

Patyna

Mathematik

für das Berufliche Gymnasium in Niedersachsen

Kerncurriculum und Bildungsstandards

Einführungs- und Qualifikationsphase – Schwerpunkt Wirtschaft



Formelsammlung

Merkur 
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasserin:

Marion Patyna

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Umschlag: Hintergrund: ECE, Ernst-August-Galerie, Hannover,
Kreis rechts oben: Candy Box — Fotolia.com, Kreis Mitte: Colourbox.de,
Kreis links: Syda Productions — Colourbox.de, Grafik: Colourbox.de

* * * * *

4. Auflage 2024

© 2018 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 1685-04

ISBN 978-3-8120-1125-9

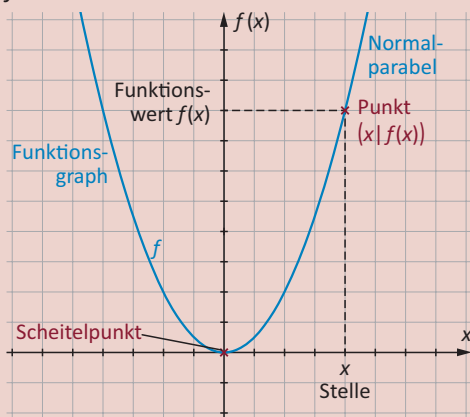
Quadratische Funktionen

$$f: f(x) = ax^2 + bx + c$$

f	Name der Funktion
$f(x)$	Funktionswert
$ax^2 + bx + c$	Funktionsterm

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ und } b, c \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



Gleichung und Graph

einer quadratischen Funktion

ax^2	Quadratglied
bx	Linearglied
c	Absolutglied

Funktionsgraph: Parabel

Polynomdarstellung

(allgemeine Form, Normalform)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Streckungs-, Stauchungs-, Spiegelungs-
faktor (Formfaktor)

$a = 1$	Normalparabel
$ a > 1$	Streckung in $f(x)$ -Richtung (Ordinatenrichtung)
$0 < a < 1$	Stauchung in $f(x)$ -Richtung (Ordinatenrichtung)
$a < 0$	Spiegelung an der Abszissenachse, Öffnung der Parabel nach unten

Linearfaktordarstellung

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Nullstellen bei x_1 und x_2

$$\text{Scheitelpunkt bei } x_s = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2};$$

mit $x_1 < x_2$

Darstellungsformen

und Parametervariation

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Fortsetzung

Scheitelpunktform

$$f(x) = a(x - u)^2 + v$$

Scheitelpunkt $S(u \mid v)$

$u < 0$	Verschiebung nach links
$u > 0$	Verschiebung nach rechts
$v < 0$	Verschiebung nach unten
$v > 0$	Verschiebung nach oben

Fortsetzung

Schnittpunkt mit der Ordinatenachse

$$x = 0 \Rightarrow$$

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$f(0) = c$$

Schnittpunkte mit der Abszissenachse

(Nullstellen)

$$f(x) = 0$$

Polynomdarstellung/Normalform

p-q-Formel

$$f(x) = x^2 + px + q$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{\text{Diskriminante } D}}$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ und}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

a-b-c-Formel

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ mit } D = b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ und } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

und einer Parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$

Fortsetzung

Scheitelpunktform

$$f(x) = a(x - u)^2 + v = 0$$

Lösung

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{v}{a}} + u \quad \text{mit } D = -\frac{v}{a}$$

$$x_1 = \sqrt{-\frac{v}{a}} + u \quad \text{und} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{v}{a}} + u$$

Linearfaktordarstellung

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Satz vom Nullprodukt

$$0 = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$0 = (x - x_1) \Rightarrow x = x_1$$

$$0 = (x - x_2) \Rightarrow x = x_2$$

Fortsetzung $D > 0$

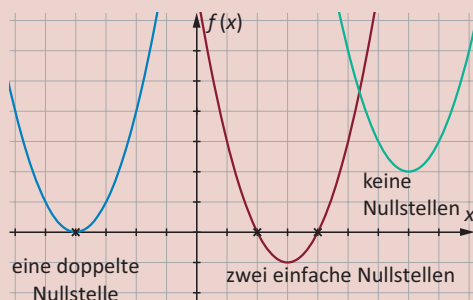
zwei einfache Nullstellen,

 $D = 0$

eine doppelte Nullstelle,

 $D < 0$

keine Nullstelle

Nullstellenarten bei einer Parabel

Explizite Darstellung

$$f: f(t) = g - a \cdot b^t = g - a \cdot e^{(\ln b) \cdot t} \\ = g - a \cdot e^{k \cdot t}$$

Begrenzte Zunahme

$$b = 1 - p \text{ mit } 0 < b < 1$$

$$k < 0$$

$$a > 0$$

$$g > f(0)$$

Begrenzte Abnahme

$$b = 1 - p \text{ mit } 0 < b < 1$$

$$k < 0$$

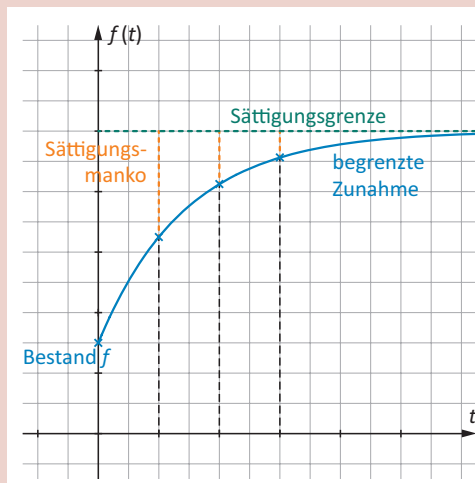
$$a < 0$$

$$g < f(0)$$

Rekursive Darstellung

$$f(t+1) = f(t) + (g - f(t)) \cdot p$$

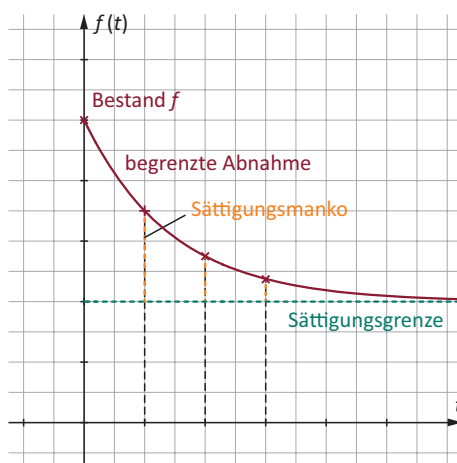
$$f'(t) = -k \cdot (g - f(t))$$

**Begrenztes Wachstum**

t	Zeitschritt, Variable
$f(t)$	Bestand
b	Wachstums- oder Zerfallsfaktor
p	Prozentsatz $0 < p < 1$
k	Wachstums- oder Zerfallskonstante $k = \ln b$
g	Sättigungsgrenze
$a \cdot b^t = a \cdot e^{(\ln b) \cdot t} = a \cdot e^{k \cdot t}$	Sättigungsmanko
$g - f(t)$	
$f(0) = g - a$	Anfangsbestand bei $t = 0$

Differenzialgleichung

$f'(t)$	Wachstumsgeschwindigkeit, proportional zum Sättigungsmanko
---------	--



Logistisches Wachstum

Explizite Darstellung

$$f: f(t) = \frac{g}{1 + a \cdot e^{-b \cdot t}} = \frac{g}{1 + \left(\frac{g}{f(0)} - 1 \right) \cdot e^{-k \cdot g \cdot t}}$$

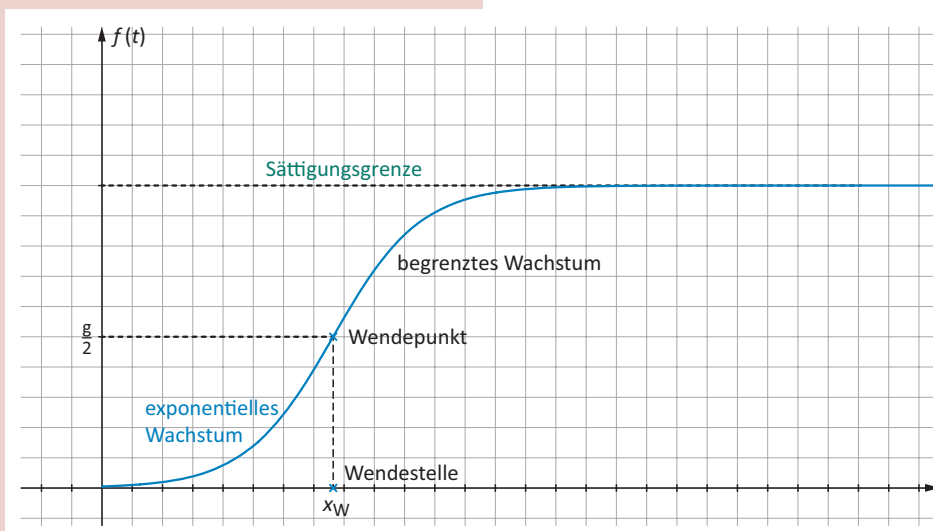
t	Zeitschritt, Variable
$f(t)$	Bestand
b	$b = k \cdot g$ $b > 0$
a	$a = \frac{g}{f(0)} - 1$ $a > 0$
k	Wachstumskonstante $k > 0$
g	Sättigungsgrenze $g = f(0) \cdot (a + 1)$ $g > 0$
$f(0) = \frac{g}{a + 1}$	Anfangsbestand bei $t = 0$
$g - f(t)$	Sättigungsmanko

$$f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (g - f(t))$$

$k > 0$

Differenzialgleichung

$f'(t)$	Wachstumsgeschwindigkeit, proportional zum Bestand und zum Sättigungsmanko
---------	--



Angebot und Nachfrage

Lineare Nachfragefunktion

$$p_N: p_N(x) = m x + b$$

$$m < 0, b > 0$$

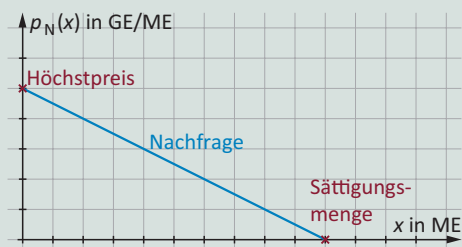
Höchstpreis

$$p_N(0) = m \cdot 0 + b = b$$

Sättigungsmenge

$$p_N(x) = m x + b = 0$$

$$x = \frac{-b}{m} > 0$$



Nachfragefunktion

$p_N(x)$	Preis
x	Menge
b	Höchstpreis
$\frac{-b}{m}$	Sättigungsmenge

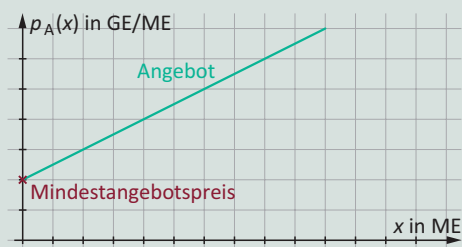
Lineare Angebotsfunktion

$$p_A: p_A(x) = m x + b$$

$$m, b > 0$$

Mindestangebotspreis

$$p_A(0) = m \cdot 0 + b$$



Angebotsfunktion

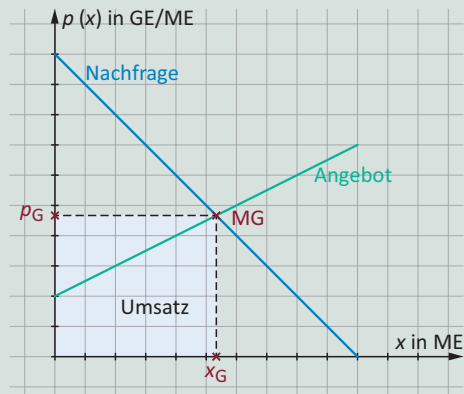
$p_A(x)$	Preis
x	Menge
b	Mindestangebotspreis

$$p_N(x) = p_A(x)$$

$$\Rightarrow \text{MG}(x_G | p_G)$$

Umsatz im Marktgleichgewicht

$$U = x_G \cdot p_G$$



Marktgleichgewicht

MG	Marktgleichgewicht
x_G	Gleichgewichtsmenge
p_G	Gleichgewichtspreis
U	Umsatz
$p_N(x)$	Nachfragefunktion
$p_A(x)$	Angebotsfunktion

Nachfrageüberschuss

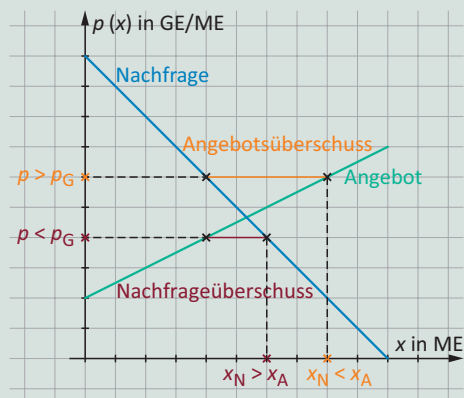
$$p < p_G$$

$$\Rightarrow x_N > x_A$$

Angebotsüberschuss

$$p > p_G$$

$$\Rightarrow x_N < x_A$$

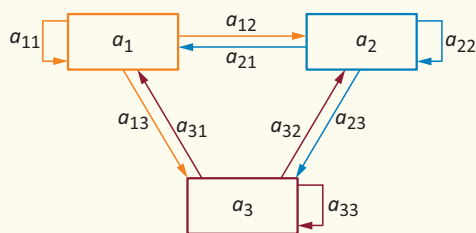


Marktungleichgewicht

p	Marktpreis
p_G	Gleichgewichtspreis
x_N	Nachfragemenge
x_A	Angebotsmenge

Hinweis: Nachfrage- und Angebotsfunktionen sind nicht immer linear.
Andere Funktionen eignen sich auch zum Modellieren.

Markow-Ketten



Übergangsdiagramm

Untersuchung langfristiger Entwicklungs- und Veränderungsprozesse

a_{mm}	Stammkunden, Stammwähler, Wechsel von a_m zu a_m , Übergangswahrscheinlichkeit $0 \leq a_{mm} \leq 1$
a_{1m}	Wechsel von a_1 zu a_m , $0 \leq a_{1m} \leq 1$

von \ nach	a_1	a_2	a_3
a_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Übergangstabelle

a_{mm}	Stammkunden, Stammwähler, Wechsel von a_m zu a_m , Übergangswahrscheinlichkeit $0 \leq a_{mm} \leq 1$
a_{1m}	Wechsel von a_1 zu a_m , $0 \leq a_{1m} \leq 1$

Stochastische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Übergangsmatrix

A	reguläre Übergangsmatrix, quadratische und invertierbare Matrix
a_{mm}	Elemente der Matrix $0 \leq a_{mm} \leq 1$
Zeilensumme = 1	

Anfangsverteilung/Ausgangsverteilung

$$\vec{v}_0^T = (v_1 \quad \dots \quad v_m)$$

Ausgangsvektor

$\vec{v}_0^T$	Ausgangsvektor
v_m	prozentuale Häufigkeit zu Beginn der Untersuchung
Zeilensumme = 1	

Prozentuale Verteilung nach n Perioden

$$\vec{v}_n^T = \vec{v}_0^T \cdot A^n$$

Situationen nach n Perioden

$\vec{v}_n^T$	Vektor für die Verteilung nach n Perioden
$\vec{v}_0^T$	Ausgangsvektor
A	Übergangsmatrix
n	Anzahl der Perioden
Zeilensumme = 1	

Prozentuale Verteilung in der Vor-Periode

$$\vec{v}_{-1}^T = \vec{v}_0^T \cdot A^{-1}$$

Situation in der Periode vor der Untersuchung

$\vec{v}_{-1}^T$	prozentuale Häufigkeit für die Periode vor der Untersuchung
$\vec{v}_0^T$	Ausgangsvektor
A^{-1}	Inverse der Übergangsmatrix A
Zeilensumme = 1	

**Stationäre Verteilung/
stabile prozentuale Verteilung**

$$\vec{v}_{\infty}^T \cdot A = \vec{v}_{\infty}^T$$

Beispiel

$$(v_1 \quad v_2 \quad 1 - v_1 - v_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= (v_1 \quad v_2 \quad 1 - v_1 - v_2)$$

Fixvektor

$\vec{v}_{\infty}^T$	Fixvektor
A	Übergangsmatrix
Zeilensumme = 1	

Stabile prozentuale Verteilung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = A_{\infty} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

Grenzmatrix

A	Übergangsmatrix
n	Anzahl der Perioden
A_{∞}	Grenzmatrix
v_n	langfristig, stabile prozentuale Häufigkeit

Rechnen mit Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Rechengesetze

Neutrales Element

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

Inversität

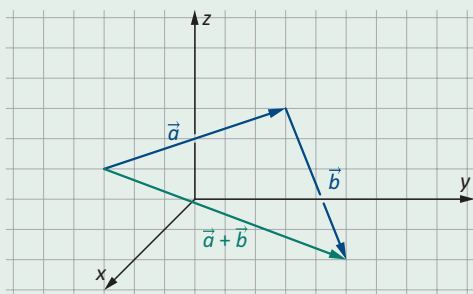
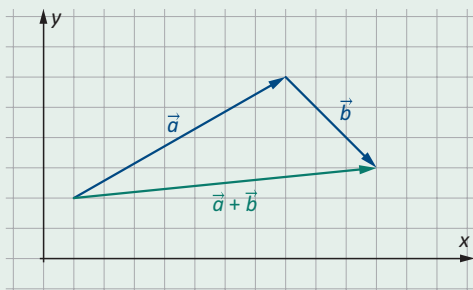
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$$

Kommutativgesetz

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Assoziativgesetz

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$



Addition von Vektoren

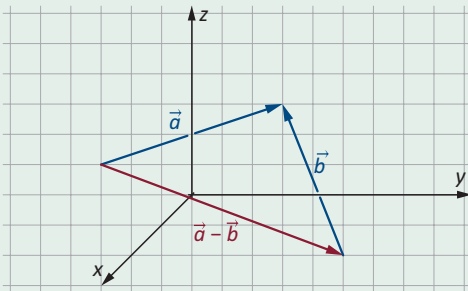
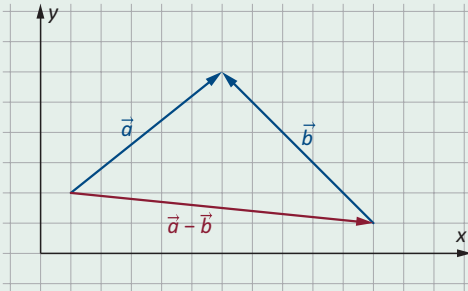
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	Vektoren
a_n, b_n	Elemente der Vektoren

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

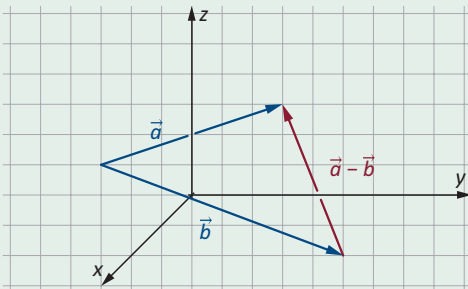
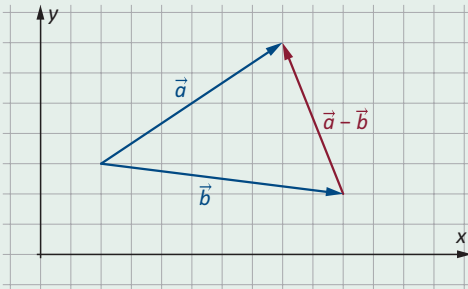
Rechengesetze

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$

■ Spitze an Spitze



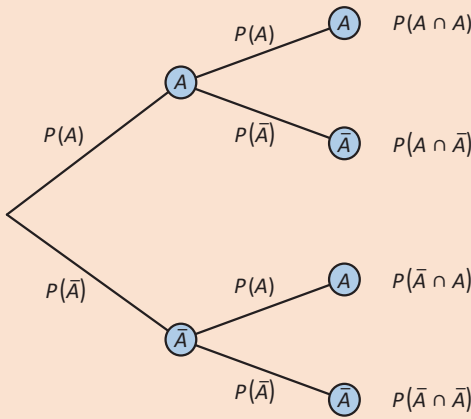
■ Anfangspunkt an Anfangspunkt



Subtraktion von Vektoren

$\vec{a}, \vec{b}$	Vektoren
a_n, b_n	Elemente der Vektoren

Baumdiagramme und Pfadregeln



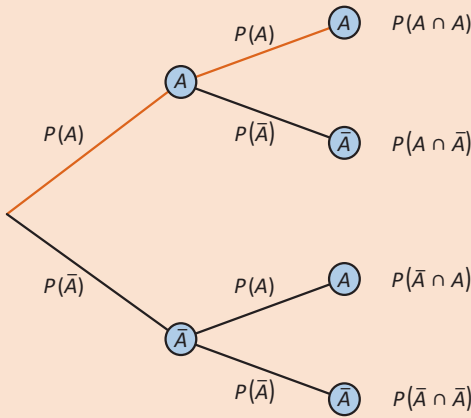
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
- $P(A \cap A) + P(A \cap \overline{A}) + P(\overline{A} \cap A) + P(\overline{A} \cap \overline{A}) = 1$

$A\overline{A} \neq \overline{A}A$

$A\overline{A} = \overline{A}A$

1. Pfadregel

$P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A)$



Baumdiagramm

$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A
$P(\overline{A})$	Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis $\overline{A}$
$P(A \cap \overline{A})$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ereignis (A und $\overline{A}$) eintritt

Variation

Reihenfolge wird beachtet

Kombination

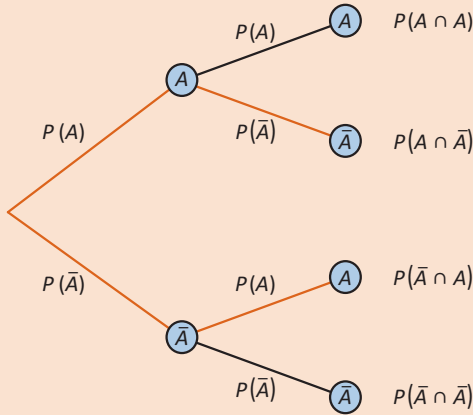
Reihenfolge wird nicht beachtet

Pfadmultiplikationsregel

$P(A \cap A)$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ereignis (A und A) eintritt
$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A

2. Pfadregel

$$P(A\bar{A}) = P(A \cap \bar{A}) + P(\bar{A} \cap A) \\ = P(A) \cdot P(\bar{A}) + P(\bar{A}) \cdot P(A)$$



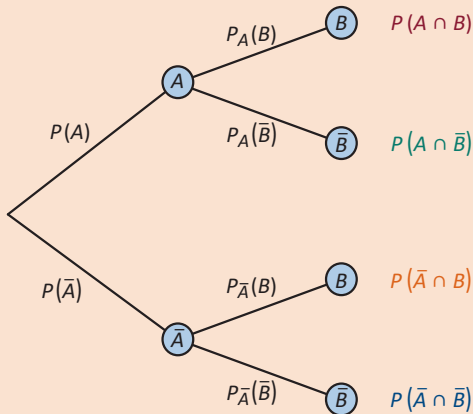
Pfadadditionsregel

$P(A\bar{A})$	Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis, in dem sowohl A als auch $\bar{A}$ vorkommt
$P(A \cap A)$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ereignis (A und A) eintritt
$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Baumdiagramm

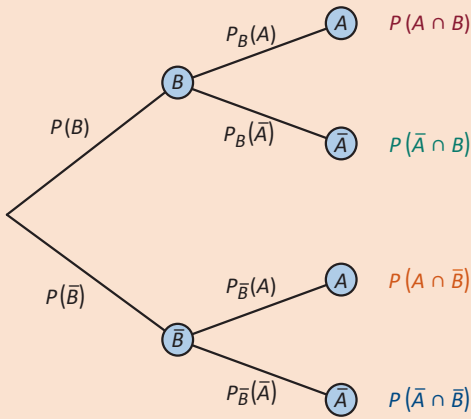
$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A
$P_A(B)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B unter der Voraussetzung, dass Ereignis A schon eingetreten ist
$P(A \cap B)$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ereignis (A und B) eintritt



	B	$\bar{B}$	Σ
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Σ	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Vier-Felder-Tafel

Fortsetzung



	A	$\bar{A}$	Σ
B	$P(B \cap A)$	$P(B \cap \bar{A})$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(\bar{B} \cap A)$	$P(\bar{B} \cap \bar{A})$	$P(\bar{B})$
Σ	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

$$\begin{aligned} P_B(A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A) \cdot \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}{P(B)} \\ &= \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)} \end{aligned}$$

mit $P(A), P(B) \neq 0$

Stochastisch unabhängig

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P_B(A) = P(A)$
- $P_A(B) = P(B)$

Stochastisch abhängig

- $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$
- $P_B(A) \neq P(A)$
- $P_A(B) \neq P(B)$

Fortsetzung

Inverses Baumdiagramm
Umgekehrtes Baumdiagramm

$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A
$P_B(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Voraussetzung, dass Ereignis B schon eingetreten ist
$P(A \cap B)$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ereignis (A und B) eintritt

Inverse Vier-Felder-Tafel
Umgekehrte Vier-Felder-Tafel

Satz von Bayes

$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A
$P_B(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Voraussetzung, dass Ereignis B schon eingetreten ist
$P(A \cap B)$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ereignis (A und B) eintritt

Abhängige und unabhängige Ereignisse

$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A
$P_B(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Voraussetzung, dass Ereignis B schon eingetreten ist
$P(A \cap B)$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ereignis (A und B) eintritt