Fehlerkorrektur Merkur-Nr. 0696-02/ ISBN 978-3-8120-0696-5

Mathematik für die Qualifikationsphase
Kerncurriculum Niedersachsen
Berufliches Gymnasium

Verbesserung Seite 232

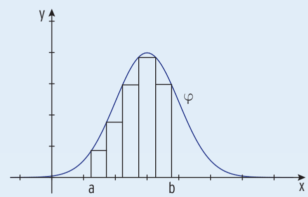
3.2 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Normalverteilung

mvurl.de/ahfc

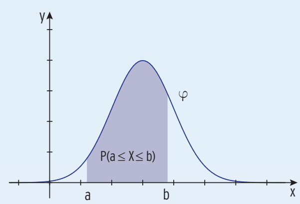
Interpretation der Fläche zwischen dem Graphen von φ und der Abszissenachse

Die Summe der Rechtecksinhalte entspricht der Wahrscheinlichkeit $P(a \leq X \leq b)$.
Dieser Flächeninhalt ist näherungsweise so groß wie der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von φ und der Abszissenachse

im Intervall [a; b]:

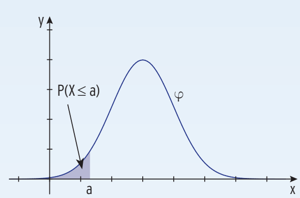


$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x)\,dx$



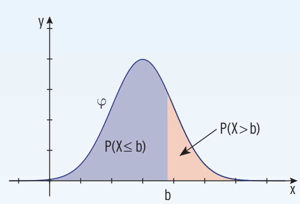
$P(X \leq a)$ lässt sich deuten als Inhalt der links von der Geraden mit x = a gelegenen Fläche zwischen dem Graphen von φ und der Abszissenachse.

$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a \varphi(x)\,dx$



$P(X > b) = 1 - P(X \leq b)$

$P(X \leq b) = \int_{-\infty}^b \varphi(x)\,dx$



Verbesserung Seite 238

3.3 Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Beispiel 1

Ein Elektrokonzern stellt Bauteile für Computer her. Bei der Produktion von Computer-Chips sind 4 % durch Verunreinigungen defekt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer 1 000-er Stichprobe mehr als 30 und weniger als 50 defekte Chips befinden. .

Lösung

Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge n = 1 000 mit der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,04.

X beschreibt die Anzahl der defekten Computerchips.

Berechnung mithilfe der Binomialverteilung (mit CAS):

X ist binomialverteit: $P(30 < X < 50) = P(X \leq 49) - P(X \leq 30)$

$P(30 < X < 50) \approx 0{,}9337 - 0{,}0580 = 0{,}8757$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 0,8757.

Berechnung unter der Annahme, dass X näherungsweise normalverteilt ist.

Erwartungswert: $\mu = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}04 = 40$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96} = \sqrt{38{,}4} \approx 6{,}20 > 3$

X ist normalverteit: $P(31 \leq X \leq 49) \approx \int_{31}^{49} \varphi(x)\,dx \approx 0{,}8534$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 0,8534.
Die Abweichung der beiden Wahrscheinlichkeiten ist gering.
Die Binomialverteilung lässt sich durch die Normalverteilung annähern.

Näherungsformel von De Moivre-Laplace

Für eine binomialverteilte Zufallsvariable X mit dem Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)}$ gilt für große Werte von n:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) \approx \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx$$

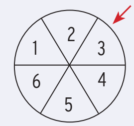
X ist näherungsweise normalverteilt.

Bemerkung: Der Begriff „für große n" ist nicht eindeutig.
Als Faustregel ist eine Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung dann zulässig, wenn für n gilt:
$\sigma^2 = n \cdot p(1-p) > 9$ bzw. $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} > 3$ **(Laplace-Bedingung)**

Verbesserung Seite 239

Beispiel 2

Das nebenstehende Glücksrad wird 50-mal gedreht. Eine Drehung ist beendet, wenn das Rad stillsteht, wobei ein fester Pfeil auf einen Sektor zeigt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler mehr als 11- und weniger als 21-mal eine ungerade Zahl erhält.



Lösung

X beschreibt die Anzahl der Drehungen, bei denen der Pfeil auf eine ungerade Zahl zeigt.
Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge n = 50 mit der Wahrscheinlichkeit p = 0,5.
Berechung mithilfe der Binomialverteilung (mit CAS oder mit Tabelle)

X ist binomialverteilt: $P(12 \leq X \leq 20) \approx 0{,}1013$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,1013.

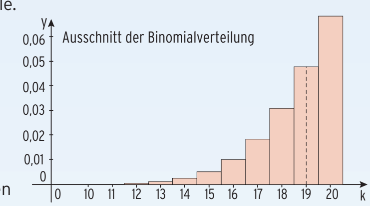
Näherungsweise Berechnung mithilfe der Normalverteilung

$\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}5 = 25$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{50 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} \approx 3{,}54 > 3$

X ist normalverteilt: $P(12 \leq X \leq 20) \approx \int_{12}^{20} \varphi(x)\,dx \approx 0{,}0788$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 0,0788.
Dieses Ergebnis weicht von dem der Binomialverteilung ab.

Erläuterung des Unterschieds
Bei der Normalverteilung hat man die Grenzen x = 12 und x = 20 verwendet. Es handelt sich bei der Binomialverteilung jedoch um eine diskrete Zufallsvariable und bei der Normalverteilung um eine stetige Zufallsvariable.



Die Abbildung zeigt, dass bei einer Intervallbreite von 1, für 12 Treffer das Intervall 12 bei 11,5 anfängt. Für 20 Treffer hört das Intervall 20 bei 20,5 auf.
Über die gesamte Intervallbreite hat eine diskrete Zufallsvariable (Binomialverteilung) den gleichen Wert. Bei einer stetigen Zufallsvariablen (Normalverteilung) ändert sich der Wert stetig. Um die Abweichung zu verringern, wird eine Stetigkeitskorrektur eingeführt.
In diesem Fall ist die Stetigkeitskorrektur 0,5.

Berechung mithilfe der Normalverteilung und der Stetigkeitskorrektur

$P(12 \leq X \leq 20) \approx \int_{11{,}5}^{20{,}5} \varphi(x)\,dx \approx 0{,}1018$

Mithilfe der Stetigkeitskorrektur ist der Unterschied zwischen den Wahrscheinlichkeiten für die binomialverteilte und die normalverteilte Zufallsvariable nur noch minimal.

Hinweis zu Beispiel 1: $P(31 \leq X \leq 49) \approx \int_{30{,}5}^{49{,}5} \varphi(x)\,dx \approx 0{,}8745$

Verbesserung Seite 240

Näherungsformel von De Moivre-Laplace mit Stetigkeitskorrektur

Für eine binomialverteilte Zufallsvariable X mit dem Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)}$ gilt für große Werte von n:

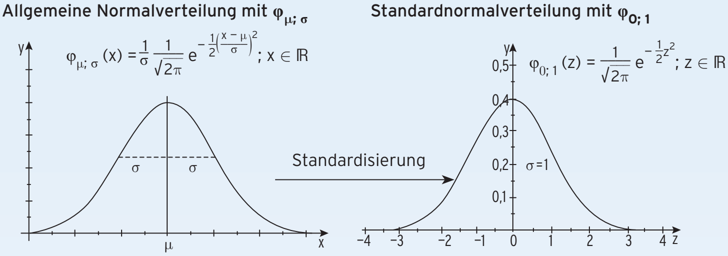
$$P(x_1 \leq X \leq x_2) \approx \int_{x_1-0,5}^{x_2+0,5} \varphi(x)\,dx$$

Hinweis: $P(X = k) \approx \int_{k-0,5}^{k+0,5} \varphi(x)\,dx \approx \varphi(k) \cdot 1 = \varphi(k)$ (n groß)

Formulierung der Näherungsformel mithilfe der Gaußschen Summenfunktion Φ

Ohne Taschenrechner war es zweckmäßig, die allgemeine Normalverteilung auf die Standardnormalverteilung zurückzuführen.
Die zugehörigen Funktionswerte sind in einer Tabelle aufgeführt.

Allgemeine Normalverteilung mit $\varphi_{\mu;\,\sigma}$ **Standardnormalverteilung mit $\varphi_{0;\,1}$**



Normalverteilung mit
Erwartungswert μ und
Standardabweichung σ

Standardnormalverteilung mit
Erwartungswert $\mu = 0$ und
Standardabweichung $\sigma = 1$

Das Schaubild der Normalverteilung kann durch Verschiebung und Streckung in das Schaubild der Standardnormalverteilung überführt werden.

Jedes mit μ und σ normalverteilte Merkmal X kann durch die lineare Transformation $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ in das standardnormalverteilte Merkmal Z überführt werden.

Durch Standardisierung geht das $N(\mu, \sigma)$-verteilte Merkmal X in das $N(0, 1)$-verteilte Merkmal Z über.