Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Umschlag: © Adrian Schulz Foto: Mall of Berlin

* * * * * * * * * *

4. Auflage 2023

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de
Merkur-Nr. 0519-04
ISBN 978-3-8120-1042-9

Vorwort

Vorbemerkungen

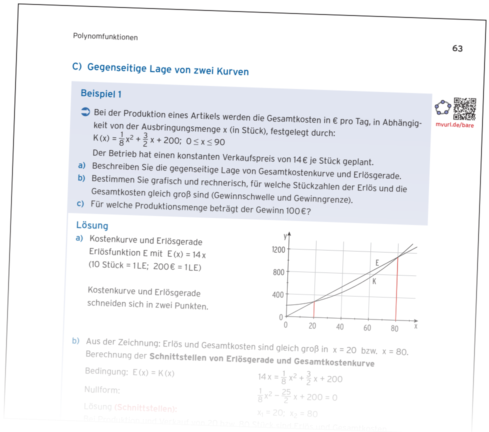
Der vorliegende Band ist ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht in allen Berufskollegs und in Bildungsgängen, die zur Fachhochschulreife führen. Das Buch behandelt den gesamten Lehrstoff des Berufskollegs, nämlich die Polynomfunktionen, die Exponentialfunktionen und deren Linearkombinationen mit linearen Funktionen, die trigonometrischen Funktionen, lineare Gleichungssysteme, Differenzial- und Integralrechnung. Grundlage der Inhalte ist der Lehrplan für Bildungsgänge, die zum Erwerb der Fachhochschulreife führen, vom August 2015. Grundlage der Inhalte ist der *Lehrplan für Bildungsgänge, die zum Erwerb der Fachhochschulreife führen*, vom August 2015.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam die im Lehrplan geforderten Inhalte. Die Autoren orientieren sich an den in den Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife formulierten mathematischen Kompetenzen (Mathematisch modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).
Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die in den Bildungsstandards aufgeführten Kompetenzen wie auch die Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Begleitend wird ein Arbeitsheft (Merkur-Nr. 2519) angeboten. Es soll Schüler und Lehrer durch Auf gaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.

Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.


Polynomfunktionen 63

C) Gegenseitige Lage von zwei Kurven

Beispiel 1

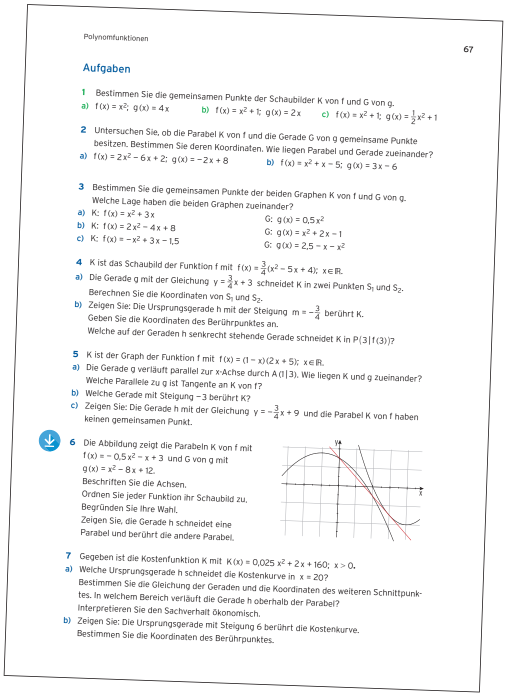
Bei der Produktion eines Artikels werden die Gesamtkosten in € pro Tag, in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge x (in Stück), festgelegt durch:
$K(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + 200;\ 0 \le x \le 90$
Der Betrieb hat einen konstanten Verkaufspreis von 14 € je Stück geplant.
a) Beschreiben Sie die gegenseitige Lage von Gesamtkostenkurve und Erlösgerade.
b) Bestimmen Sie grafisch und rechnerisch, für welche Stückzahlen der Erlös und die Gesamtkosten gleich groß sind (Gewinnschwelle und Gewinngrenze).
c) Für welche Produktionsmenge beträgt der Gewinn 100 €?

mvurl.de/bare

Lösung
a) Kostenkurve und Erlösgerade
Erlösfunktion E mit $E(x) = 14x$
(10 Stück = 1 LE; 200 € = 1 LE)
Kostenkurve und Erlösgerade schneiden sich in zwei Punkten.
b) Aus der Zeichnung: Erlös und Gesamtkosten sind gleich groß in $x = 20$ bzw. $x = 80$.
Berechnung der Schnittstellen von Erlösgerade und Gesamtkostenkurve
Bedingung: $E(x) = K(x)$ $\quad 14x = \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + 200$
Nullform: $\quad \frac{1}{8}x^2 - \frac{25}{2}x + 200 = 0$
Lösung (Schnittstellen): $x_1 = 20;\ x_2 = 80$

Jede Lerneinheit endet mit einer umfassenden Anzahl von Aufgaben. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Fragestellungen mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Probleme aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.

Eine Differenzierung der Aufgaben ist durch Farben gegeben:
grün: Lösung ohne Hilfsmittel
blau: keine Vorgabe zur Lösung


Polynomfunktionen 67

Aufgaben

1 Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der Schaubilder K von f und G von g.
a) $f(x) = x^2;\ g(x) = 4x$ b) $f(x) = x^2 + 1;\ g(x) = 2x$ c) $f(x) = x^2 + 1;\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$

2 Untersuchen Sie, ob die Parabel K von f und die Gerade G von g gemeinsame Punkte besitzen. Bestimmen Sie deren Koordinaten. Wie liegen Parabel und Gerade zueinander?
a) $f(x) = 2x^2 - 6x + 2;\ g(x) = -2x + 8$ b) $f(x) = x^2 + x - 5;\ g(x) = 3x - 6$

3 Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der beiden Graphen K von f und G von g. Welche Lage haben die beiden Graphen zueinander?
a) K: $f(x) = x^2 + 3x$ G: $g(x) = 0{,}5x^2$
b) K: $f(x) = 2x^2 - 4x + 8$ G: $g(x) = x^2 + 2x - 1$
c) K: $f(x) = -x^2 + 3x - 1{,}5$ G: $g(x) = 2{,}5 - x - x^2$

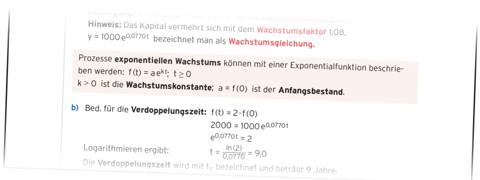
4 K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{4}(x^2 - 5x + 4);\ x \in \mathbb{R}$.
a) Die Gerade g mit der Gleichung $y = \frac{3}{4}x + 3$ schneidet K in zwei Punkten S_1 und S_2. Berechnen Sie die Koordinaten von S_1 und S_2.
b) Zeigen Sie: Die Ursprungsgerade h mit der Steigung $m = -\frac{3}{4}$ berührt K. Geben Sie die Koordinaten des Berührpunktes an. Welche auf der Geraden h senkrecht stehende Gerade schneidet K in $P(3\,|\,f(3))$?

5 K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = (1 - x)(2x + 5);\ x \in \mathbb{R}$.
a) Die Gerade g verläuft parallel zur x-Achse durch A(1 | 3). Wie liegen K und g zueinander? Welche Parallele zu g ist Tangente an K von f?
b) Welche Gerade mit Steigung −3 berührt K?
c) Zeigen Sie: Die Gerade h mit der Gleichung $y = -\frac{3}{4}x + 9$ und die Parabel K von f haben keinen gemeinsamen Punkt.

6 Die Abbildung zeigt die Parabeln K von f mit $f(x) = -0{,}5x^2 - x + 3$ und G von g mit $g(x) = x^2 - 8x + 12$. Beschriften Sie die Achsen. Ordnen Sie jeder Funktion ihr Schaubild zu. Begründen Sie Ihre Wahl. Zeigen Sie, die Gerade h schneidet eine Parabel und berührt die andere Parabel.

7 Gegeben ist die Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}025x^2 + 2x + 160;\ x > 0$.
a) Welche Ursprungsgerade h schneidet die Kostenkurve in $x = 20$? Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden und die Koordinaten des weiteren Schnittpunktes. In welchem Bereich verläuft die Gerade h oberhalb der Parabel? Interpretieren Sie den Sachverhalt ökonomisch.
b) Zeigen Sie: Die Ursprungsgerade mit Steigung 6 berührt die Kostenkurve. Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührpunktes.

Für Aufgaben mit dem **Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese im Downloadbereich zum Buch auf unserer Website: http://www.merkur-verlag.de

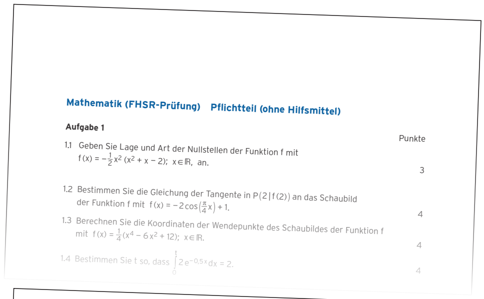

Hinweis: Das Kapital vermehrt sich mit dem Wachstumsfaktor 1,08.
$y = 1000\,e^{0{,}0770t}$ bezeichnet man als Wachstumsgleichung.

Prozesse exponentiellen Wachstums können mit einer Exponentialfunktion beschrieben werden: $f(t) = a\,e^{kt};\ t \ge 0$
$k > 0$ ist die Wachstumskonstante; $a = f(0)$ ist der Anfangsbestand.

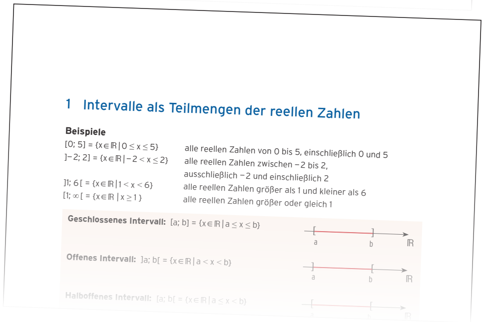
b) Bed. für die Verdoppelungszeit: $f(t) = 2 \cdot f(0)$
$2000 = 1000\,e^{0{,}0770t}$
$e^{0{,}0770t} = 2$
Logarithmieren ergibt: $t = \frac{\ln(2)}{0{,}0770} = 9{,}0$
Die Verdoppelungszeit wird mit t_V bezeichnet und beträgt 9 Jahre.

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

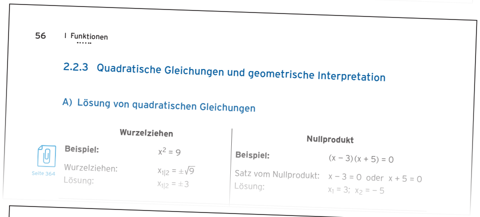
Musteraufgaben: Das Kapitel beinhaltet einen Satz von Musteraufgaben zur Prüfung der Fachhochschulreife.



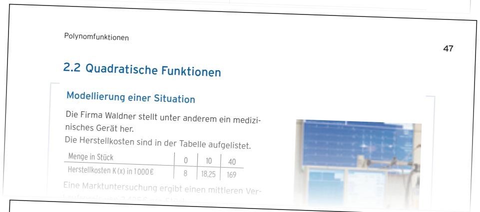
Grundwissen: Die Schüler im Berufskolleg kommen aus verschiedenen Schularten mit unterschiedlichen Vorkenntnissen. Um die Schüler dennoch möglichst schnell auf ein gleiches Wissensniveau zu bringen und damit gleiche Ausgangsbedingungen für den Mathematikunterricht zu schaffen, gibt es ein umfangreiches **Kapitel zur Wiederholung** der grundlegenden Rechentechniken und aller mathematischen Grundlagen aus der Mittelstufe.

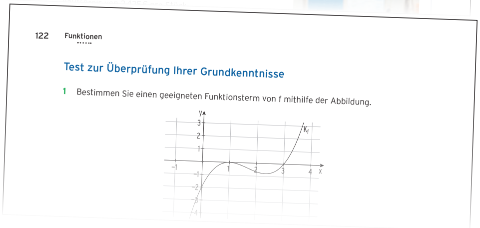


Die **Heftklammer** im Lehrbuch mit Seitenangabe weist auf ein entsprechendes Grundwissenkapitel im Anhang hin.

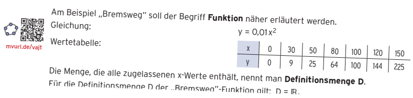


Die Aufgaben **„Modellierung einer Situation“** und **„Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse“** werden im Anhang ausführlich gelöst.

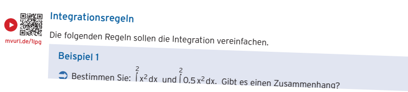




Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Im Buch wird **Geogebra** in vielfältiger Weise, zur Erarbeitung von mathematischen Inhalten und zur Lösung von Aufgaben eingesetzt.



Videos dienen der Veranschaulichung von Problemen und Erläuterung von Lösungswegen. Sie unterstützen die Lernenden beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge.



Inhaltsverzeichnis

I Funktionen 11

1 Einführung in Funktionen ... 11
1.1 Das rechtwinklige Koordinatensystem ... 12
1.2 Abhängigkeiten und grafische Darstellung ... 15
1.3 Definition einer Funktion ... 17

2 Polynomfunktionen (Ganzrationale Funktionen) ... 22
2.1 Lineare Funktionen ... 22
2.1.1 Einführung ... 23
2.1.2 Die Steigung einer Geraden ... 25
2.1.3 Punktprobe ... 29
2.1.4 Aufstellen von Geradengleichungen ... 30
2.1.5 Schnittpunkte ... 34
2.1.6 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben ... 43
2.2 Quadratische Funktionen ... 47
2.2.1 Einführungsbeispiel ... 48
2.2.2 Von der Normalparabel zur allgemeinen Parabel ... 49
2.2.3 Quadratische Gleichungen und geometrische Interpretation ... 56
2.2.4 Aufstellen von Parabelgleichungen ... 69
2.2.5 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben ... 77
2.3 Polynomfunktionen höheren Grades ... 81
2.3.1 Potenzfunktionen ... 82
2.3.2 Polynomfunktionen 3. Grades – Einführung ... 84
2.3.3 Polynomfunktionen 4. Grades – Einführung ... 88
2.3.4 Polynomgleichungen und geometrische Interpretation ... 93
2.3.5 Aufstellen von Funktionstermen ... 109
2.3.6 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben ... 117

3 Exponentialfunktionen ... 123
3.1 Einführungsbeispiele ... 124
3.2 Definition einer Exponentialfunktion ... 126
3.3 Die Euler'sche Zahl e ... 128
3.4 Exponentialfunktionen zur Basis e ... 129
3.5 Schaubilder von Exponentialfunktionen ... 131
3.6 Exponentialgleichungen und geometrische Interpretation ... 137
3.6.1 Der natürliche Logarithmus ... 137
3.6.2 Exponentialgleichungen ... 138
3.6.3 Bestimmung von gemeinsamen Punkten ... 142
3.7 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben ... 147
3.7.1 Exponentielles Wachstum ... 147
3.7.2 Beschränktes Wachstum ... 153

4 Trigonometrische Funktionen ... 156
4.1 Einführungsbeispiele ... 157
4.2 Definition der Winkelfunktionen ... 158
4.2.1 Definition der Winkelfunktionen für Winkel von 0° bis 90° ... 158
4.2.2 Definition der Winkelfunktionen für beliebige Winkel ... 162
4.2.3 Das Bogenmaß eines Winkels ... 166
4.3 Trigonometrische Funktionen ... 167
4.3.1 Sinus- und Kosinusfunktion ... 167
4.3.2 Funktionen der Form $f(x) = a\sin(x) + b$ bzw. $f(x) = a\cos(x) + b$ ... 168
4.3.3 Funktionen der Form $f(x) = a\sin(kx) + b$ bzw. $f(x) = a\cos(kx) + b$ ... 172

4.4 Trigonometrische Gleichungen und geometrische Interpretation ... 177
4.4.1 Lösung von trigonometrischen Gleichungen ... 177
4.4.2 Gemeinsame Punkte ... 186
4.5 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben ... 192

II Lineare Gleichungssysteme 196

1 Einführung ... 197

2 Umformung und Lösung eines linearen Gleichungssystems ... 199
2.1 Das LGS ist eindeutig lösbar ... 199
2.2 Das LGS ist unlösbar ... 203
2.3 Das LGS ist mehrdeutig lösbar ... 204
2.4 Anwendungen ... 210

III Differenzialrechnung 213

1 Ableitung von Funktionen ... 213
1.1 Änderungsrate ... 214
1.2 Definition der Ableitung ... 218
1.3 Ableitungsregeln ... 220
1.4 Ableitung und Steigung ... 229
1.5 Tangente ... 231
1.6 Senkrechtes Schneiden, Berühren ... 237
1.7 Grafisches Differenzieren ... 240

2 Kurvenuntersuchung ... 244
2.1 Monotonie ... 245
2.2 Extrempunkte ... 249
2.3 Wendepunkte ... 256
2.4 Aufgabenbeispiele zur Kurvenuntersuchung ... 265
2.5 Aufstellen von Kurvengleichungen aus gegebenen Bedingungen ... 271

3 Modellierung realer Probleme ... 280
3.1 Modellierung von Optimierungsproblemen ... 281
3.2 Modellierung von Wachstums- und Zerfallsprozessen ... 284
3.3 Modellierung in der Physik ... 287
3.4 Modellierung in der Kostentheorie ... 290

IV Integralrechnung 293

1 Einführung ... 294

2 Stammfunktion und unbestimmtes Integral ... 296

3 Das bestimmte Integral ... 308

4 Flächeninhaltsberechnung mithilfe der Integralrechnung ... 317
4.1 Fläche zwischen Kurve und x-Achse ... 317
4.2 Fläche zwischen zwei Kurven ... 324
4.3 Besondere Aufgabenstellungen bei der Flächeninhaltsberechnung ... 333

5 Anwendungen der Integralrechnung ... 340
5.1 Flächen in anwendungsorientierten Aufgaben ... 341
5.2 Weitere Anwendungen des Integrals in Natur, Technik und Wirtschaft ... 343

V Musteraufgaben 349

VI Grundwissen 353

1 Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen ... 353

2 Algebraische Begriffe und Vorübungen ... 354
2.1 Begriffe ... 354
2.2 Rechnen mit Summen und Differenzen ... 354
2.3 Rechnen mit Brüchen ... 356
2.4 Vereinfachung durch Ausklammern ... 357
2.5 Rechnen mit Potenzen ... 358

3 Gleichung und Gleichungssystem ... 360
3.1 Lineare Gleichungen ... 360
3.2 Lineare Gleichungssysteme ... 362
3.3 Quadratische Gleichungen ... 364

Anhang 368

Lösungen der Modellierungen und Tests ... 368

Lösungen der Aufgaben im Kapitel Grundwissen ... 389

Einführung in Geogebra, Geogebra- und Videolisten ... 391

Mathematische Zeichen ... 397

Stichwortverzeichnis ... 398

Abbildungsverzeichnis ... 400