$\sum$	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Fortsetzung



Fortsetzung

Inverses Baumdiagramm

Umgekehrtes Baumdiagramm

$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *A*
$P_B(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *A* unter der Voraussetzung, dass Ereignis *B* schon eingetreten ist
$P(A \cap B)$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ereignis (*A* und *B*) eintritt

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	$P(B \cap A)$	$P(B \cap \overline{A})$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(\overline{B} \cap A)$	$P(\overline{B} \cap \overline{A})$	$P(\overline{B})$
$\sum$	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Inverse Vier-Felder-Tafel

Umgekehrte Vier-Felder-Tafel

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A) \cdot \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)}$$

mit $P(A), P(B) \neq 0$

Satz von Bayes

$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *A*
$P_B(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *A* unter der Voraussetzung, dass Ereignis *B* schon eingetreten ist
$P(A \cap B)$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ereignis (*A* und *B*) eintritt

Stochastisch unabhängig

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P_B(A) = P(A)$
- $P_A(B) = P(B)$

Stochastisch abhängig

- $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$
- $P_B(A) \neq P(A)$
- $P_A(B) \neq P(B)$

Abhängige und unabhängige Ereignisse

$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *A*
$P_B(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *A* unter der Voraussetzung, dass Ereignis *B* schon eingetreten ist
$P(A \cap B)$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ereignis (*A* und *B*) eintritt