

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner

Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte in zumutbarem Umfang untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.
Stand: Mai 2023

Umschlag: © Adrian Schulz Foto: Mall of Berlin

* * * * *

4. Auflage 2023

© 2005 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0519-04

ISBN 978-3-8120-0519-7

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band ist ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht in allen Berufskollegs und in Bildungsgängen, die zur Fachhochschulreife führen. Das Buch behandelt den gesamten Lehrstoff des Berufskollegs, nämlich die Polynomfunktionen, die Exponentialfunktionen und deren Linearkombinationen mit linearen Funktionen, die trigonometrischen Funktionen, lineare Gleichungssysteme, Differenzial- und Integralrechnung. Grundlage der Inhalte ist der Lehrplan für Bildungsgänge, die zum Erwerb der Fachhochschulreife führen, vom August 2015. Grundlage der Inhalte ist der *Lehrplan für Bildungsgänge, die zum Erwerb der Fachhochschulreife führen*, vom August 2015.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam die im Lehrplan geforderten Inhalte. Die Autoren orientieren sich an den in den Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife formulierten mathematischen Kompetenzen (Mathematisch modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die in den Bildungsstandards aufgeführten Kompetenzen wie auch die Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Begleitend wird ein Arbeitsheft (ISBN 978-3-8120-2519-5) angeboten. Es soll Schüler und Lehrer durch Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.

Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.

Jede Lerneinheit endet mit einer umfassenden Anzahl von Aufgaben. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Fragestellungen mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Probleme aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her. Eine Differenzierung der Aufgaben ist durch Farben gegeben:

- grün:** Lösung ohne Hilfsmittel
- blau:** keine Vorgabe zur Lösung



Für Aufgaben mit dem **Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Website: <http://www.merkur-verlag.de>

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

Polynomfunktionen 63

C) Gegenseitige Lage von zwei Kurven

Beispiel 1

Bei der Produktion eines Artikels werden die Gesamtkosten in € pro Tag, in Abhängigkeit von der Ausrüstungsmenge x (in Stück), festgelegt durch:

$$K(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + 200; 0 \leq x \leq 90$$

Der Betrieb hat einen konstanten Verkaufspreis von 14 € je Stück geplant.

- Beschreiben Sie die gegenseitige Lage von Gesamtkostenkurve und Erlösgerade.
- Bestimmen Sie grafisch und rechnerisch, für welche Stückzahlen der Erlös und die Gesamtkosten gleich groß sind (Gewinnschwelle und Gewinngrenze).
- Für welche Produktionsmenge beträgt der Gewinn 1000 €?

Lösung

a) Kostenkurve und Erlösgerade
Erlösfunktion E mit $E(x) = 14x$
(0 Stück = 11€; 200 € = 11€)

Kostenkurve und Erlösgerade
Schnitten sich in zwei Punkten,

b) Aus der Zeichnung: Erlös und Gesamtkosten sind gleich groß in $x = 20$ bzw. $x = 80$.
Berechnung der Schnittpunkte von Erlösgerade und Gesamtkostenkurve
Bedingung: $E(x) = K(x)$

$$14x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + 200$$

Normalform:

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{20}{3}x + 200 = 0$$

Lösung (Schnittpunkte):

$$x_1 = 20; x_2 = 80$$

Die Produktionsmenge beträgt 20 Stück oder 80 Stück.

Polynomfunktionen 67

Aufgaben

- Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der Schaubilder K von f und G von g .
a) $f(x) = x^2; g(x) = 4x$ b) $f(x) = x^2 + t; g(x) = 2x$ c) $f(x) = x^2 + t; g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$
- Untersuchen Sie, ob die Parabel K von f und die Gerade g gemeinsame Punkte besitzen. Bestimmen Sie deren Koordinaten. Wie liegen Parabel und Gerade zueinander?
a) $f(x) = 2x^2 - 6x + 2; g(x) = -2x + 8$ b) $f(x) = x^2 + x - 5; g(x) = 3x - 6$
- Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der beiden Graphen K von f und G von g . Welche Lage haben die beiden Graphen zueinander?
a) $K: f(x) = x^2 + 3x$ $G: g(x) = 0,5x^2$
b) $K: f(x) = 2x^2 - 2x + 8$ $G: g(x) = x^2 + 2x - 1$
c) $K: f(x) = -x^2 + 3x - 1,5$ $G: g(x) = 2,5x - x^2$
- K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 5x + 4; x \in \mathbb{R}$.
- Die Gerade g mit der Gleichung $y = \frac{2}{3}x + 3$ schneidet K in zwei Punkten S_1 und S_2 . Berechnen Sie die Koordinaten von S_1 und S_2 .
- Zeigen Sie: Die Ursprungsgerade h mit der Steigung $m = -\frac{2}{3}$ berührt K . Geben Sie die Koordinaten des Berührungspunktes an.
Welche auf der Geraden h senkrecht stehende Gerade schneidet K in $P(3|f(3))$?
- K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = (1-x)(2x+5); x \in \mathbb{R}$.
a) Die Gerade g verläuft parallel zur x -Achse durch $A(1|3)$. Wie liegen K und g zueinander?
b) Welche Gerade mit Steigung -3 berührt K ?
c) Zeigen Sie: Die Gerade h mit der Gleichung $y = -\frac{2}{3}x + 9$ und die Parabel K von f haben keinen gemeinsamen Punkt.
- Die Abbildung zeigt die Parabeln K von f mit $f(x) = -0,5x^2 - x + 3$ und G von g mit $g(x) = x^2 - 8x + 12$.
Beschriften Sie die Achsen.
Ordnen Sie jeder Funktion ihr Schaubild zu.
Begründen Sie Ihre Wahl.
Zeigen Sie, die Gerade h schneidet eine Parabel und berührt die andere Parabel.
- Gegeben ist die Kostenfunktion K mit $K(x) = 0,025x^2 + 2x + 160; x > 0$.
a) Welche Ursprungsgerade h schneidet die Kostenkurve in $x = 20$?
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden und die Koordinaten des weiteren Schnittpunktes. In welchem Bereich verläuft die Gerade h oberhalb der Parabel?
b) Zeigen Sie: Die Ursprungsgerade mit Steigung 6 berührt die Kostenkurve.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes.

Hinweis: Das Kapital vermehrt sich mit dem **Wachstumsfaktor** 1,08.
 $y = 1000e^{0,07901}$ bezeichnet man als **Wachstumsgleichung**.

Prozesse **exponentiellen Wachstums** können mit einer Exponentialfunktion beschrieben werden: $f(t) = a e^{kt}; t \geq 0$
 $k > 0$ ist die **Wachstumskonstante**; $a = f(0)$ ist der **Anfangsbestand**.

b) Bed. für die **Verdoppelungszeit**: $f(t) = 2 \cdot 1(0)$
 $2000 = 1000 e^{0,07901 t}$
 $e^{0,07901 t} = 2$
Logarithmieren ergibt: $t = \frac{\ln(2)}{0,07901} = 9,0$
Die Verdoppelungszeit wird mit t_2 bezeichnet und beträgt 9 Jahre.

Musteraufgaben: Das Kapitel beinhaltet einen Satz von Musteraufgaben zur Prüfung der Fachhochschulreife.

Grundwissen: Die Schüler im Berufskolleg kommen aus verschiedenen Schularten mit unterschiedlichen Vorkenntnissen. Um die Schüler dennoch möglichst schnell auf ein gleiches Wissensniveau zu bringen und damit gleiche Ausgangsbedingungen für den Mathematikunterricht zu schaffen, gibt es ein umfangreiches **Kapitel zur Wiederholung** der grundlegenden Rechentechniken und aller mathematischen Grundlagen aus der Mittelstufe.



Die **Heftklammer** im Lehrbuch mit Seitenangabe weist auf ein entsprechendes Grundwissenkapitel im Anhang hin.

Die Aufgaben „**Modellierung einer Situation**“ und „**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**“ werden im Anhang ausführlich gelöst.



Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Im Buch wird **Geogebra** in vielfältiger Weise, zur Erarbeitung von mathematischen Inhalten und zur Lösung von Aufgaben eingesetzt.



Videos dienen der Veranschaulichung von Problemen und Erläuterung von Lösungswegen. Sie unterstützen die Lernenden beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge.

Mathematik (FHSR-Prüfung) Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1 Punkte

- Geben Sie Lage und Art der Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2(x^2 + x - 2)$; $x \in \mathbb{R}$, an. 3
- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in $P(2|f(2))$ an das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$. 4
- Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Schaubildes der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}(x^4 - 6x^2 + 12)$; $x \in \mathbb{R}$. 4
- Bestimmen Sie t so, dass $\int_2^{t+1} 2e^{-0,5x} dx = 2$. 4

1 Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen

Beispiele

$[0; 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$ alle reellen Zahlen von 0 bis 5, einschließlich 0 und 5
 $] -2; 2[= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$ alle reellen Zahlen zwischen -2 bis 2, ausschließlich -2 und einschließlich 2
 $] 6[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$ alle reellen Zahlen größer als 1 und kleiner als 6
 $\mathbb{R} =] -\infty; \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ alle reellen Zahlen größer oder gleich 1

Geschlossenes Intervall: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Offenes Intervall: $]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Halboffenes Intervall: $]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

56 1 Funktionen

2.2.3 Quadratische Gleichungen und geometrische Interpretation

A) Lösung von quadratischen Gleichungen

Wurzelziehen	Nullprodukt
Beispiel: $x^2 = 9$	Beispiel: $(x - 3)(x + 5) = 0$
Wurzelziehen: $x_{1/2} = \pm\sqrt{9}$	Satz vom Nullprodukt: $x - 3 = 0$ oder $x + 5 = 0$
Lösung: $x_{1/2} = \pm 3$	Lösung: $x_1 = 3; x_2 = -5$

Polynomfunktionen 47

2.2 Quadratische Funktionen

Modellierung einer Situation

Die Firma Waldner stellt unter anderem ein medizinisches Gerät her. Die Herstellkosten sind in der Tabelle aufgelistet.

Menge in Stück	0	10	40
Herstellkosten $K(x)$ in 1000 €	8	18,25	169

Eine Marktuntersuchung ergibt einen mittleren Ver-

122 Funktionen

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Bestimmen Sie einen geeigneten Funktionsterm von f mithilfe der Abbildung.

Am Beispiel „Bremsweg“ soll der Begriff **Funktion** näher erläutert werden.

Gleichung: $y = 0,01x^2$

Wertetabelle:

x	0	30	50	80	100	120	150
y	0	9	25	64	100	144	225

Die Menge, die alle zugelassenen x -Werte enthält, nennt man **Definitionsmenge D**. Für die Definitionsmenge D der „Bremsweg“-Funktion gilt: $D = \mathbb{R}$.

Integrationsregeln

Die folgenden Regeln sollen die Integration vereinfachen.

Beispiel 1

Bestimmen Sie: $\int x^2 dx$ und $\int 0,5x^2 dx$. Gibt es einen Zusammenhang?

Inhaltsverzeichnis

I Funktionen		11
1	Einführung in Funktionen	11
1.1	Das rechtwinklige Koordinatensystem	12
1.2	Abhängigkeiten und grafische Darstellung	15
1.3	Definition einer Funktion	17
2	Polynomfunktionen (Ganzrationale Funktionen)	22
2.1	Lineare Funktionen	22
2.1.1	Einführung	23
2.1.2	Die Steigung einer Geraden	25
2.1.3	Punktprobe	29
2.1.4	Aufstellen von Geradengleichungen	30
2.1.5	Schnittpunkte	34
2.1.6	Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	43
2.2	Quadratische Funktionen	47
2.2.1	Einführungsbeispiel	48
2.2.2	Von der Normalparabel zur allgemeinen Parabel	49
2.2.3	Quadratische Gleichungen und geometrische Interpretation	56
2.2.4	Aufstellen von Parabelgleichungen	69
2.2.5	Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	77
2.3	Polynomfunktionen höheren Grades	81
2.3.1	Potenzfunktionen	82
2.3.2	Polynomfunktionen 3. Grades – Einführung	84
2.3.3	Polynomfunktionen 4. Grades – Einführung	88
2.3.4	Polynomgleichungen und geometrische Interpretation	93
2.3.5	Aufstellen von Funktionstermen	109
2.3.6	Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	117
3	Exponentialfunktionen	123
3.1	Einführungsbeispiele	124
3.2	Definition einer Exponentialfunktion	126
3.3	Die Euler'sche Zahl e	128
3.4	Exponentialfunktionen zur Basis e	129
3.5	Schaubilder von Exponentialfunktionen	131
3.6	Exponentialgleichungen und geometrische Interpretation	137
3.6.1	Der natürliche Logarithmus	137
3.6.2	Exponentialgleichungen	138
3.6.3	Bestimmung von gemeinsamen Punkten	142
3.7	Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	147
3.7.1	Exponentielles Wachstum	147
3.7.2	Beschränktes Wachstum	153
4	Trigonometrische Funktionen	156
4.1	Einführungsbeispiele	157
4.2	Definition der Winkelfunktionen	158
4.2.1	Definition der Winkelfunktionen für Winkel von 0° bis 90°	158
4.2.2	Definition der Winkelfunktionen für beliebige Winkel	162
4.2.3	Das Bogenmaß eines Winkels	166
4.3	Trigonometrische Funktionen	167
4.3.1	Sinus- und Kosinusfunktion	167
4.3.2	Funktionen der Form $f(x) = a \sin(x) + b$ bzw. $f(x) = a \cos(x) + b$	168
4.3.3	Funktionen der Form $f(x) = a \sin(kx) + b$ bzw. $f(x) = a \cos(kx) + b$	172

4.4	Trigonometrische Gleichungen und geometrische Interpretation	177
4.4.1	Lösung von trigonometrischen Gleichungen	177
4.4.2	Gemeinsame Punkte	186
4.5	Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	192

II Lineare Gleichungssysteme 196

1	Einführung	197
2	Umformung und Lösung eines linearen Gleichungssystems	199
2.1	Das LGS ist eindeutig lösbar	199
2.2	Das LGS ist unlösbar	203
2.3	Das LGS ist mehrdeutig lösbar	204
2.4	Anwendungen	210

III Differenzialrechnung 213

1	Ableitung von Funktionen	213
1.1	Änderungsrate	214
1.2	Definition der Ableitung	218
1.3	Ableitungsregeln	220
1.4	Ableitung und Steigung	229
1.5	Tangente	231
1.6	Senkrechtes Schneiden, Berühren	237
1.7	Grafisches Differenzieren	240
2	Kurvenuntersuchung	244
2.1	Monotonie	245
2.2	Extrempunkte	249
2.3	Wendepunkte	256
2.4	Aufgabenbeispiele zur Kurvenuntersuchung	265
2.5	Aufstellen von Kurvengleichungen aus gegebenen Bedingungen	271
3	Modellierung realer Probleme	280
3.1	Modellierung von Optimierungsproblemen	281
3.2	Modellierung von Wachstums- und Zerfallsprozessen	284
3.3	Modellierung in der Physik	287
3.4	Modellierung in der Kostentheorie	290

IV Integralrechnung 293

1	Einführung	294
2	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	296
3	Das bestimmte Integral	308
4	Flächeninhaltsberechnung mithilfe der Integralrechnung	317
4.1	Fläche zwischen Kurve und x-Achse	317
4.2	Fläche zwischen zwei Kurven	324
4.3	Besondere Aufgabenstellungen bei der Flächeninhaltsberechnung	333
5	Anwendungen der Integralrechnung	340
5.1	Flächen in anwendungsorientierten Aufgaben	341
5.2	Weitere Anwendungen des Integrals in Natur, Technik und Wirtschaft	343

V	Musteraufgaben	349
VI	Grundwissen	353
1	Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen	353
2	Algebraische Begriffe und Vorübungen	354
2.1	Begriffe	354
2.2	Rechnen mit Summen und Differenzen	354
2.3	Rechnen mit Brüchen	356
2.4	Vereinfachung durch Ausklammern	357
2.5	Rechnen mit Potenzen	358
3	Gleichung und Gleichungssystem	360
3.1	Lineare Gleichungen	360
3.2	Lineare Gleichungssysteme	362
3.3	Quadratische Gleichungen	364
	Anhang	368
	Lösungen der Modellierungen und Tests	368
	Lösungen der Aufgaben im Kapitel Grundwissen	389
	Einführung in Geogebra, Geogebra- und Videolisten	391
	Mathematische Zeichen	397
	Stichwortverzeichnis	398
	Abbildungsverzeichnis	400