Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Ronald Deusch
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Beratende Tätigkeit:

Norbert Lengersdorf
Lehrauftrag Mathematik am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath
Studium der Mathematik und Physik an der RWTH Aachen

Umschlag: Kreis oben: www. adpic.de
Kreis unten: Robert Kneschke – Fotolia.com

* *

1. Auflage 2018

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-**0666**-**8**

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band ist ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht in allen Berufskollegs, die den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife ermöglichen, und den Beruflichen Gymnasien in NRW der Fachrichtung Wirtschaft und Verwaltung. Das Buch behandelt den gesamten Lehrstoff: Analysis (Differenzial- und Integralrechnung), Stochastik (Umgang mit Wahrscheinlichkeiten, Binomialverteilung, Normalverteilung, Hypothesentest), Lineare Algebra (Lineare Gleichungssysteme, Matrizen und ihre Anwendungen, Leontiefmodell, Lineare Optimierung). Grundlage der Inhalte ist der Lehrplan für Bildungsgänge, die zum Erwerb der allgemeinen Hochschulreife führen, vom Juni 2007 und vom Mai 2008.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam die im Lehrplan geforderten Inhalte. Die Autoren orientieren sich an den in den Bildungsstandards vom Juli 2014 für die allgemeine Hochschulreife formulierten mathematischen Kompetenzen (mathematisch modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die in den Bildungsstandards aufgeführten Kompetenzen wie auch die Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

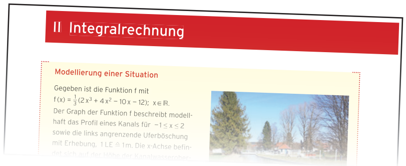
Begleitend werden ein Arbeitsheft (ISBN 978-3-8120-2666-6) und eine Formelsammlung (ISBN 978-3-8120-1665-0) angeboten. Das Arbeitsheft soll Schüler und Lehrer durch Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

Der Aufbau dieses Buches

Jedes Hauptkapitel beginnt mit der **Modellierung einer Situation,** die die Schüler/innen eigenverantwortlich und selbständig bearbeiten.

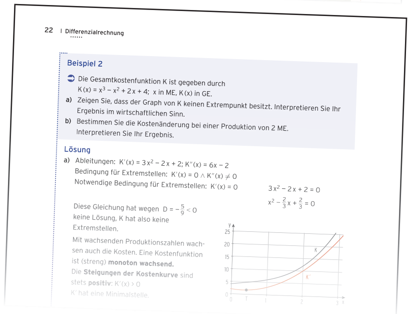


II Integralrechnung

Modellierung einer Situation

Gegeben ist die Funktion f mit
$f(x) = \frac{1}{3}(2x^3 + 4x^2 - 10x - 12);\ x \in \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion f beschreibt modellhaft das Profil eines Kanals für $-1 \leq x \leq 2$ sowie die links angrenzende Uferböschung mit Erhebung, 1 LE ≙ 1m. Die x-Achse befin-

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.



22 | Differenzialrechnung

Beispiel 2

Die Gesamtkostenfunktion K ist gegeben durch
$K(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4;\ x$ in ME, $K(x)$ in GE.

a) Zeigen Sie, dass der Graph von K keinen Extrempunkt besitzt. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im wirtschaftlichen Sinn.

b) Bestimmen Sie die Kostenänderung bei einer Produktion von 2 ME. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Lösung

a) Ableitungen: $K'(x) = 3x^2 - 2x + 2;\ K''(x) = 6x - 2$
Bedingung für Extremstellen: $K'(x) = 0 \wedge K''(x) \neq 0$
Notwendige Bedingung für Extremstellen: $K'(x) = 0$

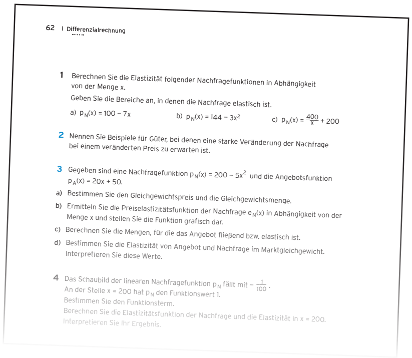
$3x^2 - 2x + 2 = 0$

$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = 0$

Diese Gleichung hat wegen $D = -\frac{5}{9} < 0$ keine Lösung, K hat also keine Extremstellen.

Mit wachsenden Produktionszahlen wachsen auch die Kosten. Eine Kostenfunktion ist (streng) **monoton wachsend.**
Die **Steigungen der Kostenkurve** sind stets **positiv**: $K'(x) > 0$
K′ hat eine Minimalstelle.

Kompetenzorientierte Fragestellung mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Probleme aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.



62 I Differenzialrechnung

1 Berechnen Sie die Elastizität folgender Nachfragefunktionen in Abhängigkeit von der Menge x.
Geben Sie die Bereiche an, in denen die Nachfrage elastisch ist.
a) $p_N(x) = 100 - 7x$ b) $p_N(x) = 144 - 3x^2$ c) $p_N(x) = \frac{400}{x} + 200$

2 Nennen Sie Beispiele für Güter, bei denen eine starke Veränderung der Nachfrage bei einem veränderten Preis zu erwarten ist.

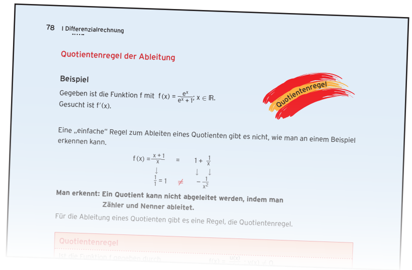
3 Gegeben sind eine Nachfragefunktion $p_N(x) = 200 - 5x^2$ und die Angebotsfunktion $p_A(x) = 20x + 50$.
a) Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis und die Gleichgewichtsmenge.
b) Ermitteln Sie die Preiselastizitätsfunktion der Nachfrage $e_N(x)$ in Abhängigkeit von der Menge x und stellen Sie die Funktion grafisch dar.
c) Berechnen Sie die Mengen, für die das Angebot fließend bzw. elastisch ist.
d) Bestimmen Sie die Elastizität von Angebot und Nachfrage im Marktgleichgewicht. Interpretieren Sie diese Werte.

4 Das Schaubild der linearen Nachfragefunktion p_N fällt mit $-\frac{1}{100}$.
An der Stelle x = 200 hat p_N den Funktionswert 1.
Bestimmen Sie den Funktionsterm.
Berechnen Sie die Elastizitätsfunktion der Nachfrage und die Elastizität in x = 200.
Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Jede Lerneinheit endet mit einer umfassenden Anzahl von Aufgaben. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet.

Eine **Differenzierung der Aufgaben** ist durch Farben gegeben;
blau: Lösung ohne Hilfsmittel
schwarz: Hilfsmittel sind zugelassen.

Seiten, die Themen und Aufgaben nur für den Leistungskurs beinhalten, sind farblich hinterlegt.



78 I Differenzialrechnung

Quotientenregel der Ableitung

Beispiel
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$; $x \in \mathbb{R}$.
Gesucht ist $f'(x)$.

Eine „einfache" Regel zum Ableiten eines Quotienten gibt es nicht, wie man an einem Beispiel erkennen kann.

$f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$

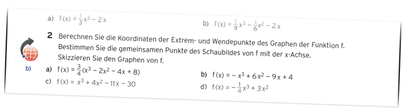
$\frac{1}{1} = 1 \neq -\frac{1}{x^2}$

Man erkennt: Ein Quotient kann nicht abgeleitet werden, indem man Zähler und Nenner ableitet.

Für die Ableitung eines Quotienten gibt es eine Regel, die Quotientenregel.

Quotientenregel

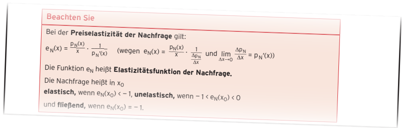
Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Website http://www.merkur-verlag.de.



a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x$ b) $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 2x$

2 Berechnen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte des Graphen der Funktion f.
Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte des Schaubildes von f mit der x-Achse.
Skizzieren Sie den Graphen von f.
a) $f(x) = \frac{3}{4}(x^3 - 2x^2 - 4x + 8)$ b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$
c) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x^2$

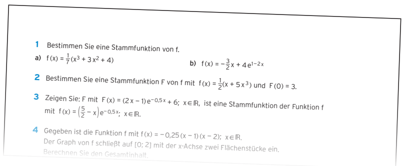
Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.



Beachten Sie

Bei der **Preiselastizität der Nachfrage** gilt:
$e_N(x) = \frac{p_N(x)}{x} \cdot \frac{1}{p_N'(x)}$ (wegen $e_N(x) = \frac{p_N(x)}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\Delta p_N}{\Delta x}}$ und $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta p_N}{\Delta x} = p_N'(x)$)
Die Funktion e_N heißt **Elastizitätsfunktion der Nachfrage.**
Die Nachfrage heißt in x_0
elastisch, wenn $e_N(x_0) < -1$, **unelastisch**, wenn $-1 < e_N(x_0) < 0$
und **fließend**, wenn $e_N(x_0) = -1$.

Die Aufgaben **„Modellierung einer Situation“** und **„Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse“** werden im Anhang ausführlich gelöst.



1 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.
a) $f(x) = \frac{1}{7}(x^3 + 3x^2 + 4)$ b) $f(x) = -\frac{3}{2}x + 4e^{1-2x}$

2 Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f mit $f(x) = \frac{1}{2}(x + 5x^3)$ und $F(0) = 3$.

3 Zeigen Sie: F mit $F(x) = (2x - 1)e^{-0{,}5x} + 6$; $x \in \mathbb{R}$, ist eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \left(\frac{5}{2} - x\right)e^{-0{,}5x}$; $x \in \mathbb{R}$.

4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -0{,}25(x - 1)(x - 2)$; $x \in \mathbb{R}$.
Der Graph von f schließt auf [0; 2] mit der x-Achse zwei Flächenstücke ein.
Berechnen Sie den Gesamtinhalt.

Inhaltsverzeichnis