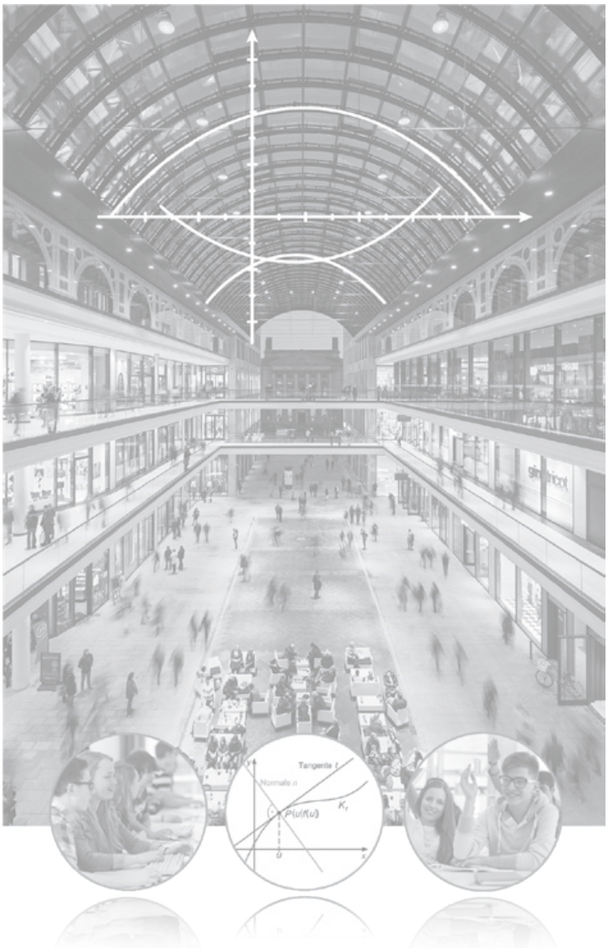
Ott
Rosner

Mathematik

Fachhochschulreife im
Berufskolleg 2024
Prüfungsvorbereitung
Baden-Württemberg



Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser

Roland Ott
Oberstudienrat

Stefan Rosner
Studienrat an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

* * * * *

3. Auflage 2023

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0382-03
ISBN 978-3-8120-1045-0

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung dient zur Vorbereitung auf die **Prüfung zur Fachhochschulreife 2024** an Berufskollegs und ist auf die aktuelle Prüfungsordnung abgestimmt.

Dem neuen Prüfungsmodus wird durch eine Vielzahl von Aufgaben für Teil 1, der ohne Hilfsmittel bearbeitet werden muss, und für den Teil 2, bei welchem Hilfsmittel zugelassen sind, Rechnung getragen.

Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.

Da die Aufgabensammlung allen Schülern/Schülerinnen bei der **selbstständigen** Vorbereitung auf das FHSR-Prüfung helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.

An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Prüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der Prüfung zur Fachhochschulreife in Mathematik

Zu Beginn: SchülerIn erhält beide Aufgabenteile, jedoch keine Hilfsmittel

Phase 1: Bearbeitung des hilfsmittelfreien Teils

Teil	Thema	Auswahl	Richtzeit	Punkte
1	Analysis	keine	ca. 60 min	30

Nach endgültiger Abgabe von Teil 1 erhält SchülerIn die Hilfsmittel

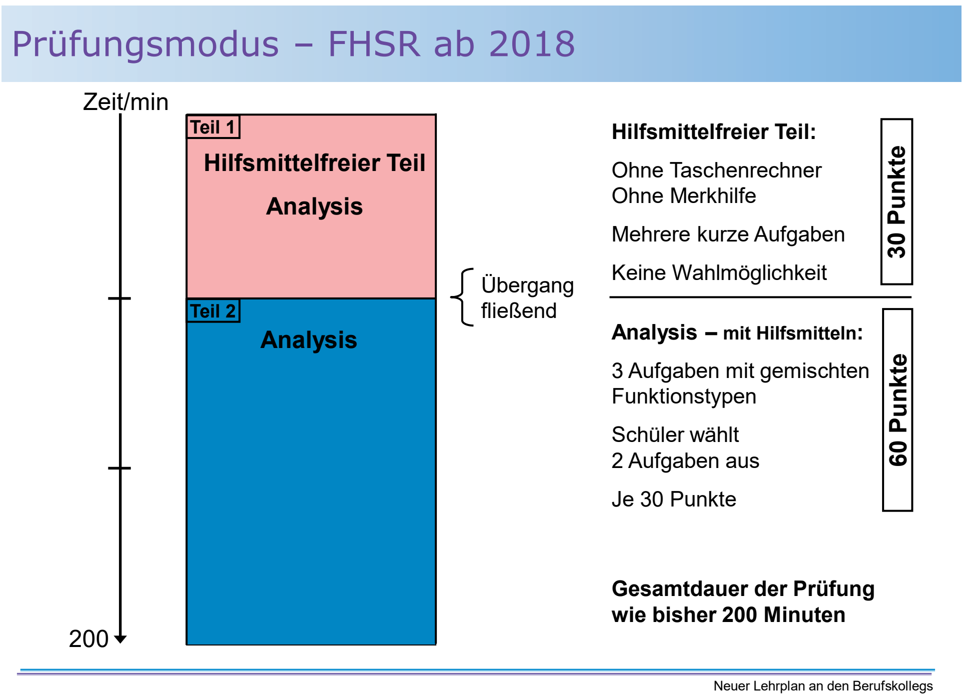
Phase 2: Bearbeitung der Teile mit Hilfsmitteln (WTR + Merkhilfe)

Teil	Thema	Auswahl	Richtzeit	Punkte
2	Analysis	SchülerIn wählt **zwei aus drei** Aufgaben	ca. 140 min	60

Hinweise

Die Prüfung dauert insgesamt maximal 200 Minuten einschließlich Einlesezeit.

Die maximal erreichbare Punktzahl beträgt 90 Punkte.



Vorgaben für die Prüfung zur Fachhochschulreife in Mathematik im Schuljahr 2023/2024

Zur Prüfung werden der **Fachlehrkraft** vorgelegt:

- Hilfsmittelfreier Pflichtteil (30 Punkte) mit Aufgaben aus der Analysis **und**
- ein hilfsmittelgestützter Prüfungsteil mit 3 Aufgaben aus der Analysis mit jeweils 30 Punkten (Schülerwahl 2 aus 3 wie bisher auch)

Im Fach Mathematik erhalten die Schülerinnen und Schüler alle Aufgabenteile zu Beginn der Prüfung. Dabei ist der hilfsmittelfreie Pflichtteil in einer Mappe und der hilfsmittelgestützte Prüfungsteil in einer zweiten, separaten Mappe den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung zu stellen. Die zugelassenen Hilfsmittel für den hilfsmittelgestützen Prüfungsteil werden genau dann ausgegeben, wenn der hilfsmittelfreie Teil der Prüfung in Form der Schülerlösung und des Aufgabenteils unwiderruflich abgegeben wurden.

Die Analysisaufgaben werden in allen Bildungsgängen in gemischter Form angeboten. Die Lehrkräfte werden darauf hingewiesen, dass die Aufgaben kein getrenntes Angebot von Funktionstypen enthalten. Die Vermischung der Funktionstypen ist Standard.

Hilfsmittel:
Zeichengeräte, zugelassener Taschenrechner (WTR) sowie
Für die 6-stündigen Bildungsgänge: einheitliche "Merkhilfe Mathematik für die Sekundarstufe II an beruflichen Schulen in Baden-Württemberg"

I Teil 1 der Fachhochschulreife-Prüfung ohne Hilfsmittel

1 Übungsaufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 21**

1.1 Lösen Sie die Gleichung: $-2x^3 + 6x = 2x$.

1.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 2 - \frac{1}{4}x^2$ in $x = 2$.

1.3 Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 1$ besitzt einen Wendepunkt. Bestimmen Sie die Koordinaten.

1.4 Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 1 \\ x - y &= 3. \end{aligned}$$

1.5 Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\,dx$.

1.6 Bestimmen Sie die Art und Lage der Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^2(x - 2)(x + 1)$.

1.7 Das Schaubild von f mit $f(x) = 2\sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$, wird um 3 nach links verschoben und um 1 nach unten verschoben. Wie lautet die Gleichung der entstandenen Kurve?

1.8 Bilden Sie die erste Ableitung von f mit $f(x) = e^{2x-3} - 2x + 1$.

1.9 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^4 + 3$ und $g(x) = 2x^2$. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Schaubilder von f und g.

Aufgabe 2 **Lösungen Seite 22/23**

2.1 Bestimmen Sie zwei Lösungen der Gleichung: $4\sin(2x) = 0$.

2.2 Welche Gerade schneidet das Schaubild der Funktion f mit
$f(x) = \cos(\frac{1}{4}x) - 1;\ x \in \mathbb{R}$, in $x = 2\pi$ senkrecht?

2.3 Zeigen Sie: Das Schaubild K_f der Funktion f mit $f(x) = e^{-\frac{1}{3}x} - x + 1$ besitzt keinen Wendepunkt.
Ist K_f eine Linkskurve? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.4 Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x - y &= -2 \end{aligned}$$

2.5 Bestimmen Sie $u \neq 0$, so dass $\int_u^0 (x + 2)\,dx = 0$

2.6 Bestimmen Sie die Gleichung der nicht waagrechten Wendetangente an das Schaubild von f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2;\ x \in \mathbb{R}$.

2.7 Wie entsteht das Schaubild von f mit $f(x) = 2\cos(3x) - 1;\ x \in \mathbb{R}$, aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = \cos(x)$.

2.8 Bestimmen Sie die Stammfunktion von f mit $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}x);\ x \in \mathbb{R}$, deren Schaubild die y-Achse in 3 schneidet.

2.9 Zeigen Sie, die Gleichung $e^{2x} + e^x = 2$ hat genau eine Lösung.

2.10 Geben Sie die Nullstellen des Polynoms p mit $p(x) = x^3 - 100x;\ x \in \mathbb{R}$ an.

Erstellen Sie ohne weitere Rechnung eine Skizze des Schaubilds von p.

2 Musteraufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel 30 Punkte

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 40/41**

1.1 Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$. 4

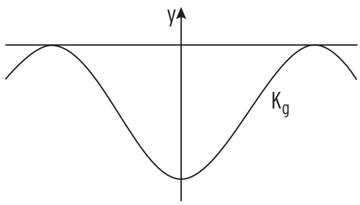
1.2 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = e^{4x}$ und $g(x) = 3e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass sich die Schaubilder der Funktionen f und g genau einmal schneiden. 3

1.3 Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion hat die benachbarten Hochpunkte $H_1(\frac{\pi}{2}|3)$ und $H_2(\frac{3\pi}{2}|3)$ sowie eine Amplitude von 2.
Geben Sie die Koordinaten des dazwischen liegenden Tiefpunktes und eines Wendepunktes an. 4

1.4 Bestimmen Sie die Stammfunktion von g mit $g(x) = 2e^{-4x} + 4x - 3$; $x \in \mathbb{R}$, deren Schaubild die y-Achse bei 6 schneidet. 4

1.5 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin(2x)dx$. 4

1.6 In der nebenstehenden Abbildung schließen das zur y-Achse symmetrische Schaubild K_g der Funktion g und die x-Achse eine Fläche ein. In diese wird ein achsenparalleles Rechteck einbeschrieben.



Geben Sie eine Zielfunktion an, mit deren Hilfe das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt bestimmt werden kann. 5

1.7 Das Schaubild K_g aus 1.6 ist das Schaubild der Ableitungsfunktion der Funktion h, es gilt also $h' = g$.
Treffen Sie Aussagen über die Lage und Anzahl der Wendestellen von h. 3

1.8 Bestimmen Sie die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$x + y = 6$$
$$3x + 2y = -3$$ 3

30

Musteraufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel 30 Punkte

Aufgabe 2 **Lösungen Seite 42/43**

2.1 Geben Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$ an. 3

2.2 Die Funktion g erfüllt folgende Bedingungen: $g'(3) = 2$

$g''(3) = 0$

$g'''(3) \neq 0$

Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen? 3

2.3 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^{2 \cdot x} - 4 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$.

2.3.1 Bestimmen Sie den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagrechte Tangente hat. 4

2.3.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in $P(0 \mid h(0))$ an das Schaubild von h. 2

2.3.3 Ermitteln Sie eine Stammfunktion von h, deren Schaubild durch den Punkt $P(0 \mid 5)$ verläuft. 4

2.4 Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = \cos(x);\ x \in \mathbb{R}$.

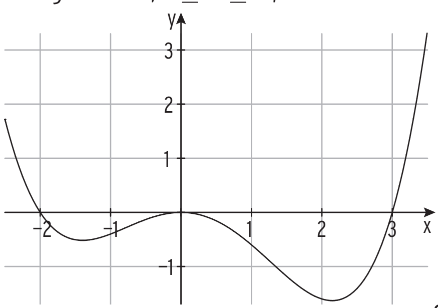
2.4.1 Es gilt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 1$. Bestimmen Sie, ohne Verwendung einer Stammfunktion, zwei verschiedene Werte für a, sodass gilt: $\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 2$.

Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise. 3

2.4.2 Beschreiben Sie, wie das Schaubild von q mit $q(x) = -\cos(x + 2);\ x \in \mathbb{R}$ aus dem Schaubild von p hervorgeht. 3

2.5 C ist das Schaubild einer Funktion g. Die Abbildung zeigt das Schaubild C′ der Ableitungsfunktion g′ von g für $-2{,}5 \leq x \leq 3{,}5$.

Begründen Sie, wieso die folgenden Aussagen falsch sind.



A1) C hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.

A2) C hat genau zwei Wendepunkte.

A3) C ist bei $x = 1$ linksgekrümmt.

A4) C hat an höchstens 2 Punkten eine waagrechte Tangente. 8

30

Musteraufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel 30 Punkte

Aufgabe 3 **Lösungen Seite 44/45**

3.1 Die Funktionen p und q sind gegeben durch $p(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 1)$; $x \in \mathbb{R}$ und $q(x) = 2x(x - 1)$; $x \in \mathbb{R}$.
Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Schaubilder von p und q. 3

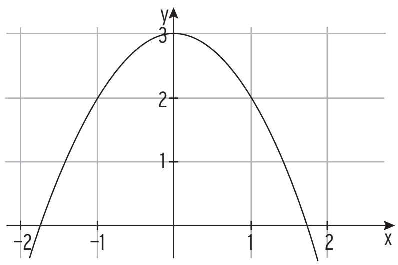
3.2 Gegeben ist die Funktion s mit $s(x) = -3\sin(3x) + 1$; $x \in \mathbb{R}$.

3.2.1 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von s, deren Schaubild durch den Punkt $P(0 \mid 3)$ verläuft. 3

3.2.2 Wie entsteht das Schaubild von s aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = \sin(x)$? 4

3.3 Die Ableitungsfunktion h′ einer Funktion h ist gegeben durch $h'(x) = -2 + 2e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Weisen Sie nach, dass das Schaubild der Funktion h genau einen Hochpunkt besitzt. Bestimmen Sie die Koordinaten. 5

3.4 Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds einer Funktion r.



3.4.1 Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie.

(1) Die Funktion r kann eine Polynomfunktion 3. Grades sein.

(2) Jede Stammfunktion R von r ist für $-1 \leq x \leq 1$ monoton wachsend.

(3) Der Wert von $\int_{-1}^{1} r(x)dx$ ist größer als 6. 7

3.4.2 In der Abbildung schließen das Schaubild K_r der Funktion r und die x-Achse eine Fläche ein. In diese wird ein gleichschenkliges Dreieck mit Spitze in O einbeschrieben.
Geben Sie eine Zielfunktion an, mit deren Hilfe das Dreieck mit maximalem Flächeninhalt bestimmt werden kann. 5

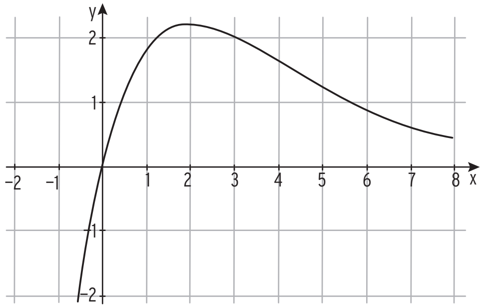
3.5 Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = x^2$ wird um 3 nach links verschoben und mit Faktor 2 in y-Richtung gestreckt. Bestimmen Sie die Gleichung der entstandenen Kurve. 3

30

Musteraufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel 30 Punkte

Aufgabe 4 Lösungen Seite 46/47

1.1 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds K_f einer Funktion f.



Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie.

(1) Es gilt: $f''(1) < 0$.

(2) Die Steigung von f an der Stelle x = 0 ist kleiner als die durchschnittliche Änderungsrate von f im Intervall [0 ; 3].

(3) Das Schaubild jeder Stammfunktion F von f hat an der Stelle x = 0 einen Tiefpunkt. 6

1.2 Gegeben ist die Funktion h durch $h(x) = \cos(\pi \cdot x) + 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.

1.2.1 Skizzieren Sie das Schaubild von h für $0 \leq x \leq 4$. 3

1.2.2 Berechnen Sie: $\int_0^2 h(x)\,dx$ 3

1.3 Gegeben sind die Funktionen g und h: $g(x) = 1 + 2e^{-0,5x}$

$h(x) = x^3 + x + 3,\ x \in \mathbb{R}$.

Die Schaubilder sind K_g und K_h.

1.3.1 An welcher Stelle hat die Tangente an K_g die Steigung − 1? 3

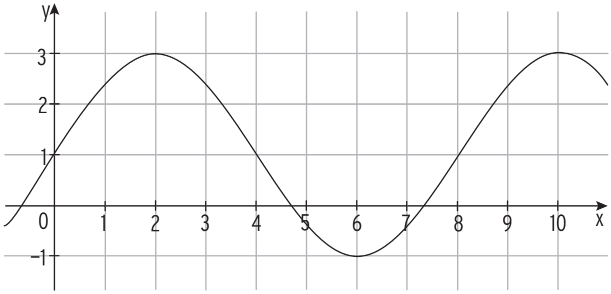
1.3.2 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von h, deren Schaubild durch den Punkt P(1 | 4) verläuft. 2

1.3.3 Zeigen Sie, dass sich K_g und K_h auf der y-Achse rechtwinklig schneiden. 4

Musteraufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel 30 Punkte

Aufgabe 4 — Lösungen Seite 46/47

1.4 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds einer Funktion f.



1.4.1 Begründen Sie anhand der Abbildung, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. — 6

(1) $f'(1) > 0$

(2) $\int_1^3 f(x)\,dx \geq 6$

(3) Für jede Stammfunktion F von f gilt: $F(4) = F(0)$

1.4.2 Ermitteln Sie einen Funktionsterm einer trigonometrischen Funktion, die zu diesem Schaubild passt. — 3

30

Lösungen der Musteraufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Aufgabe Seite 35**

1.1 Biquadratische Gleichung $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

Lösung durch Substitution $u = x^2$: $u^2 - 7u + 12 = 0$

Lösung der quadratischen

Gleichung in u: $u_{1|2} = 3{,}5 \pm \sqrt{3{,}5^2 - 12} = 3{,}5 \pm 0{,}5$

$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ $u_1 = 4;\ u_2 = 3$

Rücksubstitution ergibt: $x_{1|2} = \pm 2;\ x_{3|4} = \pm\sqrt{3}$

1.2 $f(x) = e^{4x}$ und $g(x) = 3e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$.

Gemeinsame Punkte

Gleichsetzen: $f(x) = g(x)$ $e^{4x} = 3e^{2x}$

Nullform: $e^{4x} - 3e^{2x} = 0$

Ausklammern: $e^{2x}(e^{2x} - 3) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $e^{2x} - 3 = 0$ $(e^{2x} \neq 0)$

$e^{2x} = 3$

Logarithmieren: $2x = \ln(3)$

Eine Lösung: $x = \frac{1}{2}\ln(3)$

Die Schaubilder der Funktionen f und g schneiden sich genau einmal.

1.3 Der Abstand von benachbarten Hochpunkte entspricht einer Periode: $p = \pi$

Amplitude von 2: $y_T = -1$ und die Mittellinie ist $y = 1$.

Dazwischen liegender Tiefpunkt $T(\pi \mid -1)$ und

Wendepunkt: $W(\frac{3}{4}\pi \mid 1)$ oder $W(\frac{5}{4}\pi \mid 1)$

1.4 Stammfunktion von g mit $g(x) = 2e^{-4x} + 4x - 3$: $G(x) = -\frac{1}{2}e^{-4x} + 2x^2 - 3x + C$

durch $S_y(0 \mid 6)$: $G(0) = -\frac{1}{2} + C = 6$ für $C = 6{,}5$

$G(x) = -\frac{1}{2}e^{-4x} + 2x^2 - 3x + 6{,}5$

1.5 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin(2x)dx = \left[-\frac{3}{2}\cos(2x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{2}\cos(\pi) - (-\frac{3}{2}\cos(\frac{\pi}{2})) = \frac{3}{2}$

$\cos(0) = 1$; $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$; $\cos(\pi) = -1$

Lösungen der Musteraufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel

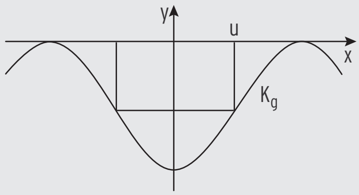
Aufgabe 1 **Fortsetzung**

1.6 Grundseite: $u - (-u) = 2u$

Höhe: $-g(u) > 0$, da $g(u) < 0$

Zielfunktion A mit

$A(u) = 2u \cdot (-g(u))$; $u > 0$



1.7 h′ hat drei Extremstellen, somit hat h drei Wendestellen, nämlich eine auf der y-Achse und zwei, die symmetrisch zur y-Achse liegen.

1.8 Lösung des linearen Gleichungssystems: $x + y = 6$ (I)

$3x + 2y = -3$ (II)

z.B. durch Addition der Gleichungen:

(I) $\cdot (-3)$ + (II) $\quad -y = -21 \Leftrightarrow y = 21$

Einsetzen in $x + y = 6$ (in Gleichung (I))

ergibt $\quad x + 21 = 6 \Rightarrow x = -15$

Lösung: $x = -15$; $y = 21$

oder durch Einsetzungsverfahren:
Aus $x + y = 6$ folgt $y = 6 - x$
Einsetzen in $3x + 2y = -3$ ergibt: $\quad 3x + 2(6 - x) = -3$
$x + 12 = -3 \Rightarrow x = -15$

Einsetzen in $y = 6 - x$ ergibt: $\quad y = 21$

Lösung: $x = -15$; $y = 21$

Lösungen der Musteraufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe 2 Seite 1/2 **Aufgabe Seite 36**

2.1 Nullstellen von f mit $f(x) = 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$

Nullstellen von f: $f(x) = 0$ $\qquad 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x = 0$

Ausklammern: $\qquad 3x(x^2 - 9) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $\qquad 3x = 0$ oder $x^2 - 9 = 0$

Nullstellen: $\qquad x = 0 \vee x = \pm 3$

2.2 $g'(3) = 2$ Die Steigung der Tangente an das Schaubild von g an der Stelle $x = 3$ ist 2.

$g''(3) = 0;\ g'''(3) \neq 0$ Das Schaubild der Funktion g hat einen Wendepunkt an der Stelle $x = 3$.

2.3 $h(x) = e^{2 \cdot x} - 4 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$.

$h'(x) = 2e^{2x} - 4$

2.3.1 Punkt mit waagrechter Tangente:

Bedingung: $h'(x) = 0$ $\qquad 2e^{2x} - 4 = 0$

$e^{2x} = 2$

Logarithmieren: $\qquad 2x = \ln(2)$, also $x = \frac{1}{2}\ln(2)$

y-Wert: $h(\frac{1}{2}\ln(2)) = 2 - 4 \cdot \frac{1}{2}\ln(2) = 2 - 2\ln(2)$

Gesuchter Punkt: $(\frac{1}{2}\ln(2) \mid 2 - 2\ln(2))$

2.3.2 $h(0) = 1$, also $b = 1$; $h'(0) = -2 = m$

Gleichung der Tangente: $y = -2x + 1$

2.3.3 Stammfunktion von h: $\qquad H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2 \cdot x^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

durch $P(0 \mid 5)$: $\qquad H(0) = \frac{1}{2}e^0 + c = 5$ für $c = 4{,}5$

Gesuchte Stammfunktion: $\qquad H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2 \cdot x^2 + 4{,}5;\ x \in \mathbb{R}$

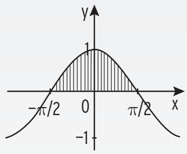
2.4 $p(x) = \cos(x);\ x \in \mathbb{R}$.

2.4.1 Der Wert des Integrals $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 1$ entspricht dem Inhalt der Fläche, die vom Schaubild von p, der y-Achse und der x-Achse im Intervall $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ umrandet wird: $A = 1$

$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 2$ für $a = -\frac{\pi}{2}$

(wegen der Achsensymmetrie zur y-Achse)

Skizze:



III Musteraufgabensätze zur Fachhochschulreife-Prüfung

Musteraufgabensatz 1

Lösung Seite 114 - 121

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel **Punkte**

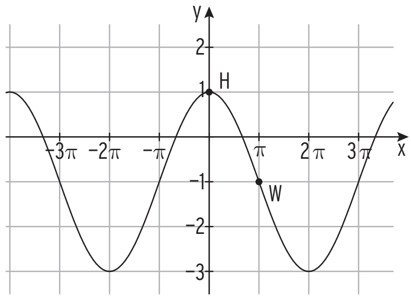
1.1 Geben Sie Lage und Art der Nullstellen der Funktion f mit
$f(x) = -3 \cdot (x-2) \cdot x^2;\quad x \in \mathbb{R}$ an. 3

1.2 Vervollständigen Sie folgende Aussagen:
a) Eine Polynomfunktion 3. Grades hat mindestens ________ Nullstelle(n). 1
b) Eine Polynomfunktion 4. Grades hat höchstens ______ Extremstelle(n), denn ihre Ableitung ist vom Grad ______ . 2

1.3 Gegeben ist die Funktion h durch $h(x) = 2 \cdot \cos(\frac{\pi}{4}x)$ mit $x \in [-6; 6]$.
Das Schaubild von h ist K_h.
Bestimmen Sie die Periode von h.
Geben Sie die Koordinaten eines Schnittpunktes von K_h mit der x-Achse sowie die Koordinaten eines Extrempunktes an. 5

1.4 Gegeben ist f mit $f(x) = x^3 - 3x;\ x \in \mathbb{R}$ mit dem Schaubild K_f.
Untersuchen Sie das Schaubild auf Wendepunkte. 4

1.5 Der Funktionsterm einer Funktion h hat die Form $h(x) = a \cdot \cos(bx) + c$.
Ihr Schaubild ist K_h.
In der Abbildung ist K_h mit einem Hochpunkt H und einem Wendepunkt W von K_h eingezeichnet.



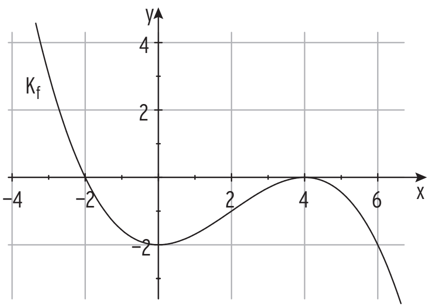
Geben Sie die passenden Werte für a, b und c an. 3

Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel — Punkte

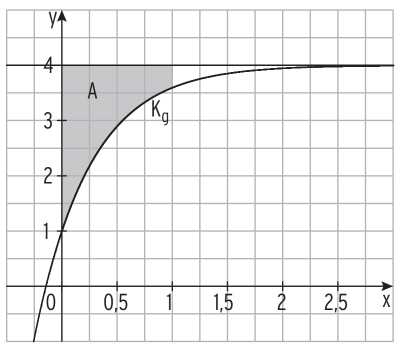
Fortsetzung

1.6 Die Abbildung zeigt das Schaubild K_f einer Polynomfunktion f.
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
a) $f(-2) < 0$
b) $f'(-2) < 0$
c) $f''(-2) < 0$ — 6



1.7 Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = -5x^3 + 1 - e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$. — 2

1.8 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 4 - 3e^{-2x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Das zugehörige Schaubild K_g ist dargestellt.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A. — 4



30

Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 2 - Teil 2 mit Hilfsmittel Punkt

2.1 Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades berührt die x-Achse bei $x = -3$ und verläuft durch den Ursprung.
Weiterhin liegt der Punkt $A(1 \mid \frac{16}{3})$ auf dem Schaubild der Funktion.
Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, mit dessen Hilfe sich der Term dieser Funktion bestimmen lässt. 6

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x;\ x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild ist K_f.

2.2 Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte von K_f.
Zeichnen Sie K_f in ein geeignetes Koordinatensystem. 9

2.3 Berechnen Sie $\int_{-3}^{1} f(x)dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch. 5

Gegeben sind die Funktionen g mit $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}$ und $h(x) = e^{\frac{1}{2}x};\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von g ist K_g und das Schaubild von h ist K_h.

2.4 K_h soll in y-Richtung so verschoben werden, dass K_g den verschobenen Graphen auf der y-Achse schneidet.
Bestimmen Sie den neuen Funktionsterm. 3

2.5 Die Kurve K_g und die Gerade mit der Gleichung $y = -8$ begrenzen eine Fläche. In diese Fläche soll ein zur y-Achse symmetrisches Dreieck mit den Eckpunkten $S(0 \mid -8)$ und $P(u \mid g(u))$ mit $0 \leq u \leq 3$ einbeschrieben werden.
Skizzieren Sie diesen Sachverhalt für $u = 2$.
Weisen Sie nach, dass für $u \approx 1{,}73$ der Inhalt des Dreiecks maximal wird. 7

30

Musteraufgabensatz 1

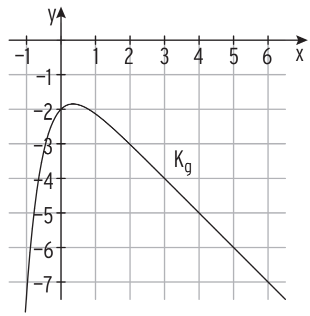
Aufgabe 3 - Teil 2 mit Hilfsmittel **Punkte**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sin(\pi x) + 2$: $x \in [-1; 4]$.
Ihr Schaubild ist K_f.

3.1 Zeichnen Sie K_f. Geben Sie die Koordinaten von drei gemeinsamen Punkten mit der x-Achse an. 5

3.2 Der Punkt W(1 | 2) ist ein Wendepunkt von K_f.
Zeigen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $y = -2\pi \cdot x + 2 + 2\pi$ Tangente an K_f im Punkt W ist.
Die Tangente, die y-Achse und K_f schließen eine Fläche ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. 10

3.3 Die Abbildung zeigt das Schaubild K_g einer Funktion g.



Begründen Sie jeweils, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

a) Die Ableitungsfunktion von g hat im Intervall [0; 1] eine Nullstelle. 2

b) Das Schaubild einer Stammfunktion von g hat im Intervall [0; 1] einen Hochpunkt. 2

c) Die Gerade mit der Gleichung $y = -3x - 4$ ist Tangente an K_g an der Stelle $x = -0{,}5$. 2

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = -e^{-2x} - x - 1$; $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_h.

3.4 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_h. 3

3.5 Anton hat die folgende Rechnung notiert:
$d(u) = f(u) - h(u) = 2\sin(\pi u) + 2 - (-e^{-2u} - u - 1) = 2\sin(\pi u) + e^{-2u} + u + 3$
für $0 < u < 1$
Untersuchung ergibt ein relatives Maximum in $u \approx 0{,}51$ mit $d(0{,}51) = 5{,}87$
Randwerte: $d(0) = 4$; $d(1) = 4{,}14$

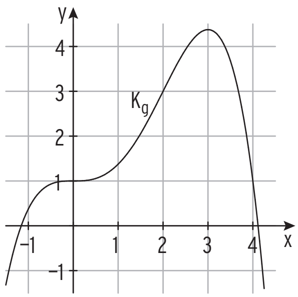
Formulieren Sie eine hierzu passende Aufgabenstellung. 6

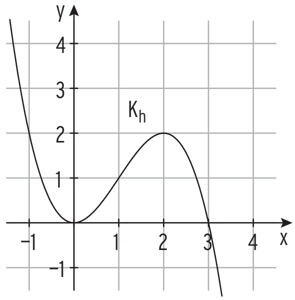
30

Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 4 - Teil 2 mit Hilfsmittel **Punkte**

Die Abbildungen zeigen die Schaubilder K_g und K_h der Funktionen g und h.





4.1 Begründen Sie mit Hilfe von vier Eigenschaften, dass K_h das Schaubild der Ableitungsfunktion von g ist. 4

Zum Schaubild K_h gehört der Funktionsterm $h(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$; $x \in \mathbb{R}$.

4.2 Berechnen Sie alle Stammfunktionen der Funktion h.
Welche dieser Stammfunktionen gehört zu K_g? 3

4.3 Die Gerade t mit $t(x) = -4{,}5x + 13{,}5$ ist Tangente an K_h. Berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunktes. 6

Gegeben sind die Funktionen u und v mit $u(x) = 2\cos(x) + 3$ und $v(x) = -2\cos(x) + 1$; $x \in [0;\, 2\pi]$. Ihre Schaubilder heißen K_u und K_v.

4.4 Geben Sie den Wertebereich sowie die exakte Periodenlänge der Funktion u an.
Zeigen Sie, dass die Wendepunkte von K_u auf der Geraden y = 3 liegen. 5

4.5 Zeichnen Sie die Schaubilder K_u und K_v in ein gemeinsames Koordinatensystem. Beschreiben Sie, wie K_v aus K_u hervorgeht. 7

4.6 Lena bereitet sich auf die anstehende Mathematikprüfung vor.
In ihrem Heft findet sie folgenden Aufschrieb:

$$u(x) = v(x) \qquad 2\cos(x) + 3 = -2\cos(x) + 1$$
$$4\cos(x) = -2$$
$$\cos(x) = -\frac{1}{2}$$
$$x = \frac{2}{3}\pi$$
$$A = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} ((2\cos(x) + 3) - (-2\cos(x) + 1)dx = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung. 5

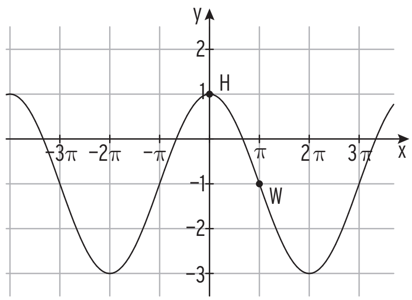
30

Musteraufgabensatz 2

Lösung Seite 122 - 129

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel **Punkte**

1.1 Das nebenstehende Schaubild K_h soll durch eine Parabel 2. Ordnung im Intervall $[-\pi; \pi]$ angenähert werden.
Der Hochpunkt und die Wendepunkte von K_h im Intervall $[-\pi; \pi]$ sollen auf dieser Parabel liegen.
Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel. 4



1.2 Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = 1 - e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild ist K_g.

1.2.1 Um wie viel muss K_g nach oben verschoben werden, damit das verschobene Schaubild die y-Achse bei y = 0,7 schneidet? 3

1.2.2 Gegeben ist die Funktion i mit $i(x) = \frac{1}{9}(1 - e^{2x})$; $x \in \mathbb{R}$ mit Schaubild K_i.
Wie entsteht K_i aus dem Schaubild K_g? 2

1.3 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}$; $x \in \mathbb{R}$.
Weisen Sie nach, dass deren Schaubild den Hochpunkt $H(0 \mid \frac{5}{4})$ aufweist. 4

1.4 Lisa möchte anhand der nachfolgenden mathematischen Bedingungen einen Funktionsterm ermitteln. Notieren Sie eine mögliche zugehörige Aufgabenstellung. Fertigen Sie eine Skizze an.

$f(x) = ax^3 + cx + e$

$f(-2) = 4$

$f'(-2) = 0$

$f(0) = 0$ 5

Musteraufgabensätze zur Fachhochschulreife-Prüfung

Lösungen Musteraufgabensatz 1

Aufgaben Seite 75 - 79

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel **Seite 1/2**

1.1 $f(x) = -3 \cdot (x-2) \cdot x^2; \quad x \in \mathbb{R}$

Einfache Nullstelle in x = 2, Schaubild schneidet hier die x-Achse

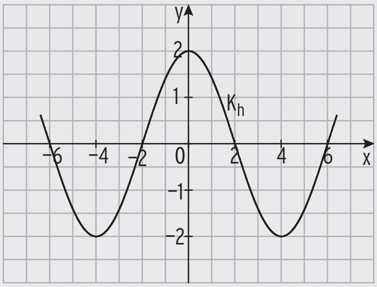
Doppelte Nullstelle in x = 0, Schaubild berührt hier die x-Achse

1.2 Vervollständigen Sie folgende Aussagen:

a) Eine Polynomfunktion 3. Grades hat mindestens 1 Nullstelle(n).

b) Eine Polynomfunktion 4. Grades hat höchstens 3 Extremstelle(n),
denn ihre Ableitung ist vom Grad 3.

1.3 K_h: $h(x) = 2 \cdot \cos(\frac{\pi}{4}x)$ mit $x \in [-6; 6]$



Periode von h: $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$

Schnittpunkte von K_h mit der x-Achse:

$N_1(-6 \mid 0)$; $N_2(-2 \mid 0)$; $N_3(2 \mid 0)$;

$N_4(6 \mid 0)$

Extrempunkte:

$H(0 \mid 2)$; $T_1(-4 \mid -2)$; $T_2(4 \mid -2)$

Hinweis: Nur ein Schnittpunkt bzw. Extrempunkt ist verlangt.

1.4 K_f: $f(x) = x^3 - 3x$

Wendepunkt

Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$; $f'''(x) = 6$

Bedingung: $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x = 0$

Lösung: $x = 0$

Da $f'''(0) = 6 \neq 0$ liegt bei x = 0 ein Wendepunkt vor.

Aus $f(0) = 0$ folgt $W(0 \mid 0)$

Lösungen Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel **Seite 2/2**

1.5 Amplitude $a = 2$ $(y_H - y_T = 1 - (-3) = 4)$

Periode $p = 4\pi$; (halbe Periode: $x_H - x_T = 0 - (-2\pi) = 2\pi$)

Aus $p = \frac{2\pi}{b}$ folgt $b = 0{,}5$

Verschiebung von $y = a\cos(bx)$ um 1 nach unten $\Rightarrow c = -1$

($W(\pi \mid -1)$ liegt auf der „Mittellinie".)

1.6 a) $f(-2) < 0$ ist falsch, da $f(-2) = 0$; $(-2 \mid 0)$ ist Kurvenpunkt

b) $f'(-2) < 0$ ist wahr, da die Steigung von K_f bei $x = -2$ negativ ist;

K_f ist bei $x = -2$ fallend.

c) $f''(-2) < 0$ ist falsch, da K_f bei $x = -2$ linksgekrümmt ist, also ist

$f''(-2) > 0$.

1.7 $f(x) = -5x^3 + 1 - e^{2x}$

Ableitung mit der Kettenregel: $f'(x) = -15x^2 - 2e^{2x}$

1.8 $g(x) = 4 - 3e^{-2x}$

Fläche zwischen der Geraden mit der Gleichung $y = 4$, K_g und den Grenzen

$x = 0$ und $x = 1$:

$$A = \int_0^1 (4 - g(x))\,dx = \int_0^1 3e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{3}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{3}{2}e^{-2} + \frac{3}{2}$$

Alternative:

$A_{Rechteck} = 4 \cdot 1 = 4$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 (4 - 3e^{-2x})\,dx = \left[4x + \frac{3}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = 4 + \frac{3}{2}e^{-2} - \frac{3}{2}$$

$$A = A_{Rechteck} - \left(4 + \frac{3}{2}e^{-2} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}e^{-2} + \frac{3}{2}$$

Lösungen Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 2 - Teil 2 mit Hilfsmittel Seite 1/2

2.1 Ansatz: $v(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Benötigte Ableitung: $v'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen und LGS für a, b, c und d:

$v(-3) = 0$ $\quad -27a + 9b - 3c + d = 0$

$v'(-3) = 0$ $\quad 27a - 6b + c = 0$

$v(0) = 0$ $\quad d = 0$

$v(1) = \frac{16}{3}$ $\quad a + b + c + d = \frac{16}{3}$

2.2 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x$

Ableitungen: $f'(x) = -x^2 - 4x - 3$; $f''(x) = -2x - 4$; $f'''(x) = -2$

Extrempunkte

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad -x^2 - 4x - 3 = 0$

Anwenden der Lösungsformel: $x_{1|2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{4 \pm 2}{-2}$

Lösungen: $x_1 = -1$; $x_2 = -3$

$f''(-1) = -2 < 0$; $f(-1) = \frac{4}{3}$: $H(-1 \mid \frac{4}{3})$

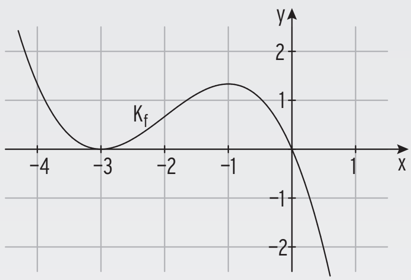
$f''(-3) = 2 > 0$; $f(-3) = 0$: $T(-3 \mid 0)$

Wendepunkt: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x - 4 = 0$

Lösung: $x_1 = -2$

$f'''(-2) = -2 \neq 0$

$f(-2) = \frac{2}{3}$: $W(-2 \mid \frac{2}{3})$



Zeichnung

Alternative Berechnung der Extremstellen

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad -x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$

Zerlegung: $(x + 3)(x + 1) = 0$

Lösungen: $x_1 = -1$; $x_2 = -3$

Lösungen Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 2 - Teil 2 mit Hilfsmittel Seite 2/2

2.3 $\int\limits_{-3}^{1} (-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x)\,dx = \left[-\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{1}$

$= -\frac{1}{12}\cdot 1^4 - \frac{2}{3}\cdot 1^3 - \frac{3}{2}\cdot 1^2 - \left(-\frac{1}{12}\cdot(-3)^4 - \frac{2}{3}\cdot(-3)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-3)^2\right) = 0$

Die Inhalte der Flächen zwischen Schaubild und x-Achse im Intervall $[-3; 1]$ ober- (auf $[-3; 0]$) und unterhalb (auf $[0; 1]$) der x-Achse sind gleich groß und gleichen sich bei der Berechnung des Integrals aus.

2.4 K_g: $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}$ K_h: $h(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

$g(0) = -\frac{7}{2}$

Bedingung für c aus $h^*(x) = e^{\frac{1}{2}x} + c$:

$h^*(0) = 1 + c = -\frac{7}{2} \Rightarrow c = -\frac{9}{2}$

Das Schaubild von h^* mit $h^*(x) = e^{\frac{1}{2}x} - \frac{9}{2}$ schneidet K_g auf der y-Achse.

2.5 Flächeninhalt des Dreiecks

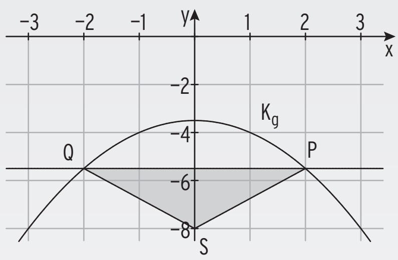
Grundseite: $u - (-u) = 2u$;

Höhe: $g(u) - (-8) = g(u) + 8$ oberer Wert − unterer Wert > 0

$A(u) = \frac{1}{2}\cdot 2u\cdot(g(u) + 8) = u\cdot(g(u) + 8)$

g(u) eingesetzt: $A(u) = u\cdot(-\frac{1}{2}u^2 + \frac{9}{2}) = -\frac{1}{2}u^3 + \frac{9}{2}u$

Nachweis für ein Maximum in $u \approx 1{,}73$:



Ableitungen: $A'(u) = -\frac{3}{2}u^2 + \frac{9}{2}$

$A''(u) = -3u$

Bedingungen:

$A'(1{,}73) = -\frac{3}{2}\cdot 1{,}73^2 + \frac{9}{2} \approx 0$

$A''(1{,}73) = -3\cdot 1{,}73 < 0$

Randwerte: $A(0) = A(3) = 0 < A(1{,}73)$

Maximaler Flächeninhalt (nicht verlangt und nicht notwendig)

$A_{max} = A(1{,}73) = 5{,}20$

Für $u \approx 1{,}73$ wird der Inhalt des Dreiecks maximal.

Lösungen Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 3 - Teil 2 mit Hilfsmittel — Seite 1/2

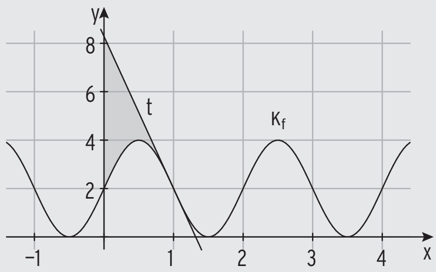
3.1 Schaubild K_f: $f(x) = 2\sin(\pi x) + 2$

$p = 2$; $a = 2$

Mittellinie: $y = 2$

Gemeinsame Punkte mit der x-Achse (z. B.):

$S_1(-\frac{1}{2} \mid 0)$; $S_2(\frac{3}{2} \mid 0)$; $S_3(\frac{7}{2} \mid 0)$



3.2 $f(x) = 2\sin(\pi x) + 2$; $f'(x) = 2\pi\cos(\pi x)$

Das Schaubild der linearen Funktion t mit $t(x) = -2\pi x + 2 + 2\pi$ ist Tangente an K_f in $W(1 \mid 2)$, wenn gilt: $t(1) = 2 \wedge t'(1) = f'(1)$

Mit $t(1) = -2\pi + 2 + 2\pi = 2$ und $f'(1) = 2\pi \cdot \cos(\pi) = -2\pi = t'(1)$ folgt:

Die gegebene Gerade ist Tangente an K_f.

Inhalt der Fläche zwischen der Geraden, K_f und der y-Achse (Schaubild aus 2.1):

Integrationsgrenzen: $x = 1$ (Schnittstelle von Gerade und K_f bzw. Wendestelle von f) und $x = 0$ (y-Achse)

$$A = \int_0^1 (t(x) - f(x))dx = \int_0^1 (-2\pi x + 2\pi - 2\sin(\pi x))dx$$

$$= \left[-\pi x^2 + 2\pi x + \frac{2}{\pi} \cdot \cos(\pi x)\right]_0^1 = -\pi + 2\pi - \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} = \pi - \frac{4}{\pi} \approx 1{,}87$$

Hinweis: $\cos(0) = 1$; $\cos(\pi) = -1$

3.3 a) wahr: K_g hat in $[0; 1]$ einen Hochpunkt und damit eine waagrechte Tangente, d. h. g' hat dort eine Nullstelle.

b) falsch: K_g hat in $[0; 1]$ keinen Schnittpunkt mit der x-Achse, d. h. das Schaubild einer Stammfunktion von g hat in $[0; 1]$ auch keine waagrechte Tangente und somit auch keinen Hochpunkt.

c) falsch: Die Tangente an das vorgegebene Schaubild in $x = -0{,}5$ hat eine positive Steigung und einen y-Achsenabschnitt größer als -2.

$y = -3x - 4$ kann nicht die Gleichung der Tangente sein.

(Mögliche Tangentengleichung: $y = 4x - 1$)

Lösungen Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 3 - Teil 2 mit Hilfsmittel Seite 2/2

3.4 Krümmungsverhalten: ($h''(x)$ gibt Auskunft)

Ableitungen: $h(x) = -e^{-2x} - x - 1$; $h'(x) = 2 \cdot e^{-2x} - 1$; $h''(x) = -4 \cdot e^{-2x}$

Wegen $e^{-2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $h''(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

K_h ist für alle $x \in \mathbb{R}$ rechtsgekrümmt.

3.5 Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ schneidet für $0 < u < 1$ das Schaubild K_f im Punkt P und das Schaubild K_h im Punkt Q.

Für welchen Wert von u ist der Abstand der Punkte P und Q maximal?

Lösungen Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 4 - Teil 2 mit Hilfsmittel Seite 1/2

4.1 $x_{1,2} = 0$ ist doppelte Nullstelle von h, in x = 0 hat K_g einen Sattelpunkt

VZW von h(x) bei x = 3 von + nach −, bei x = 3 hat K_g einen Hochpunkt

x = 2 ist Extremstelle von h, bei x = 2 hat K_g einen Wendepunkt

Für $x < 3$ ist $h(x) \geq 0$, g ist monoton wachsend für $x < 3$

Für $x > 3$ ist $h(x) \leq 0$, g ist monoton fallend für $x < 3$

Hinweis: 4 Eigenschaften genügen

4.2 Stammfunktionen von h: $H(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c;\ c \in \mathbb{R}$

Für c = 1 ergibt sich der Funktionsterm von g (P(0| 1) liegt auf K_g).

4.3 $h(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2;\ h'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$

Im Berührpunkt stimmen Funktionswerte und Steigungen überein:

$t(u) = h(u) \wedge t'(u) = h'(u)$

Einsetzen in $t'(u) = h'(u)$ ergibt: $-4{,}5 = -\frac{3}{2}u^2 + 3u$

Nullform: $-\frac{3}{2}u^2 + 3u + 4{,}5 = 0 \quad | \cdot \frac{2}{3}$

$0 = -u^2 + 2u + 3$

Anwenden der Lösungsformel: $u_{1|2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2}$

Lösungen: $u_1 = -1;\ u_2 = 3$

Berechnung der Funktionswerte für $u_1 = -1$:

$t(-1) = 18$ und $h(-1) = 2$. Somit ist u_1 nicht Berührstelle.

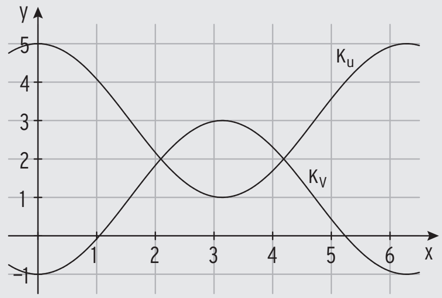
Berechnung der Funktionswerte für $u_1 = 3$:

$t(3) = 0$ und $h(3) = 0$. Somit ist u_2 Berührstelle.

Der Berührpunkt hat die Koordinaten B(3 | 0).

Lösungen Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 4 - Teil 2 mit Hilfsmittel Seite 2/2



4.4 $u(x) = 2\cos(x) + 3$

Wertebereich $W = [1; 5]$;

Periode $p = 2\pi$

Bemerkung zu W:

für $\cos(x) = 1$ ist $u(x) = 5$;

(1 ist der größte Wert von $y = \cos(x)$)

für $\cos(x) = -1$ ist $u(x) = 1$

(-1 ist der kleinste Wert von $y = \cos(x)$)

Ableitungen: $u'(x) = -2\sin(x)$; $u''(x) = -2\cos(x)$; $u'''(x) = 2\sin(x)$

Wendestellen: $u''(x) = 0$ $\quad -2\cos(x) = 0$ für $x = \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi; \ldots$

$u'''(\frac{\pi}{2}) = 2 \neq 0$ und $u(\frac{\pi}{2}) = 3$; $u'''(\frac{3}{2}\pi) = -2 \neq 0$ und $u(\frac{3}{2}\pi) = 3$

Die Wendepunkte liegen auf der Geraden mit $y = 3$.

4.5 Schaubilder von u und v: K_u wird an der x-Achse gespiegelt,

$y = -u(x) = -2\cos(x) - 3$ und anschließend um 4 nach oben

verschoben: $y = -2\cos(x) - 3 + 4 = -2\cos(x) + 1 = v(x)$

4.6 Lena berechnet eine Schnittstelle von u und v (die kleinste positive Schnittstelle). Sie berechnet den Inhalt der Fläche, die von den beiden Kurven K_u und K_v und der y-Achse eingeschlossen wird bzw. die Fläche zwischen K_u und K_v auf $[0; \frac{2}{3}\pi]$.

Passende Aufgabenstellung:

Gegeben sind die Funktionen u mit $u(x) = 2\cos(x) + 3$ und

v mit $v(x) = -2\cos(x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Ihre Schaubilder heißen K_u und K_v.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der y-Achse, K_u und K_v eingeschlossen wird.

Lösungen Musteraufgabensatz 2

Aufgaben Seite 80-85

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel **Seite 1/2**

1.1 Die beiden Wendepunkte von K_a im Bereich $[-\pi; \pi]$ liegen symmetrisch zur y-Achse,

der Hochpunkt liegt auf der y-Achse. Da die Parabel durch diese Punkte geht, ist auch sie symmetrisch zur y-Achse.

Mit $H(0 \mid 1)$ ergibt sich der Ansatz: $y = ax^2 + 1$

Punktprobe mit $W(\pi \mid -1)$ ergibt: $a\pi^2 + 1 = -1 \quad \Rightarrow a = -\frac{2}{\pi^2}$

Parabelgleichung: $y = -\frac{2}{\pi^2}x^2 + 1$

1.2.1 Es gilt: $h(0) = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$

Verschiebt man K_g um 0,7 nach oben, so schneidet das verschobene Schaubild die x-Achse in y = 0,7.

Alternative: $h^*(x) = 1 - e^{2x} + b$;

Punktprobe mit $(0 \mid 0{,}7)$: $0{,}7 = 1 - e^0 + b \;\Leftrightarrow\; 0{,}7 = b$

1.2.2 $i(x) = \frac{1}{9}(1 - e^{2x}) = \frac{1}{9} \cdot g(x)$

Streckt man K_g mit Faktor $\frac{1}{9}$ in y-Richtung, entsteht K_i .

1.3 $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}$; $x \in \mathbb{R}$

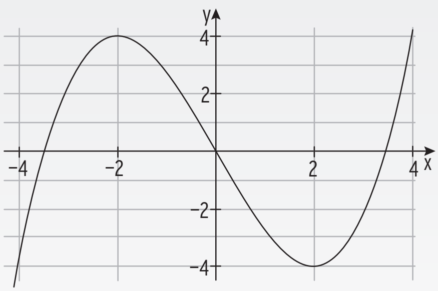
Ableitungen: $g'(x) = x^3 - 3x$; $g''(x) = 3x^2 - 3$

Es gelten $g'(0) = 0$ und $g''(0) = -3 < 0$

Somit hat das Schaubild in x = 0 einen Hochpunkt

Da $g(0) = \frac{5}{4}$ hat das Schaubild den Hochpunkt $H(0 \mid \frac{5}{4})$.

1.4 Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist symmetrisch Ursprung und hat den Hochpunkt $H(-2 \mid 4)$.



Prüfung zur Fachhochschulreife 2021/2022

Baden-Württemberg
MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

Prüfung der Fachhochschulreife

an Berufskollegs zum Erwerb der Fachhochschulreife u. a.

Hauptprüfung

Prüfungsfach	**Mathematik (FHSR1031) - Pflichtteil (Teil 1)**

Arbeitszeit	**8.30 Uhr bis ca. 9.30 Uhr** (ca. 60 Minuten)
Bearbeitungshinweise	Der **hilfsmittelfreie Prüfungsteil** ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten **(Pflichtteil).** Der Prüfling ist verpflichtet, die Vollständigkeit des Aufgabensatzes umgehend zu überprüfen und fehlende Seiten der Aufsicht führenden Lehrkraft anzuzeigen.
Hilfsmittel	**keine**
Hinweise für die Fachlehrkraft	• Die Prüflinge werden nach ca. 60 Minuten informiert, dass die **anteilige Prüfungszeit** verstrichen ist. • Wenn der **hilfsmittelfreie Teil** der Prüfung in Form der Schülerlösung und des Aufgabenteils unwiderruflich abgegeben wurde, erhalten die Schüler die zugelassenen Hilfsmittel für den **hilfsmittelgestützten Prüfungsteil (Teil 2).**

Zur Hauptprüfung 2022 wurden der Fachlehrkraft zwei Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (zu je 30 Punkten) vorgelegt. Die Fachlehrkraft wählt eine zur Bearbeitung aus.

Prüfung zur Fachhochschulreife 2021/2022

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Lösungen Seite 232 - 239**

Aufgabe 1a **Punkte**

1.1	Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Symmetrie. Berechnen Sie die Nullstellen von f.	6
1.2	Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = -x^2 - 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass der Punkt $E(-1 \mid 4)$ ein Extrempunkt des Schaubildes von p ist.	4
1.3	Lösen Sie die Gleichung $e^{-2x} - 5e^{-x} = 0$.	4
1.4	Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = 6 - 4e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung von h.	2
1.5	Berechnen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P(2 \mid 4)$ an das Schaubild der Funktion k mit $k(x) = x^3 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.	3
1.6	Für eine Funktion g gilt für $-1 \leq x \leq 4$: • $g(x) > 1$ • $g'(x) < 0$ • $g''(x) > 0$ Beschreiben Sie für jede der drei genannten Eigenschaften, welche Bedeutung diese für den Verlauf des Schaubildes von g besitzen. Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Schaubildes.	6
1.7	Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion ist durch $y = 5\cos(bx) - d$ mit $x, b, d \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie b und d so, dass die Periodenlänge $p = \frac{1}{2}$ beträgt und das Schaubild Schnittpunkte mit der x-Achse hat. Geben Sie den Funktionsterm und den Wertebereich an, die zu Ihrer Wahl von b und d passen.	5
		30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2021/2022

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1b** **Punkte**

1.1 Gegeben ist folgende Wertetabelle einer Polynomfunktion f, ihrer Ableitungsfunktion f′ und ihrer zweiten Ableitungsfunktion f″. 8

Das Schaubild von f heißt K_f.

x	− 3	− 2	− 1	0	1	2	3	4
f	17,25	1,78	− 1,86	0	3,03	4,89	5,25	5,78
f′	− 24	− 8,33	0	3	2,67	1	0	1,67
f″	20	11,67	5,33	1	− 1,33	− 1,67	0	3,67

Prüfen Sie mit Hilfe der Tabelle, ob die Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

a) K_f hat bei $x = -1$ einen Hochpunkt.

b) Die Steigung der Tangente von K_f im Schnittpunkt mit der y-Achse ist 3.

c) Der Funktionswert von f an der Stelle $x = 2$ beträgt 1.

d) f hat mindestens zwei Nullstellen.

1.2 Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion h mit $h(x) = 5x^7 + x^4 - 61x^3$, $x \in \mathbb{R}$ an. 2

1.3 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = x^4 - 10x^2 + 9$, $x \in \mathbb{R}$. 6

Ihr Schaubild heißt K_g.

Geben Sie die Symmetrie von K_g an. Berechnen Sie die Nullstellen von g.

1.4 Lösen Sie die Gleichung $e^x + 8 = 2e^x$. 3

1.5 Erläutern Sie anhand einer Skizze, ob das Integral $\int_{-\pi}^{0{,}5\pi} \cos(x)\,dx$ größer, kleiner oder gleich null ist. 5

1.6 Das Schaubild einer Polynomfunktion 3. Grades hat an der Stelle $x = 2$ eine Tangente mit der Steigung 5, einen Tiefpunkt $T(1 \mid -1)$ und schneidet die y-Achse bei -1. 6

Erstellen Sie ein lineares Gleichungssystem, mit dessen Hilfe man den Funktionsterm bestimmen kann (Lösen des LGS nicht verlangt).

30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2021/2022

Baden-Württemberg
MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

Prüfung der Fachhochschulreife
an Berufskollegs zum Erwerb der Fachhochschulreife u. a.

Hauptprüfung

Prüfungsfach	**Mathematik (FHSR1031) - Analysisaufgaben (Teil 2)** **Aufgabe 2 bis 4**

Arbeitszeit	**Ca. 9.30 Uhr bis 11.50 Uhr** (ca. 140 Minuten)
Bearbeitungshinweise	Aus den vorgelegten **drei Aufgaben** wählen die Schülerinnen und Schüler **zwei Aufgaben** zur Bearbeitung aus. Jede Aufgabe ist mit einem neuen Reinschriftbogen zu beginnen. Der Prüfling ist verpflichtet, die Vollständigkeit des Aufgabensatzes umgehend zu überprüfen und fehlende Seiten der Aufsicht führenden Lehrkraft anzuzeigen.
Hilfsmittel	"Merkhilfe Mathematik" für die Sekundarstufe II an beruflichen Schulen in Baden Württemberg Wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR)
Hinweise für die Fachlehrkraft	Wenn der **hilfsmittelfreie Teil** der Prüfung in Form der Schülerlösung und des Aufgabenteils unwiderruflich abgegeben wurde, erhalten die Schüler die zugelassenen Hilfsmittel für den **hilfsmittelgestützten Prüfungsteil (Teil 2).**

Prüfung zur Fachhochschulreife 2021/2022

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2** **Punkte**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$, $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild ist K_f.

2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- Tief- und Wendepunkte von K_f. 10

Zeichnen Sie K_f für $0 \leq x \leq 3$.

2.2 Zeigen Sie, dass f auch in der Form $f(x) = (x - 1)^2(2x - 5)$ dargestellt 7

werden kann. K_f schließt mit der x-Achse eine Fläche ein.

Berechnen Sie deren Inhalt.

2.3 Überprüfen Sie, ob folgende Behauptungen zutreffen und begründen 4

Sie Ihre Antwort.

(1) K_f und die Gerade $y = 12x - 5$ berühren sich im Punkt $P(0 \mid -5)$.

(2) Es gibt eine Tangente an K_f , welche die Steigung -2 hat.

Gegeben sind die Funktionen g und h mit $g(x) = e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$ und

$h(x) = -e^{2x} + 3$, $x \in \mathbb{R}$. Die Schaubilder sind K_g und K_h.

2.4 Beschreiben Sie, wie das Schaubild von h aus dem Schaubild von g 2

hervorgeht.

2.5 Geben Sie jeweils die Koordinaten der Schnittpunkte von K_g und K_h 7

mit der y-Achse an.

Skizzieren Sie K_g und K_h.

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von K_g und K_h.

$\overline{30}$

Prüfung zur Fachhochschulreife 2021/2022

Aufgabe 3 **Punkte**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)= 0{,}5e^{-0{,}5x} - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_f.

3.1 Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote von K_f. 5

Zeichnen Sie K_f für $-5 \leq x \leq 6$.

Wie müsste K_f verschoben werden, sodass das verschobene Schaubild die Asymptote mit der Gleichung $y = 1$ hat?

3.2 K_f schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein. Bestimmen Sie deren Inhalt. 5

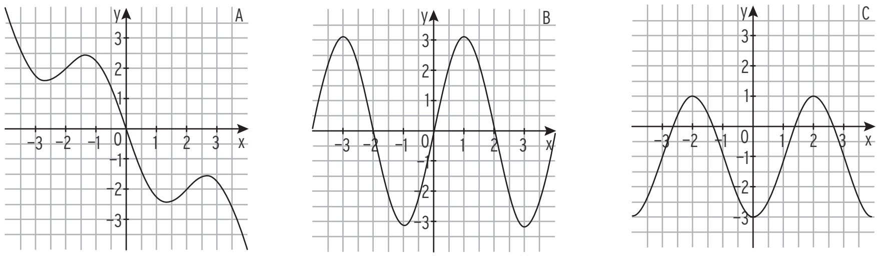
3.3 Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Gerade mit der Gleichung $y = -0{,}25x - 1{,}5$ Tangente an K_f ist. 5

3.4 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_f. 3

3.5 Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion verläuft durch den Tiefpunkt $T(0 \mid -4)$ und hat in $H(4 \mid 1)$ einen Hochpunkt. 6

Geben Sie zwei mögliche Funktionsterme an.

3.6 Gegeben sind die Schaubilder einer Funktion g, ihrer Ableitungsfunktion g' und einer Stammfunktion G von g. 6



Ordnen Sie die Funktionen g, g' und G den Schaubildern zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Bestimmen Sie mit Hilfe Ihrer Zuordnung den Inhalt der Fläche, die das Schaubild C auf dem Intervall $[-2\,;\,2]$ mit der Geraden $y = 1$ einschließt.

30