Patyna

Mathematik

für das Berufliche Gymnasium in Niedersachsen

Kerncurriculum und Bildungsstandards

Qualifikationsphase – Schwerpunkt Wirtschaft

Stochastik, Lineare Algebra, Analytische Geometrie

Arbeitsheft

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasserin:

Marion Patyna

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.

Stand: August 2021

Umschlag: Hintergrund: ECE, Ernst-August-Galerie, Hannover,
Kreis rechts oben: Candy Box – Fotolia.com, Kreis mitte: Colourbox.de,
Kreis links: Syda Productions – Colourbox.de, Grafik: Colourbox.de

* * * * *

2. Auflage 2021

Gesamtherstellung:
Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr.: 2687-02
ISBN 978-3-8120-2687-1

2 Lineare Algebra

2.2 Rechnen mit Matrizen

2.2.1 Richtig oder Falsch? (Rätsel)

Markieren Sie, ob die Aussage richtig oder falsch ist. Die markierten Buchstaben ergeben das Lösungswort. Korrigieren Sie die falschen Aussagen.

	richtig	falsch	korrigierte Aussage
Ein Skalar ist eine reelle Zahl.	S	T	
$s \cdot A \ = \ A \cdot s$	U	E	
$A \pm B \ = C$: Format der Matrizen A und B stimmt nicht überein.	S	H	
Die s-Multiplikation wird elementweise durchgeführt.	R	I	
Ein Vektor ist eine Matrix mit nur einer Zeile oder nur einer Spalte.	G	M	
$\vec{a}^{T}$ steht für einen Spaltenvektor.	A	U	
Zwei Matrizen werden gemäß folgender Regel multipliziert: „Spalte mal Zeile".	B	T	
Bei der Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix muss die Anzahl der Elemente in der Zeile des ersten Faktors mit der Anzahl der Elemente in der Spalte des zweiten Faktors übereinstimmen.	P	N	
Es gilt immer: $A \cdot B \ = \ B \cdot A$	O	E	
$A \cdot B \ = \ C \ \Rightarrow \ A \ = \ B^{-1} \cdot C$	I	R	
In einer Einheitsmatrix stehen in der Hauptdiagonalen Nullen, ansonsten nur Einsen.	S	F	
$A \cdot A^{-1} \ = \ E \ = \ A^{-1} \cdot A$	E	A	
$\vec{a} \cdot A$ ist möglich	R	K	
$\vec{a}^{T} \cdot \vec{b} \ =$ reele Zahl	T	Z	

Lösungswort: __ __ __ __ __ __ __! __ __ __ __ __ __ __!

2.2.2 Paare finden (Rätsel)

Schneiden Sie die einzelnen Teile mit den Matrizen C an der gestrichelten Linie aus. Ordnen Sie jeweils die Matrix C den passenden Matrizen A und B zu, indem sie $A + B = C$ berechnen. Kleben Sie die passende Lösung rechts neben die Matrizen A und B. In der richtigen Reihenfolge ergibt sich das Lösungswort.

$A = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ **R**		$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ **C**	
$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **N**		$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ **N**	
$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ **I**		$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ **M**	
$A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ **T**		$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ **I**	
$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ **E**			$C = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ **N**
$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ **H**	$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ **A**	$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$ **T**	$C = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ **M**
$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ **Z**	$C = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ **R**	$C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ **E**	$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ **E**

2.2.3 Lernsituation bearbeiten

Während der Adventszeit findet im Kindergarten *Wichtel* ein Weihnachtsbasar statt, auf dem auch Kekse verkauft werden. Mit dem Erlös des Weihnachtsbasars soll ein neues Klettergerüst für 750 EUR angeschafft werden. Die Kekse werden von der Zwergengruppe und der Wichtelgruppe gebacken. Es werden Schoko-, Zimt- und Vanillekekse hergestellt, die zum Teil verziert oder glasiert werden.

Zwergengruppe			
	Schoko	Zimt	Vanille
normal	10	15	20
verziert	15	0	25
glasiert	15	10	25

Wichtelgruppe			
	Schoko	Zimt	Vanille
normal	35	25	0
verziert	10	10	15
glasiert	20	10	5

Berechnen Sie, wie viele Kekse von welcher Sorte hergestellt wurden.

Jedes Kind darf einen Keks probieren. In der Zwergen- und in der Wichtelgruppe wurden die gleichen Kekse gegessen. Folgende Kekse haben die Kinder in der Zwergengruppe gegessen.

	Schoko	Zimt	Vanille
normal	2	2	2
verziert	1	1	2
glasiert	2	2	1

Berechnen Sie, wie viele Kekse von welcher Sorte auf dem Weihnachtsbasar verkauft werden können.

Ermitteln Sie die Gesamtanzahl der Kekse für den Verkauf.

Die Kekse werden für folgende Preise auf dem Weihnachtsbasar angeboten.

	Preis/Keks in EUR
normal	0,25
verziert	0,50
glasiert	0,50

Ermitteln Sie den Erlös, der entsteht, wenn alle Kekse auf dem Weihnachtsbasar verkauft werden.

Berechnen Sie, wie viel Geld die anderen Verkaufsstände einnehmen müssen, damit das neue Klettergerüst gekauft werden kann.

Lösungen

Berechnung der Anzahl der gebackenen Kekse:

Z $\triangleq$ Zwergengruppe, W $\triangleq$ Wichtelgruppe und K $\triangleq$ Gesamtanzahl gebackener Kekse

Berechnung der Anzahl der Kekse für den Verkauf auf dem Weihnachtsbasar:

G_Z $\triangleq$ Anzahl gegessener Kekse in der Zwergengruppe

G_G $\triangleq$ Anzahl gegessener Kekse in beiden Gruppen

$\ddot{U}$ $\triangleq$ Anzahl der übrigen Kekse für den Weihnachtsbasar

Antwort: ______________________________

Erlös berechnen:

Fehlende Einnahmen berechnen:

Antwort: ______________________________

2.2.4 Rechnen ohne GTR/CAS

Ermitteln Sie die Lösungen und benennen Sie die durchgeführte Berechnung mithilfe des Fachvokabulars.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} =$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} =$

Rechnungen:

2.3 Mehrstufige Produktionsprozesse

2.3.1 Richtig oder Falsch? (Rätsel)

Markieren Sie, ob die Aussage richtig oder falsch ist. Die markierten Buchstaben ergeben das Lösungswort. Definieren Sie den Begriff und geben Sie die Formel zur Berechnung an.

	richtig	falsch
Berechnungen und Darstellungen der mehrstufigen Produktionsprozesse dienen dazu, die Betriebsabläufe in einem Produktionsprozess reibungslos zu gestalten.	V	K
Es gibt zwei Produktionsmatrizen: A_{RZ} und B_{ZE}.	A	E
A_{RZ} ist eine Matrix, die zeigt, in welcher Menge welcher Rohstoff in welches Zwischenprodukt einfließt.	R	T
Die Elemente a_{mn} geben an, wie viele Mengeneinheiten des Rohstoffes m benötigt werden, um eine ME des jeweiligen Endproduktes n herzustellen.	O	I
B_{ZE} ist eine Matrix, die angibt, in welcher Menge welches Zwischenprodukt in welches Endpunkt einfließt.	A	E
Die Elemente b_{nu} geben an, wie viele Mengeneinheiten des Endproduktes u benötigt werden, um eine ME des Zwischenproduktes n zu produzieren.	M	B
Mithilfe der Formel $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$ kann die Bedarfsmatrix C_{RE} errechnet werden. C_{RE} gibt an, in welcher Menge welcher Rohstoff in welches Endprodukt einfließt.	L	Ö
Die Elemente c_{mu} geben an, wie viele Mengeneinheiten des Rohstoffes m benötigt werden, um eine ME des jeweiligen Endproduktes u zu produzieren.	E	A
Es gilt: $A_{RZ} = C_{RE} \cdot B_{ZE}^{-1}$ und $B_{ZE} = C_{RE} \cdot A_{RZ}^{-1}$.	W	S
Für die Produktionsmatrizen und die Bedarfsmatrix dürfen keine anderen Bezeichnungen verwendet werden außer A_{RZ}, B_{ZE} und C_{RE}.	C	T
Die Matrizen A_{RZ} und B_{ZE} fließen in das Verflechtungsdiagramm ein.	Ü	H
Der Vektor $\vec{m}$ gibt den Rohstoffeinsatz für die gesamte Herstellung der Endprodukte an.	K	C
Der gesamte Rohstoffeinsatz berechnet sich durch die Multiplikation der Bedarfsmatrix mit den Endproduktmengen.	K	S
Die Produktionskosten werden ermittelt, um Verkaufspreise festzulegen. Dabei ist der Preis immer doppelt so hoch wie die Kosten.	E	K
Die Produktionskosten setzen sich aus den Rohstoffkosten $\vec{k}_R^T$, den Fertigungskosten der ersten und der zweiten Produktionsstufe $\vec{k}_Z^T$ bzw. $\vec{k}_E^T$ zusammen.	O	U
Die variablen Gesamtkosten errechnen sich durch folgende Formel: $K_v = \vec{k}_v^T \cdot \vec{m}$. Die Gesamtkosten werden mithilfe folgender Formel berechnet: $K = K_v + K_f$.	S	T
Die Erlöse ergeben sich aus der Multiplikation des Vektors für die Verkaufspreise mit dem Vektor für die einzelnen Endproduktmengen.	T	P
Der Vektor $\vec{p}^T$ verdeutlicht die Verkaufspreise für die Endprodukte in Geldeinheiten pro Mengeneinheit.	E	O
Der Gewinn wird mit $G = K - E$ berechnet.	E	N

Lösungswort: ______________________________

Definition: ______________________________

Formel zur Berechnung: ______________________________

2.3.2 Lernsituation bearbeiten

Das Unternehmen *ILSÜM* hat zwei neue Müsli-Sorten auf den Markt gebracht. Die beiden Müslisorten werden in einem zweistufigen Produktionsprozess aus fünf verschiedenen Rohstoffen hergestellt, die auf der zweiten Produktionsstufe zu drei Zwischenprodukten verarbeitet werden. Die für die Produktion benötigten Mengeneinheiten (ME) gehen aus den nachfolgenden Tabellen hervor:

Rohstoffe \ Zwischenprodukte	Basis	Fitness-Aroma	Genießer-Aroma
Getreide	12	0	0
Crunchy	8	0	0
Früchte	0	7	2
Nüsse	2	4	3
Schokolade	0	0	6

Rohstoffe \ Endprodukte	Fitness-Müsli	Genießer-Müsli
Getreide	108	120
Crunchy	72	80
Früchte	42	14
Nüsse	42	41
Schokolade	0	42

Folgende Kosten in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) sind für die Produktion bekannt:

Rohstoffe	Preis in GE/ME	Zwischenprodukte	Preis in GE/ME	Endprodukte	Preis in GE/ME
Getreide	3	Basis	3,50	Fitness-Müsli	19
Crunchy	5	Fitness-Aroma	5,50	Genießer-Müsli	20
Früchte	6	Genießer-Aroma	7,00		
Nüsse	8				
Schokolade	8				

Die nachfolgende Tabelle verdeutlicht die festgelegten Verkaufspreise und die Bestellung eines Großhandels. Die Fixkosten belaufen sich auf 28.907,50 GE.

Endprodukte	Verkaufspreis in GE/ME	Menge in ME
Fitness-Müsli	2.500	55
Genießer-Müsli	1.300	45

Es muss analysiert werden, ob die festgelegten Preise so kalkuliert wurden, dass Gewinn erzielt werden kann. Dafür müssen nachfolgende Analysen und Berechnungen durchgeführt werden:

Ermitteln Sie die Mengen der drei Zwischenprodukte, die für die zwei Endprodukte benötigt werden.

Erklären Sie die Bedeutung der dritten Zeile der Matrix A_{RZ}.

Stellen Sie diesen Produktionsprozess mithilfe eines Verflechtungsdiagrammes dar.
Berechnen Sie die variablen Stückkosten für den Produktionsprozess.
Untersuchen Sie, ob durch diese Bestellung Gewinn erzielt wird und ob somit die Preisfestlegung sinnvoll ist.

2 Lineare Algebra

2.2 Rechnen mit Matrizen

2.2.1 Richtig oder Falsch?

	richtig	falsch	korrigierte Aussage
Ein Skalar ist eine reelle Zahl.	S	T	
$s \cdot A = A \cdot s$	U	E	Es gilt nur $s \cdot A$
$A \pm B = C$: Format der Matrizen A und B stimmt nicht überein.	S	H	Voraussetzung: Format der Matrizen A und B stimmt ~~nicht~~ überein.
Die s-Multiplikation wird elementweise durchgeführt.	R	I	
Ein Vektor ist eine Matrix mit nur einer Zeile oder nur einer Spalte.	G	M	
$\vec{a}^T$ steht für einen Spaltenvektor.	A	U	**Zeilen**vektor
Zwei Matrizen werden gemäß folgender Regel multipliziert: „Spalte mal Zeile".	B	T	Zeile mal Spalte
Bei der Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix muss die Anzahl der Elemente in der Zeile des ersten Faktors mit der Anzahl der Elemente in der Spalte des zweiten Faktors übereinstimmen.	P	N	
Es gilt immer: $A \cdot B = B \cdot A$	O	E	Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ.
$A \cdot B = C \Rightarrow A = B^{-1} \cdot C$	I	R	$A \cdot B = C \Rightarrow A = C \cdot B^{-1}$
In einer Einheitsmatrix stehen in der Hauptdiagonalen Nullen, ansonsten nur Einsen.	S	F	In einer Einheitsmatrix stehen in der Hauptdiagonalen Einsen, ansonsten nur Nullen.
$A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$	E	A	
$\vec{a} \cdot A$ ist möglich	R	K	$\vec{a}^T \cdot A$ ist möglich
$\vec{a}^T \cdot \vec{b} =$ reele Zahl	T	Z	

Lösungswort: Sehr gut! Perfekt!

2.2.2 Paare finden (Rätsel)

$A = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$	R	$C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	E
$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	C	$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$	H
$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	N	$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$	E
$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$	N	$C = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$	M
$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$	I	$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$	T
$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$	M	$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$	A
$A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	T	$C = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$	R
$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$	I	$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$	Z
$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$	E	$C = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	N
Lösung: **Rechnen mit Matrizen**			

2.2.3 Lernsituation bearbeiten

Berechnung der Anzahl der gebackenen Kekse:

$Z \triangleq$ Zwergengruppe, $W \triangleq$ Wichtelgruppe und $K \triangleq$ Gesamtanzahl gebackener Kekse

$$Z = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 15 & 0 & 25 \\ 15 & 10 & 25 \end{pmatrix} \text{ und } W = \begin{pmatrix} 35 & 25 & 0 \\ 10 & 10 & 15 \\ 20 & 10 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow K = Z + W = \begin{pmatrix} 45 & 40 & 20 \\ 25 & 10 & 40 \\ 35 & 20 & 30 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Anzahl der Kekse für den Verkauf auf dem Weihnachtsbasar:

$G_Z \triangleq$ Anzahl gegessener Kekse in der Zwergengruppe

$G_G \triangleq$ Anzahl gegessener Kekse in beiden Gruppen

$Ü \triangleq$ Anzahl der übrigen Kekse für den Weihnachtsbasar

$$G_Z = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow G_G = 2 \cdot G_Z = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Ü = K - G_G \begin{pmatrix} 45 & 40 & 20 \\ 25 & 10 & 40 \\ 35 & 20 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 36 & 26 \\ 23 & 8 & 36 \\ 31 & 16 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 41 & 36 & 26 \\ 23 & 8 & 36 \\ 31 & 16 & 28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 103 \\ 67 \\ 75 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{normal} \\ \text{verziert} \\ \text{glasiert} \end{matrix}$$

$$Ü = 103 + 67 + 75 = 245$$

Antwort: Insgesamt können die Zwergen- und die Wichtelgruppe 245 Kekse zum Verkauf auf dem Weihnachtsbasar anbieten.

Erlös berechnen:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,50 \\ 0,50 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = Ü \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 41 & 36 & 26 \\ 23 & 8 & 36 \\ 31 & 16 & 28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,50 \\ 0,50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41,25 \\ 27,75 \\ 29,75 \end{pmatrix}$$

Fehlende Einnahmen berechnen:

$$750 \text{ EUR} - \Big(\underbrace{41,25 + 27,75 + 29,75}_{98,75}\Big) \text{ EUR} = 651,25 \text{ EUR}$$

Antwort: Die Zwergen- und die Wichtelgruppe haben durch den Verkauf ihrer Kekse 98,75 EUR zum Klettergerüst beigesteuert. 651,25 EUR müssen durch die anderen Verkaufsstände auf dem Weihnachtsbasar eingenommen werden.

2.2.4 Rechnen ohne GTR/CAS

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 14 & 28 \end{pmatrix}$ „Zeilenvektor mal Matrix = Zeilenvektor“

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$ „Matrix mal Matrix = Matrix“

c) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 28$ „Zeilenvektor mal Spaltenvektor = reelle Zahl"

d) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 12 \end{pmatrix}$ „Matrix mal Spaltenvektor = Spaltenvektor“

e) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \end{pmatrix}$ „Inverse Matrix“

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & -\frac{1}{6} \\ 0,5 & -0,25 & \frac{1}{6} \\ -0,5 & 0,25 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ „Inverse Matrix“

2.3 Mehrstufige Produktionsprozesse

2.3.1 Richtig oder Falsch? (Rätsel)

	richtig	falsch
Berechnungen und Darstellungen der mehrstufigen Produktionsprozesse dienen dazu, die Betriebsabläufe in einem Produktionsprozess reibungslos zu gestalten.	V	K
Es gibt zwei Produktionsmatrizen: A_{RZ} und B_{ZE}.	A	E
A_{RZ} ist eine Matrix, die zeigt, in welcher Menge welcher Rohstoff in welches Zwischenprodukt einfließt.	R	T
Die Elemente a_{mn} geben an, wie viele Mengeneinheiten des Rohstoffes m benötigt werden, um eine ME des jeweiligen Endproduktes n herzustellen.	O	I
B_{ZE} ist eine Matrix, die angibt, in welcher Menge welches Zwischenprodukt in welches Endpunkt einfließt.	A	E
Die Elemente b_{nu} geben an, wie viele Mengeneinheiten des Endproduktes u benötigt werden, um eine ME des Zwischenproduktes n zu produzieren.	M	**B**
Mithilfe der Formel $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$ kann die Bedarfsmatrix C_{RE} errechnet werden. C_{RE} gibt an, in welcher Menge welcher Rohstoff in welches Endprodukt einfließt.	L	Ö
Die Elemente c_{mu} geben an, wie viele Mengeneinheiten des Rohstoffes m benötigt werden, um eine ME des jeweiligen Endproduktes u zu produzieren.	E	A
Es gilt: $A_{RZ} = C_{RE} \cdot B_{ZE}^{-1}$ und $B_{ZE} = C_{RE} \cdot A_{RZ}^{-1}$.	W	S
Für die Produktionsmatrizen und die Bedarfsmatrix dürfen keine anderen Bezeichnungen verwendet werden außer A_{RZ}, B_{ZE} und C_{RE}.	C	T
Die Matrizen A_{RZ} und B_{ZE} fließen in das Verflechtungsdiagramm ein.	Ü	H
Der Vektor $\vec{m}$ gibt den Rohstoffeinsatz für die gesamte Herstellung der Endprodukte an.	K	**C**
Der gesamte Rohstoffeinsatz berechnet sich durch die Multiplikation der Bedarfsmatrix mit den Endproduktmengen.	K	S
Die Produktionskosten werden ermittelt, um Verkaufspreise festzulegen. Dabei ist der Preis immer doppelt so hoch wie die Kosten.	E	K
Die Produktionskosten setzen sich aus den Rohstoffkosten $\vec{k}_R^T$, den Fertigungskosten der ersten und der zweiten Produktionsstufe $\vec{k}_Z^T$ bzw. $\vec{k}_E^T$ zusammen.	O	U
Die variablen Gesamtkosten errechnen sich durch folgende Formel: $K_v = \vec{k}_v^T \cdot \vec{m}$. Die Gesamtkosten werden mithilfe folgender Formel berechnet: $K = K_v + K_f$.	S	T
Die Erlöse ergeben sich aus der Multiplikation des Vektors für die Verkaufspreise mit dem Vektor für die einzelnen Endproduktmengen.	T	P
Der Vektor $\vec{p}^T$ verdeutlicht die Verkaufspreise für die Endprodukte in Geldeinheiten pro Mengeneinheit.	E	O
Der Gewinn wird mit $G = K - E$ berechnet.	E	**N**

Lösungswort: variable Stückkosten

Definition: Herstellungskosten, die von der Produktionszahl abhängig sind

Formel zur Berechnung: $\vec{k}_v^T = \vec{k}_R^T \cdot C_{RE} + \vec{k}_Z^T \cdot B_{ZE} + \vec{k}_E^T$

2.3.2 Lernsituation bearbeiten

Matrizen auf Basis der Datentabellen aufstellen:

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ und } C_{RE} = \begin{pmatrix} 108 & 120 \\ 72 & 80 \\ 42 & 14 \\ 42 & 41 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$$

B_{ZE} berechnen:

$A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$

Das Format der Matrix B ist $(3 \times 2) \Rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$.

LGS aufstellen:

$$\left| \begin{matrix} 12\,b_{11} = 108 \\ 8\,b_{11} = 72 \end{matrix} \right| \Rightarrow b_{11} = 9 \text{ und } \left| \begin{matrix} 12\,b_{12} = 120 \\ 8\,b_{12} = 80 \end{matrix} \right| \Rightarrow b_{12} = 10$$

$$\left| 6\,b_{31} = 0 \right| \Rightarrow b_{31} = 0 \text{ und } \left| 6\,b_{32} = 42 \right| \Rightarrow b_{32} = 7$$

$$\left| \begin{matrix} 7\,b_{21} + 2\,b_{31} = 42 \\ 2\,b_{11} + 4\,b_{21} + 3\,b_{31} = 42 \end{matrix} \right| \Rightarrow \left| \begin{matrix} 7\,b_{21} + 0 = 42 \\ 18 + 4\,b_{21} + 0 = 42 \end{matrix} \right| \Rightarrow b_{21} = 6 \text{ und}$$

$$\left| \begin{matrix} 7\,b_{22} + 2\,b_{32} = 14 \\ 2\,b_{12} + 4\,b_{22} + 3\,b_{32} = 41 \end{matrix} \right| \Rightarrow \left| \begin{matrix} 7\,b_{21} + 14 = 14 \\ 20 + 4\,b_{21} + 21 = 41 \end{matrix} \right| \Rightarrow b_{22} = 0$$

$$B_{ZE} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Tabellarische Darstellung:

Zwischenprodukte \ Endprodukte	Fitness-Müsli	Genießer-Müsli
Basis	9	10
Fitness-Aroma	6	0
Genießer-Aroma	0	7

Erklärung der dritten Zeile der Matrix A_{RZ}:

Der Rohstoff Früchte fließt gar nicht in das Zwischenprodukt Basis ein, mit 7 ME in das Fitness-Aroma und mit 2 ME in das Genießer-Aroma.