

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Kurt Bohner

Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Ronald Deusch

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Beratende Tätigkeit:

Norbert Lengersdorf

Lehrauftrag Mathematik am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

Studium der Mathematik und Physik an der RWTH Aachen

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.

Stand: Juli 2017

Umschlag: Kreis oben: www.adpic.de

Kreis unten: Robert Kneschke - Fotolia.com

* *

1. Auflage 2018

© 2018 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-0666-8

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band ist ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht in allen Berufskollegs, die den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife ermöglichen, und den Beruflichen Gymnasien in NRW der Fachrichtung Wirtschaft und Verwaltung. Das Buch behandelt den gesamten Lehrstoff: Analysis (Differenzial- und Integralrechnung), Stochastik (Umgang mit Wahrscheinlichkeiten, Binomialverteilung, Normalverteilung, Hypothesentest), Lineare Algebra (Lineare Gleichungssysteme, Matrizen und ihre Anwendungen, Leontiefmodell, Lineare Optimierung). Grundlage der Inhalte ist der Lehrplan für Bildungsgänge, die zum Erwerb der allgemeinen Hochschulreife führen, vom Juni 2007 und vom Mai 2008.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam die im Lehrplan geforderten Inhalte. Die Autoren orientieren sich an den in den Bildungsstandards vom Juli 2014 für die allgemeine Hochschulreife formulierten mathematischen Kompetenzen (mathematisch modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die in den Bildungsstandards aufgeführten Kompetenzen wie auch die Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Begleitend werden ein Arbeitsheft (ISBN 978-3-8120-2666-6) und eine Formelsammlung (ISBN 978-3-8120-1665-0) angeboten. Das Arbeitsheft soll Schüler und Lehrer durch Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

Der Aufbau dieses Buches

Jedes Hauptkapitel beginnt mit der **Modellierung einer Situation**, die die Schüler/innen eigenverantwortlich und selbständig bearbeiten.

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.

II Integralrechnung

Modellierung einer Situation

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \int (2x^3 + 4x^2 - 10x - 12) \cdot dx$, $x \in \mathbb{R}$.
 Den Graph der Funktion f beschreibe modellhaft das Profil eines Kanals für $-1 \leq x \leq 2$ sowie die links anschließende Uferböschung mit Erhöhung, 11,1, 1, 1m. Die nächste Seite...

22 | Differenzialrechnung

Beispiel 2

Die Gesamtkostenfunktion K ist gegeben durch $K(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4$, x in ME, $K(x)$ in GE.

a) Zeigen Sie, dass der Graph von K keinen Extrempunkt besitzt. Interpretieren Sie ihr Ergebnis im wirtschaftlichen Sinne.
 b) Bestimmen Sie die Kostenänderung bei einer Produktion von 2 ME. Interpretieren Sie ihr Ergebnis.

Lösung

a) Ableitung: $K'(x) = 3x^2 - 2x + 2$; $K''(x) = 6x - 2$
 Bedingung für Extrempunkte: $K'(x) = 0 \wedge K''(x) \neq 0$
 Nebenbedingung: $K(x) = 0$

$3x^2 - 2x + 2 = 0$
 $\Delta = 4 - 24 = -20 < 0$

Die Gleichung hat wegen $\Delta < 0$ keine Lösung. K hat also keine Extrempunkte.
 Mit wachsenden Produktionsmengen wachsen auch die Kosten. Eine Kostenfunktion ist folglich monoton wachsend.
 Die Steigungen der Kostenkurve sind stets positiv: $K'(x) > 0$.

© 2014 Pearson Education

Kompetenzorientierte Fragestellung mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Probleme aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.

Jede Lerneinheit endet mit einer umfassenden Anzahl von Aufgaben. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet.

Eine **Differenzierung der Aufgaben** ist durch Farben gegeben;

- blau:** Lösung ohne Hilfsmittel
- schwarz:** Hilfsmittel sind zugelassen.

Seiten, die Themen und Aufgaben nur für den Leistungskurs beinhalten, sind farblich hinterlegt.

62 | Differenzialrechnung

1 Berechnen Sie die Elastizität folgender Nachfragefunktionen in Abhängigkeit von der Menge x .
Geben Sie die Bereiche an, in denen die Nachfrage elastisch ist.
a) $p_d(x) = 100 - 3x$ b) $p_d(x) = 144 - 3x^2$ c) $p_d(x) = \frac{400}{x} + 200$

2 Nennen Sie Beispiele für Güter, bei denen eine starke Veränderung der Nachfrage bei einem veränderten Preis zu erwarten ist.

3 Gegeben sind eine Nachfragefunktion $p_d(x) = 200 - 5x^2$ und die Angebotsfunktion $p_a(x) = 20x + 50$.
a) Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis und die Gleichgewichtsmenge.
b) Ermitteln Sie die Preiselastizität der Nachfrage $\epsilon_d(x)$ in Abhängigkeit von der Menge und stellen Sie die Funktion grafisch dar.
c) Berechnen Sie die Mengen, für die der Angebot elastisch bzw. unelastisch ist.
d) Bestimmen Sie die Elastizität von Angebot und Nachfrage im Marktgleichgewicht. Interpretieren Sie diese Werte.

4 Das Schaubild der linearen Nachfragefunktion p_d stellt mit $\epsilon = \frac{1}{100}$ an der Stelle $x = 200$ den Funktionswert p dar.
Berechnen Sie die Elastizität der Nachfrage und die Elastizität in $x = 200$. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

78 | Differenzialrechnung

Quotientenregel der Ableitung

Beispiel
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1}$; $x \in \mathbb{R}$.
Gesucht ist $f'(x)$.

Eine „einfachere“ Regel zum Ableiten eines Quotienten gibt es nicht, wie man an einem Beispiel erkennen kann:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{0}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = 0 + \frac{0 \cdot (x^2 + 1) - 1 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Man erkennt: Ein Quotient kann nicht abgeleitet werden, indem man Zähler und Nenner ableitet.

Für die Ableitung eines Quotienten gibt es eine Regel, die Quotientenregel.

Quotientenregel
Sei $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ und $v(x) \neq 0$. Dann gilt:

1 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - 2x$

2 Berechnen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte des Graphen der Funktion f .
Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte des Schaubildes von f mit der x -Achse.
Skizzieren Sie den Graphen von f .

3 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x^2 - 6x + 8$ a) $f(x) = -x^2 + 6x^2 - 9x + 4$
c) $f(x) = x^2 + 4x^2 - 11x - 30$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x^2$

Achtung Sie

Bei der **Preiselastizität der Nachfrage** gilt:

$$\epsilon_d(x) = \frac{p_d(x)}{x} \cdot \frac{dx}{dp_d(x)} \quad \text{wegen } \epsilon_d(x) = \frac{p_d(x)}{x} \cdot \frac{1}{\frac{dp_d(x)}{dx}} \quad \text{und } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{dx}{dp_d(x)} = p_d'(x)$$

Die Funktion ϵ_d heißt **Elastizitätsfunktion der Nachfrage**.
Die Nachfrage heißt in x_0
elastisch, wenn $\epsilon_d(x_0) < -1$; **unelastisch**, wenn $-1 < \epsilon_d(x_0) < 0$
und **fließend**, wenn $\epsilon_d(x_0) = -1$.

1 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von t .
a) $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 3x^2 + 4)$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4e^{1-2x}$

2 Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f mit $f(x) = \frac{1}{2}(x + 5x)^2 + 4e^{1-2x}$ und $F(0) = 3$.

3 Zeigen Sie f mit $f(x) = (2x - 3)e^{-5x} + 6$; $x \in \mathbb{R}$. Ist eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x^{-5}$; $x \in \mathbb{R}$.

4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0,25(x - 1)(x - 2)$; $x \in \mathbb{R}$.
Der Graph von f schneidet die x -Achse in zwei Punkten A und B .
Berechnen Sie den Flächeninhalt.



Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Website <http://www.merkur-verlag.de>.

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

Die Aufgaben „**Modellierung einer Situation**“ und „**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**“ werden im Anhang ausführlich gelöst.

Inhaltsverzeichnis

I Differenzialrechnung 11

1	Differenzialrechnung bei ganzrationalen Funktionen	11
1.1	Stetigkeit und Differenzierbarkeit	12
1.2	Monotonie	14
1.3	Extrempunkte	18
1.4	Wendepunkte	25
1.5	Beispiele zur Kurvenuntersuchung	30
1.6	Untersuchung einer Kurvenschar	34
1.7	Weitere Anwendungen der Differenzialrechnung	38
1.7.1	Kurvenuntersuchung in wirtschaftlichen Anwendungen	39
1.7.2	Aufstellen von Kurvengleichungen aus gegebenen Bedingungen	64
1.7.3	Newtonverfahren zur Nullstellenbestimmung	70
2	Differenzialrechnung bei Exponentialfunktionen	73
2.1	Ableitungsregeln	74
2.2	Kurvenuntersuchung	80
2.3	Exponentialfunktionen in Anwendungen	86

II Integralrechnung 97

1	Einführung	98
2	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	100
3	Das bestimmte Integral	111
4	Flächeninhaltsberechnung mithilfe der Integralrechnung	119
4.1	Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse	119
4.2	Fläche zwischen zwei Graphen	126
5	Anwendung der Integralrechnung in der Wirtschaft	133

III Stochastik 144

1	Umgang mit Zufall und Wahrscheinlichkeit	144
1.1	Zufallsexperiment	145
1.1.1	Einstufiges Zufallsexperiment	145
1.1.2	Mehrstufiges Zufallsexperiment	147
1.2	Ereignisse	149
1.3	Wahrscheinlichkeit	154
1.3.1	Definition der Wahrscheinlichkeit	154
1.3.2	Wahrscheinlichkeit bei Gleichverteilung (Laplace-Experiment)	158
1.3.3	Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten	161
1.3.4	Additionssatz	166
1.3.5	Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit	168

1.4	Kombinatorik	176
1.4.1	Produktregel	176
1.4.2	Stichproben	177
1.5	Zufallsvariable	187
1.5.1	Einführung	187
1.5.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung	190
1.5.3	Erwartungswert einer Zufallsvariablen	193
1.5.4	Varianz und Standardabweichung einer Zufallsvariablen	198
2	Binomialverteilung	204
2.1	Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Ketten	205
2.2	Die Bernoulli-Formel	207
2.3	Erwartungswert und Varianz einer Binomialverteilung	216
3	Normalverteilung	222
3.1	Von der Binomialverteilung zur Normalverteilung	222
3.2	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Normalverteilung	224
3.3	Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung	231
4	Testen von Hypothesen	236
4.1	Einseitiger Hypothesentest	236
4.2	Zweiseitiger Hypothesentest	245

IV Lineare Algebra

250

1	Lineare Gleichungssysteme	250
1.1	Einführung	251
1.2	Umformung und Lösung eines linearen Gleichungssystems	253
1.2.1	Das LGS ist eindeutig lösbar	253
1.2.2	Das LGS ist unlösbar	257
1.2.3	Das LGS ist mehrdeutig lösbar	258
1.3	Der Rang einer Matrix	261
1.4	Lineare Abhängigkeit	265
2	Rechenoperationen mit Matrizen	267
2.1	Rechnen mit Matrizen	268
2.1.1	Einführung	268
2.1.2	Addition und skalare Multiplikation	270
2.1.3	Multiplikation von Matrizen	274
2.2	Inverse Matrix	281
2.2.1	Einführung	281
2.2.2	Berechnung der inversen Matrix	282
2.3	Matrizengleichungen	286
2.3.1	Einführung	286
2.3.2	Auflösung von Matrizengleichungen	287
3	Lineare Verflechtung bei mehrstufigen Produktionsprozessen	291
3.1	Produktionsprozesse	292
3.2	Verflechtungsmatrizen	295
3.3	Produktions- und Verbrauchsvektoren	301
3.4	Kosten	308

4	Das Leontiefmodell	321
4.1	Beschreibung des Leontiefmodells	322
4.2	Inputmatrix	324
4.3	Problemstellungen beim Leontiefmodell	330
4.3.1	Die Konsumabgabe hängt von der gegebenen Produktion ab	330
4.3.2	Die Produktion richtet sich nach der erwarteten Nachfrage	332
4.3.3	Der Produktionsvektor und der Konsumvektor sind teilweise gegeben	334
5	Stochastische Matrizen	341
5.1	Einführung	342
5.2	Stochastische Übergangsprozesse	343
5.3	Stabilitätsvektor und Grenzmatrix	351
6	Lineare Optimierung	361
6.1	Grafische Lösung von linearen Ungleichungssystemen	362
6.2	Grafische Lösung für Optimierungsaufgaben	365
6.2.1	Die Optimierungsaufgabe hat eine eindeutige Lösung	365
6.2.2	Die Optimierungsaufgabe hat keine Lösung	373
6.2.3	Die Optimierungsaufgabe hat eine mehrdeutige Lösung	375
6.3	Algebraische Lösungsverfahren für Optimierungsaufgaben	380
6.3.1	Eckpunktberechnungsmethode	380
6.3.2	Simplexverfahren	381

III Anhang

399

1	Lösungen der Modellierungen und Tests	399
2	Mathematische Zeichen	425
3	Stichwortverzeichnis	426