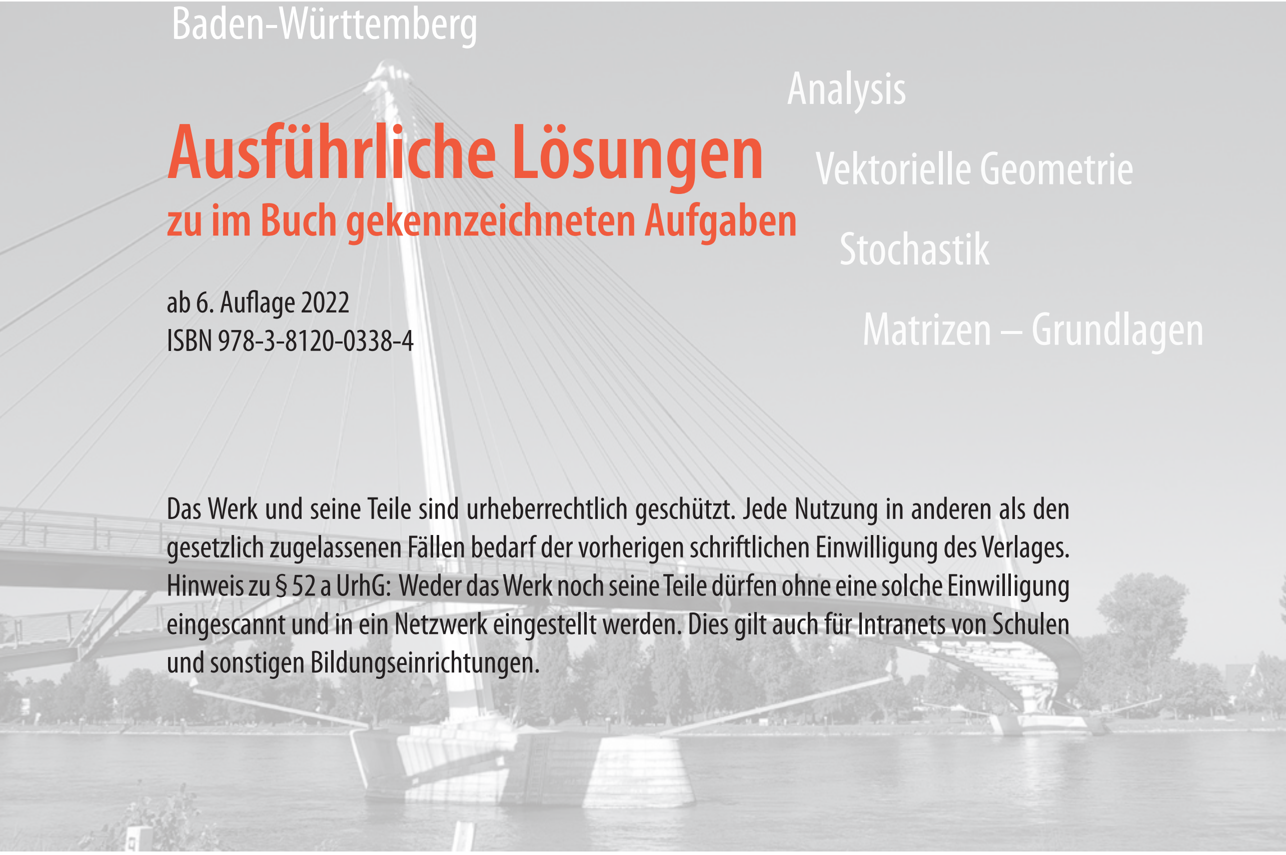
Bohner | Ott | Deusch | Rosner

Mathematik – Jahrgangsstufen 1 und 2
Erhöhtes und grundlegendes Anforderungsniveau

Berufliches Gymnasium



Baden-Württemberg

Analysis

Vektorielle Geometrie

Stochastik

Matrizen – Grundlagen

Ausführliche Lösungen
zu im Buch gekennzeichneten Aufgaben

ab 6. Auflage 2022
ISBN 978-3-8120-0338-4

Geogebra interaktiv

Lern- und Erklärvideos

Merkur Verlag Rinteln

Umschlag: © frhuynh - Fotolia.com

Lehrbuch Seite 29

1 $p = \frac{2\pi}{b}$

d) $|a| = 4$; $b = \pi$; $p = \frac{2\pi}{\pi} = 2$; $y = 3$

e) $|a| = 6$; $b = \frac{1}{2}$; $p = 4\pi$; $y = 3$

f) $|a| = 2$; $b = \frac{\pi}{2}$; $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$; $y = -3$

Lehrbuch Seite 40

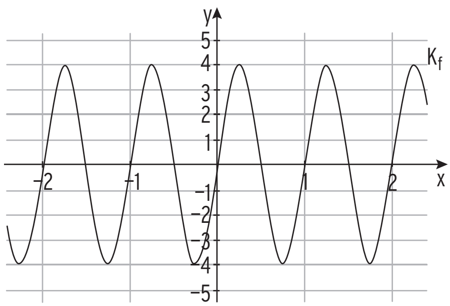
2 Ansatz mit Sinus, da ein Symmetriepunkt auf der y-Achse liegt.

$a = 4$

$b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

Keine Verschiebung in x-Richtung.

$f(x) = 4\sin(2\pi x)$

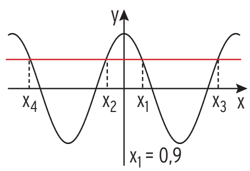


Lehrbuch Seite 50

8 a) $x_1 = 0{,}9$; $x_2 = -0{,}9$

$x_3 = x_2 + 2\pi = 5{,}38$

$x_4 = -x_3 = -5{,}38$

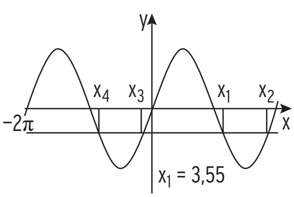


b) $x_1 = 3{,}55$; $x_2 = 2\pi - (3{,}55 - \pi) = 3\pi - 3{,}55 = 5{,}87$

$x_3 = 5{,}87 - 2\pi = -0{,}41$

$x_4 = 3{,}55 - 2\pi = -2{,}73$

oder: $x_4 = -2\pi + x_1 = -2\pi + 3{,}55 = -2{,}73$



Lehrbuch Seite 62

8 a) $g(x) = a \sin[b(x + c)] + d;\ x \in [0; 12]$

Bedeutung von a und d:

d ist der Jahresmittelwert: $d = \frac{1}{2}[17{,}5 + (-2{,}1)] = 7{,}7$

a ist die größte Abweichung vom Jahresmittelwert:

$a = \frac{1}{2}[17{,}5 - (-2{,}1)] = 9{,}8$

Bestimmung des Funktionsterms:

Die Periode ist 12: $b = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

Also $g(x) = 9{,}8 \sin\left[\frac{\pi}{6}(x + c)\right] + 7{,}7$

Punktprobe mit (3,5 | 8) ergibt: $8 = 9{,}8 \sin\left[\frac{\pi}{6}(3{,}5 + c)\right] + 7{,}7$

Lösung: $c = -3{,}44$ oder $c = 2{,}44$

Da im Sommer die höchsten Temperaturen auftreten, muss

$c = -3{,}44$ gewählt werden.

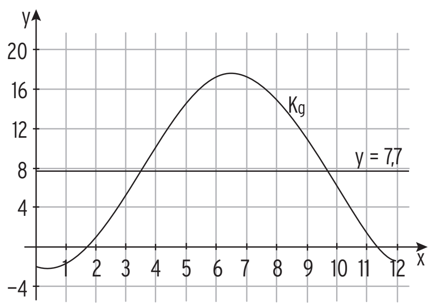
Ergebnis: $g(x) = 9{,}8 \sin\left[\frac{\pi}{6}(x - 3{,}44)\right] + 7{,}7$

Alternative: Lösung mit Regression ergibt

$g(x) = 9{,}9 \sin(0{,}51x - 1{,}78) + 7{,}66$

$g(x) = 9{,}9 \sin(0{,}51(x - \frac{1{,}78}{0{,}51})) + 7{,}66$

Dann gilt: $a = 9{,}9$; $b = 0{,}51$; $c = -\frac{1{,}78}{0{,}51} = -3{,}49$; $d = 7{,}66$



b) $f(x) = 9{,}7 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 9{,}4)\right] + 14{,}8;\ x \in [0; 24]$

Kleinste Tagestemperatur: $14{,}8 - 9{,}7 = 5{,}1$

Größte Tagestemperatur: $14{,}8 + 9{,}7 = 24{,}5$

Die Tagestemperatur schwankt zwischen 5,1° und 24,5°.

Lehrbuch Seite 79

3 a) Kurvengleichung: $y = e^{0,5x}$

Vertauschen von x und y: $x = e^{0,5y}$

Auflösen nach y: $\ln(x) = 0,5y \quad | \cdot 2$

$2\ln(x) = y$

h(x) ist der Term der Umkehrfunktion von f.

Definitionsbereich von f: $D_f = \mathbb{R}$

Wertebereich von f: $W_f = \mathbb{R}_+^*$

Definitionsbereich von h: $D_h = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_+^*$

Wertebereich von h: $W_h = \mathbb{R}$

Lehrbuch Seite 98

4 a) $f(x) = \frac{1}{7}x^3 + 3x - 5 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{7}x^2 + 3$ Konstanter Summand fällt weg.

b) $f(x) = \frac{1}{4}(8 - 2x^2) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}(-4x) = -x$ Konstanter Faktor $\frac{1}{4}$ bleibt erhalten.

$f(x) = \frac{1}{4}(8 - 2x^2) = 2 - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = -x$

c) $g(x) = xe^x \Rightarrow g'(x) = 1 \cdot e^x + xe^x = (x + 1)e^x$ (Produktregel)

$f(x) = x^2 + xe^x \Rightarrow f'(x) = 2x + (x + 1)e^x$

d) $f(x) = \sin(3x)e^{2x}$ Mithilfe der Produkt- und Kettenregel

$f'(x) = 3\cos(3x)e^{2x} + \sin(3x) \cdot 2e^{2x} = (3\cos(3x) + 2\sin(3x))e^{2x}$

e) $f(x) = e^{\sin(x)} \Rightarrow f'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$ (Kettenregel)

f) $g(x) = x^2e^{3x-5} \Rightarrow g'(x) = 2xe^{3x-5} + x^2e^{3x-5} \cdot 3 = (2x + 3x^2)e^{3x-5}$

$f(x) = 4x^2 + x^2e^{3x-5} \Rightarrow f'(x) = 8x + (2x + 3x^2)e^{3x-5}$

g) $f(x) = e^{4x}(x - x^2)$ mit der Produkt- und Kettenregel

$f'(x) = 4e^{4x}(x - x^2) + e^{4x}(1 - 2x) = e^{4x}(1 + 2x - 4x^2)$

h) $f(a) = e^a(e^{-a} + 3) = e^{a-a} + 3e^a = e^0 + 3e^a = 1 + 3e^a$

$f'(a) = 3e^a$ a ist die Funktionsvariable, nach der abgeleitet wird.

i) $f(u) = \frac{5}{u} + 2\sqrt{u} = 5u^{-1} + 2u^{0,5}$

$f'(u) = -5u^{-2} + 2 \cdot 0,5u^{-0,5} = -\frac{5}{u^2} + u^{-0,5}$

j) $f(x) = 5 + 3xe^{-ax}$

$f'(x) = 3e^{-ax} + 3xe^{-ax} \cdot (-a) = (3 - 3ax)e^{-ax} = 3(1 - ax)e^{-ax}$

k) $f(x) = \frac{t}{2}x^4 + 2tx^2 - \pi$

$f'(t) = 2tx^3 + 4tx$ Konstanter Summand π fällt weg.

l) $f(x) = e^{x^2} + e^x + e$

$f'(x) = 2xe^{x^2} + e^x$ Konstanter Summand e fällt weg.

Lehrbuch Seite 103

4 $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-3) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2$; $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$

a) Tangente in $W(1 \mid -\frac{1}{2})$: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

Punktprobe mit $P(3 \mid -2)$ ergibt eine wahre Aussage.

b) Stellen mit Steigung $\frac{9}{4}$

Bedingung: $f'(x) = \frac{9}{4}$ $\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{9}{4}$

Lösungen: $x_1 = 3$; $x_2 = -1$

Tangente in $x_1 = 3$: $y = \frac{9}{4}x - \frac{27}{4}$

Tangente in $x_2 = -1$: $y = \frac{9}{4}x + \frac{5}{4}$

c) Punkte mit waagrechter Tangente

Bedingung: $f'(x) = 0$

Stellen: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$

Punkte: $O(0 \mid 0)$; $E(2 \mid -1)$

d) Stellen mit Steigung 6

Bedingung: $f'(x) = 6$ $\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = 6$

Lösungen: $x_1 = 4$; $x_2 = -2$

Punkte: $P(4 \mid 4)$; $Q(-2 \mid -5)$

e) Stellen mit Steigung 18

Bedingung: $f'(x) = 18$ $\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = 18$

Lösungen: $x_1 = 6$; $x_2 = -4$

y-Werte berechnen: $f(6) = 27$; $f(-4) = -28$

$y = 18 \cdot 6 - 81 = 27$; $y = 18 \cdot (-4) - 81 = -153$

Der Punkt $B(6 \mid 27)$ liegt auf K und H. H ist eine Tangente an K.

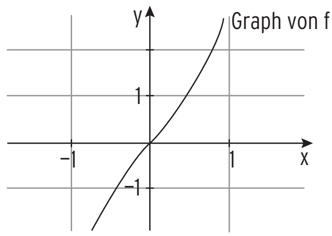
Lehrbuch Seite 109

5 a) $f'(x) > 1$

Die Steigung des Graphen von f ist größer als 1,

f ist streng monoton wachsend.

Z. B. $f(x) = x^3 + 2x$

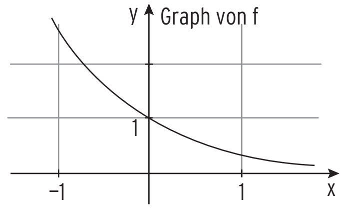


b) $f'(x) \leq 0$

f ist monoton fallend.

Z. B. $f(x) = e^{-x}$

der Graph von f kann z. B. auch eine Parallele zur x-Achse sein.



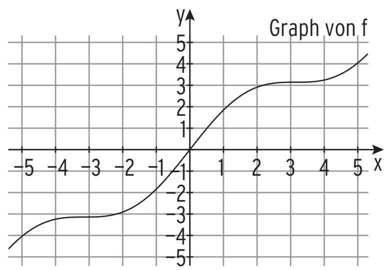
c) $f'(x) \in [0; 2]$

f ist (streng) monoton wachsend.

Steigungen zwischen 0 und 2

Z. B. $f(x) = x + \sin(x)$

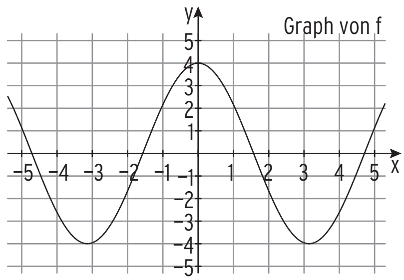
Waagrechte Tangente in $x = \pm\,\pi$



d) $f(x) \in [-4; 4]$

Funktionswerte zwischen − 4 und 4

Z. B. $f(x) = 4\cos(x)$



Lehrbuch Seite 116

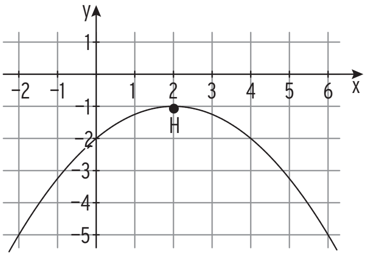
1 a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 2$

$f'(x) = -\frac{1}{2}x + 1;\ f''(x) = -\frac{1}{2} < 0$

Bedingung: $f'(x) = 0$ für $x_1 = 2$

$f''(2) < 0$

$H(2 \mid -1)$



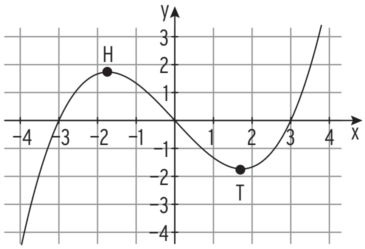
b) $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 9x)$

$f'(x) = \frac{1}{6}(3x^2 - 9);\ f''(x) = x$

Bedingung: $f'(x) = 0$ für $x_{1|2} = \pm\sqrt{3}$

$f''(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3} < 0;\ f''(\sqrt{3}) = \sqrt{3} > 0$

$H(-\sqrt{3} \mid \sqrt{3});\ T(\sqrt{3} \mid -\sqrt{3})$



c) $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5$

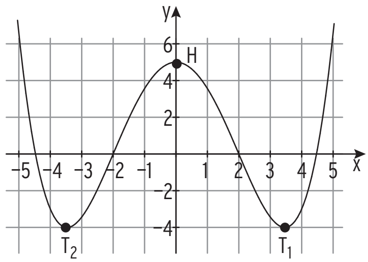
$f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x;\ f''(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$

Bedingung: $f'(x) = 0$ für $x_1 = 0;\ x_{2|3} = \pm\sqrt{12}$

$f''(0) = -3 < 0;\ f''(\pm\sqrt{12}) = 6 > 0$

$H(0 \mid 5)$

$T_1(\sqrt{12} \mid -4);\ T_2(-\sqrt{12} \mid -4)$



Lehrbuch Seite 116

1 d) $f(x) = -x - 2 + e^{0,5x}$

$f'(x) = -1 + 0,5e^{0,5x}$; $f''(x) = 0,25e^{0,5x} > 0$

Bedingung: $f'(x) = 0$ für $x_1 = 2\ln(2)$

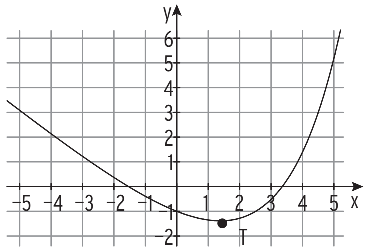
$f''(2\ln(2)) > 0$

Mit $e^{0,5 \cdot 2\ln(2)} = 2$ erhält man

$f(2\ln(2)) = -2\ln(2)$

Extrempunkt des Graphen von f:

Tiefpunkt $T(2\ln(2) \mid -2\ln(2))$



e) $f(x) = 2\sin(2x) + 1$; $x \in \,]-1; 4[$

$f'(x) = 4\cos(2x)$; $f'(x) = -8\sin(2x)$

Bedingung: $f'(x) = 0$

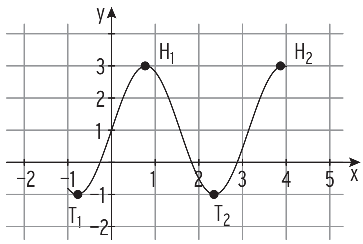
für $x_1 = -\frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{\pi}{4}$; $x_3 = \frac{3}{4}\pi$; $x_4 = \frac{5}{4}\pi$

$f''(x_{1|3}) > 0$; $f''(x_{2|4}) < 0$

Extrempunkte des Graphen von f:

$T_1(-\frac{\pi}{4} \mid -1)$; $H_1(\frac{\pi}{4} \mid 3)$

$T_2(\frac{3}{4}\pi \mid -1)$; $H_2(\frac{5}{4}\pi \mid 3)$



f) $f(x) = \frac{1}{x} + x$; $x \neq 0$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$; $f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^3}$

Bedingung: $f'(x) = 0$ für $x_{1|2} = \pm 1$

$-\frac{1}{x^2} + 1 = 0 \quad | \cdot x^2$

$-1 + x^2 = 0$

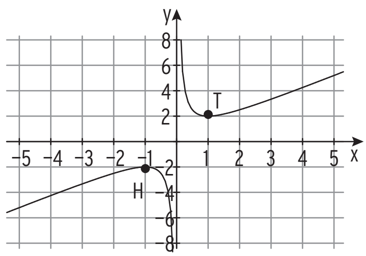
$x^2 = 1$

$x_{1|2} = \pm 1$

$f''(-1) = -2 < 0$; $f''(1) = 2 > 0$

$f(-1) = -2$; Hochpunkt $H(-1 \mid -2)$

$f(1) = 2$; Tiefpunkt $T(1|2)$



Lehrbuch Seite 117

16 $K(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + 10$

$K'(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$; $K''(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

$K'(x) = 0$ hat wegen $D = (\frac{3}{4})^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} < 0$ keine Lösung

$K'(0) = \frac{3}{2}$, also gilt $K'(x) > 0$ für $x > 0$: K ist monoton wachsend.

$K'(x)$ ist am geringsten,

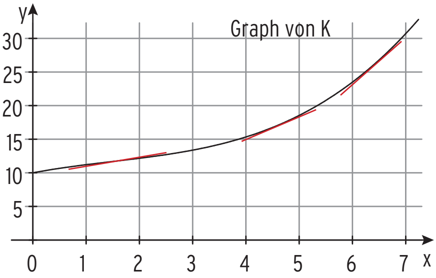
wenn $K''(x) = 0$: $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$

$x = \frac{3}{2}$

Produktionsmenge, bei der sich die Gesamtkosten am geringsten ändern:

$x = \frac{3}{2}$

Kostenänderung $K'(\frac{3}{2}) = \frac{15}{16}$



Lehrbuch Seite 124

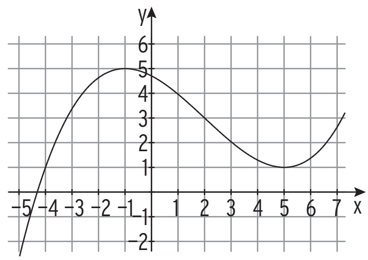
3 $f(x) = e^{-3x} + x + 2$; $f'(x) = -3e^{-3x} + 1$; $f''(x) = 9e^{-3x}$

$f''(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$

K ist eine Linkskurve. Maria hat Recht.

Lehrbuch Seite 125

18 Schaubild einer Polynomfunktion 3. Grades



Lehrbuch Seite 140

4 $f(x) = ax^3 + bx^2 + \frac{9}{2}x$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + \frac{9}{2}$

Waagrechte Tangente an der Stelle 1: $f'(1) = 0$	$3a + 2b + \frac{9}{2} = 0$
Waagrechte Tangente an der Stelle 3: $f'(3) = 0$	$27a + 6b + \frac{9}{2} = 0$
Lösung des linearen Gleichungssystems:	$a = \frac{1}{2}$; $b = -3$
Funktionsterm:	$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x$

A ist der Wendepunkt.

Lehrbuch Seite 140

7 Ziel: $f(x) = a\cos(b(x - c)) + d$

Start: $g(x) = \cos(bx)$

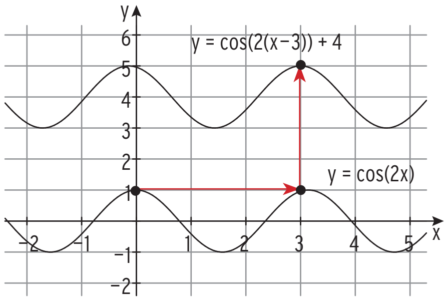
Periode $p = \pi$: $b = \frac{2\pi}{p} = 2$

Ansatz: $g(x) = \cos(bx)$ $g(x) = \cos(2x)$

Hochpunkt von G: $H(0 \mid 1)$

Verschiebt man G um 3 nach rechts und um 4 nach oben, so hat die verschobene Kurve den Hochpunkt $H(3 \mid 5)$.

Funktionsterm: $f(x) = \cos(2(x - 3)) + 4$



Alternative:

mit dem Ansatz: $g(x) = \sin(2x)$

Hochpunkt von G: $H(\frac{\pi}{4} \mid 1)$

Verschiebt man G um $3 - \frac{\pi}{4}$ nach rechts und um 4 nach oben, so hat die verschobene Kurve den Hochpunkt $H(3 \mid 5)$.

Funktionsterm: $f(x) = \sin(2(x - (3 - \frac{\pi}{4}))) + 4$

Lehrbuch Seite 150

4 $f(t) = a\,te^{bt}$

Bedingungen: $f(2) = 33{,}8 \qquad 2ae^{2b} = 33{,}8$ (1)

$f(4) = 24{,}9 \qquad 4ae^{4b} = 24{,}9$ (2)

Aus (1): $e^{2b} = \frac{16{,}9}{a}$ **Hinweis:** $e^{4b} = (e^{2b})^2 = (\frac{16{,}9}{a})^2$

in (2): $4a(\frac{16{,}9}{a})^2 = 24{,}9$

$\frac{1142{,}44}{a} = 24{,}9 \Rightarrow a = 45{,}88$

Aus $e^{2b} = \frac{16{,}9}{45{,}88} \Rightarrow b = -\,0{,}5$

$f(t) = 45{,}88\,te^{-\,0{,}5t}$; $f'(t) = e^{-\,0{,}5t}(-\,22{,}94t + 45{,}88)$

$f'(t) = 0$ für $t = 2$

$f(0) = 0$; $f(t) \to 0$ für $t \to \infty \quad \Rightarrow t = 2$ ist Maximalstelle

Die Behauptung stimmt.

Lehrbuch Seite 151

7 a) $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$; Schaubild verläuft durch O(0 | 0): $d = 0$

$s'(x) = 3at^2 + 2bt + c$; $s''(x) = 6at + 2b$

$s'(0) = v(0) = 0$: $c = 0$

$s''(0) = 3$: $2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$

$s''(7{,}5) = 0$: $45a + 2b = 0$

Mit $b = \frac{3}{2}$ erhält man: $45a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{15}$

$s(t) = -\frac{1}{15}t^3 + \frac{3}{2}t^2$

$s'(t) = v(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 3t$; $s''(t) = a(t) = -\frac{2}{5}t + 3$

b) Die Geschwindigkeit nimmt zu bis $s''(t) = a(t) = 0$

$-\frac{2}{5}t + 3 = 0$

$t = 7{,}5$

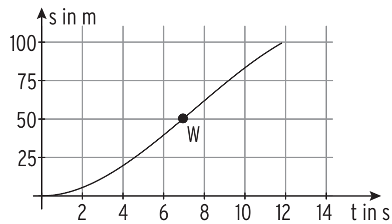
Für $t < 7{,}5$ nimmt die Geschwindigkeit zu:

Beschleunigung: $a(t) = s''(t) > 0$ (Wendestelle $t = 7{,}5$)

c) Laufzeit $s(t) = 100$ für $t = 11{,}89$ (s)

mit Hilfsmittel oder mit einer

verfeinerten Wertetabelle im WTR



d) Mittlere Geschwindigkeit: $v = \frac{100}{11{,}9} = 8{,}4$

Größte Geschwindigkeit: $v'(t) = s''(t) = 0$

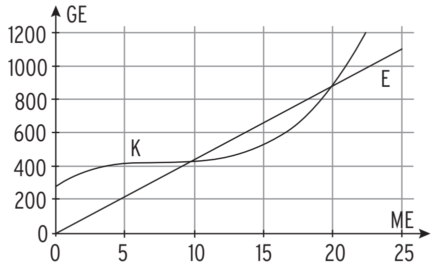
$t = 7{,}5$

$v_{max} = v(7{,}5) = 11{,}25$

Die größte Geschwindigkeit nach 7,5 s ist 11,25 $\frac{m}{s}$.

Lehrbuch Seite 152

9 a) Zeichnung: $E(x) = 44x$



b) Gewinnfunktion G:

$G(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 6x^2 - 6x - 280$

$G(6) = -154$; Verlust

$G(20) = 0$ Kostendeckung

$G'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 12x - 6$; $G''(x) = -\frac{3}{2}x + 12$

Maximaler Gewinn

Bedingung: $G'(x) = 0$ $\quad -\frac{3}{4}x^2 + 12x - 6 = 0$

$x_1 = 15{,}48$; $x_2 = 0{,}52$

Nachweis: $G''(15{,}48) < 0$; $G''(0{,}52) > 0$

Der maximale Gewinn liegt bei 15,48 ME und beträgt 137,53 GE.

c) $\frac{K(15) - K(10)}{5} = \frac{93{,}75}{5} = 18{,}75$

Die durchschnittliche Zunahme der Kosten beträgt 18,75 GE pro ME.

d) Minimaler Kostenzuwachs: $\quad K''(x) = 0$

$x = 8$

$K'(8) = 2$

Die Stelle mit minimalem Kostenzuwachs ist die Wendestelle.

Wird die Produktion von 8 ME auf 9 ME erhöht, so beträgt

der Kostenzuwachs 2 GE/ME.

Lehrbuch Seite 158

5 Abstand: $d(x) = 0{,}021x^2 - 1{,}072x + 25 - 0{,}2x$

Zielfunktion: $d(x) = 0{,}021x^2 - 1{,}272x + 25;\ 0 \leq x < 70$

Untersuchung von d auf ein Minimum

Ableitung: $d'(x) = 0{,}042x - 1{,}272$

Notwendige Bedingung: $d'(x) = 0 \quad 0{,}042x - 1{,}272 = 0$

$x = 30{,}3 \in [0; 70[$

Nachweis: Das Schaubild von d ist eine nach oben geöffnete Parabel.

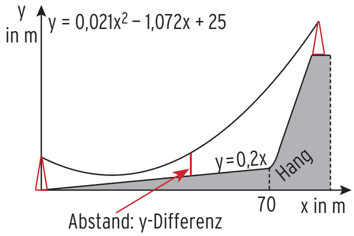
d besitzt somit bei x = 30,3 ein globales (absolutes) Minimum.

d wird minimal für x = 30,3.

Minimaler Abstand: d(30,3) = 5,7

Der minimale Abstand beträgt 5,7 m,

die Vorschrift wird eingehalten.



Lehrbuch Seite 166

2 a) $F(x) = x + \frac{5}{2}\cos(x) + C$ Ein konstanter Summand fällt beim Ableiten weg.

b) $F(x) = -2\sin(x) - \frac{1}{3}x^3 + C$

c) $F(x) = tx - t^2\cos(x) + C$ t und t^2 werden wie Zahlen behandelt

d) $F(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2}e^x + C$

e) $F(x) = t(e^x - x) + C$ $t(e^x - x)$ muss nicht ausmultipliziert werden.

f) $F(x) = -\frac{1}{72}tx^4 - \sin(x) + C$ Der Parameter t ist eine konstante reelle Zahl.

g) $F(x) = (t + 1) \cdot (-\cos(x) - 0{,}5x^2) + C = -(t + 1) \cdot (\cos(x) + 0{,}5x^2) + C$

h) $F(x) = -4e^x - \frac{1}{4}x^2 + 4x + C$

i) $F(x) = -(\frac{2}{3}e^x - 3x) + c = -\frac{2}{3}e^x + 3x + C$

j) $F(x) = e \cdot e^x + \frac{e}{2}x^2 + C$ e ist eine konstante Zahl; e = 2,718...

k) $F(x) = e^x(1 - e) + C$ $(1 - e)$ ist ein konstanter Faktor

l) $F(x) = ae^x + bx + C$

Lehrbuch Seite 169

5 Stammfunktion von f: $F(x) = -2x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x + C$

Punktprobe mit A(− 1 | 2): $2 = -2(-1)^4 + \frac{1}{3}(-1)^3 - 3(-1) + C$

$(-1)^4 = 1$; $(-1)^3 = -1$ $2 = -2 - \frac{1}{3} + 3 + C$

$C = \frac{4}{3}$

Stammfunktion von f: $F(x) = -2x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x + \frac{4}{3}$

Lehrbuch Seite 173

6 Nullstelle von f mit VZW ist Extremstelle von F

x = 0: Minimalstelle von F

x = 3: Maximalstelle von F

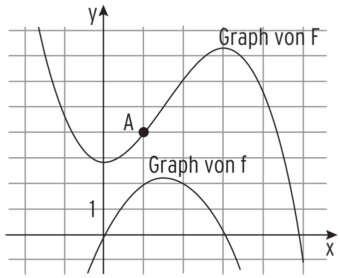
in x = 1,5 hat der Graph von F die größte

Steigung: 2,25

Ein Schaubild einer Stammfunktion

zeichnen und so nach oben verschieben,

dass es durch A(1 I 4) verläuft.



Lehrbuch Seite 180

1 a) $\int_{-1}^{2}(-x^2-2x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-2}^{a} = -\frac{1}{3}a^3 - a^2 + \frac{4}{3} = 7{,}5$

b) $\int_{0}^{4}(-2x^3+\sin(2x))dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}\cos(2x)\right]_{0}^{4} = -127{,}4$

c) $\int_{0}^{-1}(3x+\frac{5}{2}e^{-x})dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}e^{-x}\right]_{0}^{-1} = -2{,}80$

d) $\int_{1}^{6}(-3\cos(\frac{\pi}{4}x))dx = \left[-\frac{12}{\pi}\sin(\frac{\pi}{4}x)\right]_{1}^{6} = 6{,}52$

e) $\int_{-2}^{2}(0{,}25x^3+x)dx = \left[\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{2} = 0$

f) $\int_{0}^{\frac{2}{3}\pi}(\sin(3x))dx = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right]_{0}^{\frac{2}{3}\pi} = 0$

g) $\int_{-1}^{4}(ax+x^3)dx = \left[\frac{a}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{4} = 7{,}5a + 63{,}75$

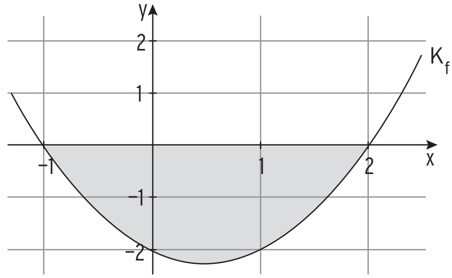
h) $\int_{-2}^{x}(u^4 - \frac{1}{4}u^2)\,du = \left[\frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{12}u^3\right]_{-2}^{x} = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{86}{15}$

i) $\int_{-1}^{2}(\frac{x^4}{4} - \frac{x}{3}x)\,dx = \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^2\right]_{-1}^{2} = \frac{23}{20}$

Lehrbuch Seite 188

1 a) Nullstellen: – 1; 2

Skizze:



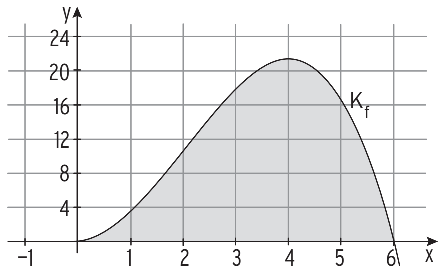
$f(x) = (x - 2)(x + 1) = x^2 - x - 2$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$\int_{-1}^{2} f(x)dx = -\frac{9}{2}$; $A = \frac{9}{2}$

b) Nullstellen: 0; 6

Skizze:



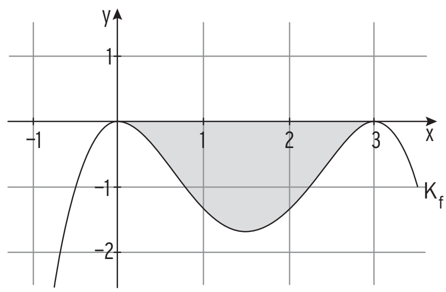
$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2$

$F(x) = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{4}{3}x^3$

$\int_{0}^{6} f(x)dx = 72$

c) Nullstellen: 0; 3

Skizze:



$f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + 2x^3 - 3x^2$

$F(x) = -\frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - x^3$

$\int_{0}^{3} f(x)dx = -\frac{27}{10}$

$A = \frac{27}{10}$

Lehrbuch Seite 190

14 Giebelrand: $f(x) = \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4;\ x \in [-4; 4]$

$$2\int_0^4 f(x)dx = f(x) = \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4 = 2\left[\frac{1}{320}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + 4x\right]_0^4 = 17{,}07$$

Farbverbrauch: $350 \cdot 17{,}07 = 5974{,}5;$

$2 \cdot 5974{,}5\ \text{cm}^3 = 11{,}949$ Liter

Es müssen mindestens 3 Dosen Farbe geliefert werden.

Lehrbuch Seite 205

1 $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$; $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$; $f''(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$; $f'''(x) = \frac{3}{4} \neq 0$

a) Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $\quad x = 2$

Mit $f(2) = 2$; $f'(2) = -\frac{3}{2}$ und $f'''(x) = \frac{3}{4} \neq 0$ erhält man den

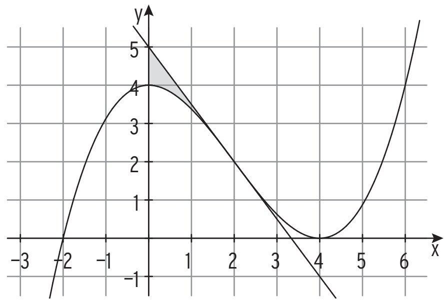
Wendepunkt $W(2 \mid 2)$ und die Wendetangente mit $y = -\frac{3}{2}x + 5$

Fläche zwischen Wendetangente

und y-Achse:

$\int_0^2 (-\frac{3}{2}x + 5 - f(x))dx = \frac{1}{2}$

$A = \frac{1}{2}$



b) $U(-2 \mid 0)$; $V(6 \mid 4)$ sind Kurvenpunkte.

Gerade g durch U und V: $g(x) = 0{,}5x + 1$

K und g schneiden sich in U, V und

im Wendepunkt

Schnittstellen: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; $x_3 = 6$

(aus der gegebenen Zeichnung zu

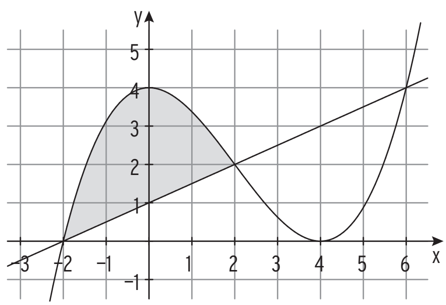
entnehmen)

Fläche zwischen K und der Geraden

im 1.und 2. Feld:

$\int_{-2}^{2} (f(x) - (\frac{1}{2}x + 1))dx = 8$

$A = 8$



c) Dreiecksfläche: $A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$

$\int_2^4 f(x)dx = 1{,}5$; $A = 4 + 1{,}5 = 5{,}5$

Lehrbuch Seite 206

9 K: $f(x) = 4xe^{-0,2x}$; $x \in [5; 30]$

G: $g(x) = 20e^{-0,2x}$; $x \in [5; 30]$

F mit $F(x) = (-20x - 100)e^{-0,2x}$ ist eine Stammfunktion von f, da $F'(x) = f(x)$

Mit der Produkt- und der Kettenregel:

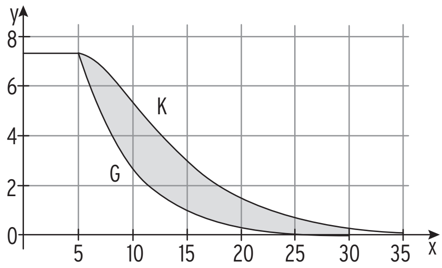
$F'(x) = -0,2(-20x - 100)e^{-0,2x} - 20e^{-0,2x} = 4xe^{-0,2x} = f(x)$

Inhalt der Fläche zwischen K und G und x = 30:

$\int_5^{30} 4xe^{-0,2x}\,dx = 71,84$

(Stammfunktion F ist bekannt)

$\int_5^{30} 20e^{-0,2x}\,dx = 36,54$



Gesamtfläche in m^2:

$71,84 - 36,54 = 35,3$

Aufschüttungsvolumen:

$V = 35,3\ m^2 \cdot 12\ m = 423,6\ m^3$

Lehrbuch Seite 209

1 a) Bei gefüllter Rinne steht das Wasser 8 dm hoch.

Fläche zwischen Gerade (y = 8) und K:

$\int_{-4}^{4}(8 - f(x))dx = 34{,}13$; $A = 34{,}13$

Der Wasserquerschnitt ist etwa 34 dm^2 groß.

b) Höhe 3,5: Bedingung: f(x) = 3,5 $\quad -\frac{1}{32}x^4 + x^2 = 3{,}5$

Durch Substitution $x^2 = u$ erhält man: $\quad -\frac{1}{32}u^2 + u - 3{,}5 = 0$

$u^2 - 32u + 112 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung: $\quad u = 4; u = 28$

Lösungen in x: $\quad x_{1|2} = \pm 2; x_{3|4} = \pm 5{,}29$

Hinweis: $x_{3|4} = \pm 5{,}29$ ist nicht relevant.

Fläche zwischen Gerade (y = 3,5) und K: $\quad \int_{-2}^{2}(3{,}5 - f(x))dx = 9{,}07$

Der kleine Querschnitt beträgt $\frac{9{,}07}{34{,}13} = 26{,}6$ % des maximalen Querschnitts.

Es fließen also 26,6 % der maximalen Wassermenge.

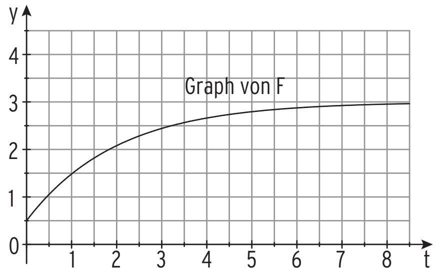
Lehrbuch Seite 215

1 a) Schaubild einer Stammfunktion F mit F(0) = 0,5

Integral über die Geschwindigkeit liefert die im Zeitraum [a; b] erreichte Höhe:

$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$

Stammfunktion $F(t) = -2{,}5e^{-0{,}5t} + 3$ mit $F(0) = 0{,}5$



b) $\int_0^1 v(t)dt$ Höhenzuwachs im 1. Jahr

$\int_1^4 v(t)dt$ Höhenzuwachs vom 1. bis zum 4. Jahr

$0{,}5 + \int_0^4 v(t)dt$ Höhe nach 4 Jahren

Lehrbuch Seite 217

10 Entnahmegeschwindigkeit in m^3 pro Stunde: $f(x) = 24x - x^2;\ 0 \leq x \leq 24$

a) Integral über die Entnahmegeschwindigkeit liefert das entnommene Volumen; vgl. auch die Einheiten: $\frac{m^3}{\text{Stunde}} \cdot \text{Stunde} = m^3$

Stammfunktion von f: $F(x) = 12x^2 - \frac{1}{3}x^3$

$$\int_2^3 f(x)dx = 53{,}67$$

Zwischen 2 Uhr und 3 Uhr werden dem Speicher 53,67 m^3 Wasser entnommen.

b) $800 - \int_2^3 f(x)dx = 541{,}67$

Im Wasserspeicher sind nach 5 Stunden noch 541,67 m^3 Wasser.

Lehrbuch Seite 220

3 Die Fläche A rotiert um die x-Achse.

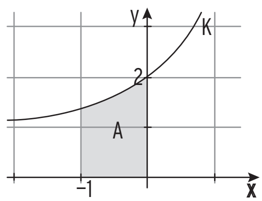
$(f(x))^2 = (e^x + 1)^2 = e^{2x} + 2e^x + 1$

Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x$

Volumen:

$$\pi\int_{-1}^{0}(f(x))^2dx = \pi\int_{-1}^{0}(e^{2x} + 2e^x + 1)dx = 8{,}47$$

V = 8,47



Lehrbuch Seite 228

1 a)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \end{array} \quad \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \quad \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & 23 \end{array}\right) \quad \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 20 & 80 \end{array}\right)$$

Dreiecksform

Letzte Gleichung: $20x_3 = 80$

$x_3 = 4$

Einsetzen von $x_3 = 4$ in die zweite Gleichung $3x_2 + 5x_3 = 11$: $3x_2 + 5 \cdot 4 = 11$

$x_2 = -3$

Einsetzen von $x_3 = 4$ und $x_2 = -3$ in die erste Gleichung $2x_1 + x_2 - x_3 = -3$: $2x_1 - 3 - 4 = -3$

$x_1 = 2$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array} \quad \cdot(-3) \quad \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 4 & 6 & 11 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Letzte Gleichung: $-2x_3 = -5 \Rightarrow x_3 = 2{,}5$

Einsetzen von $x_3 = 2{,}5$ ergibt: $-4x_2 - 8 \cdot 2{,}5 = -16 \Rightarrow x_2 = -1$

Einsetzen von $x_3 = 2{,}5$ und $x_2 = -1$: $x_1 - 1 + 2 \cdot 2{,}5 = 5 \Rightarrow x_1 = 1$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 229

7 Es können x_1 ME an W_1, x_2 ME an W_2 und x_3 ME an W_3 hergestellt werden.

	W_1	W_2	W_3
T_1	3	1	2
T_2	0	4	1
T_3	1	0	3

Gleichungen

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 448 \\ 4x_2 + x_3 &= 442 \\ x_1 + 3x_3 &= 330 \end{aligned}$$

LGS in Matrixschreibweise

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 1 & 0 & 3 & 330 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 0 & 1 & -7 & -542 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 0 & 0 & 29 & 2610 \end{array}\right)$$

Ergebnis: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 60 \\ 88 \\ 90 \end{pmatrix}$

Es können 60 ME an W_1, 88 ME an W_2 und 90 ME an W_3 hergestellt werden.

Lehrbuch Seite 237

2 c)

$$\begin{array}{ccc}x_1 & x_2 & x_3\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \quad :2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} :(-3) \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} + \\ :2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

Aus der 2. Zeile: $-4x_2 - 8x_3 = 1$

Wir wählen z. B. $x_3 = r$, $r \in \mathbb{R}$ (x_3 ist frei wählbar).

Durch Einsetzen berechnet man x_2 in

Abhängigkeit von r: $-4x_2 - 8r = 1$

$x_2 = -0{,}25 - 2r$

Einsetzen in $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ ergibt: $x_1 + 2 \cdot (-0{,}25 - 2r) + 3r = 0$

$x_1 = 0{,}5 + r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 + r \\ -0{,}25 - 2r \\ r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

Lösungsmenge: $L = \{ \vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 + r \\ -0{,}25 - 2r \\ r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}\}$

Lehrbuch Seite 237

2 d)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 1 & 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 12 \end{array}\right) \end{array} \quad + \cdot (-2) \quad + \cdot (-2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 0 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad + \cdot (-5)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 0 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

Aus der 2. Zeile: $5x_2 - 15x_3 = 5$

Wir wählen z. B. $x_3 = r$, $r \in \mathbb{R}$ (x_3 ist frei wählbar).

x_2 in Abhängigkeit von r: $5x_2 - 15r = 5$

$x_2 = 1 + 3r$

Einsetzen in $2x_1 + 5x_2 - x_3 = 25$ ergibt: $2x_1 + 5 \cdot (1 + 3r) - r = 25$

$x_1 = 10 - 7r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 - 7r \\ 1 + 3r \\ r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

Lösungsmenge: $L = \{ \vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 - 7r \\ 1 + 3r \\ r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}\}$

Lehrbuch Seite 238

8 $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -9 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

$x_3 = r,\ r \in \mathbb{R}$ (frei wählbar): $x_2 + 3r = 2$

x_2 in Abhängigkeit von r: $x_2 = 2 - 3r$

x_1 berechnen: $2x_1 - (2 - 3r) + r = -2$

$x_1 = -2r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r \\ 2 - 3r \\ r \end{pmatrix}$

Vergleich der Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r \\ 2 - 3r \\ r \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen ergibt: $\begin{pmatrix} -2r \\ 2 - 3r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad r = 7{,}5;\ r = 8;\ r = 8$

Es gibt kein r, so dass alle drei Gleichungen erfüllt sind.

Der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist kein Lösungsvektor.

Gleichung: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$x_1 = -2r;\ x_2 = 2 - 3r;\ x_3 = r$: $-2r + 2 - 3r + r = 1$

$r = 0{,}25$

Lehrbuch Seite 246

1 a) Aufpunkt: $A(-3 \mid 2 \mid 1)$

Richtungsvektor: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Geradengleichung von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

b) Aufpunkt: $A(0 \mid 0 \mid 3)$

Richtungsvektor: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Geradengleichung von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

c) Aufpunkt: $A(5 \mid 0 \mid 0)$

Richtungsvektor: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Geradengleichung von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

Lehrbuch Seite 246

7 Gerade h durch A und B: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$$

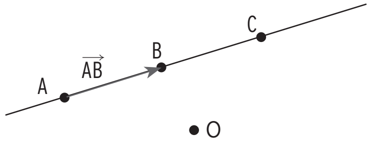
Probe mit C(5 | 0 | 8): $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

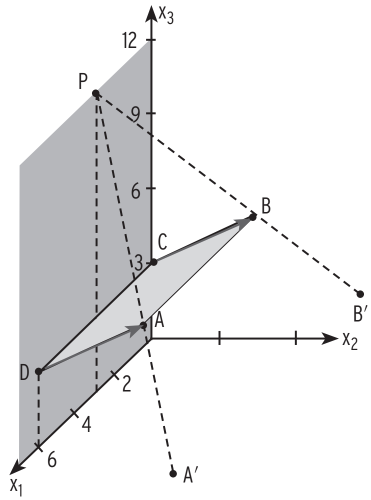
Für r = 2 ist die Gleichung erfüllt.

C liegt wegen r = 2 nicht zwischen A und B (nicht auf der Strecke AB).

Für $0 \leq r \leq 1$ erhält man Punkte auf der Strecke AB.



Lehrbuch Seite 250



8 $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Punkt A(6 | 3 | 7)

$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Punkt B(0 | 3 | 7)

Lichtquelle: P(3 | 0 | 12)

Gerade durch P(3 | 0 | 12) und A(6 | 3 | 7)

g_{AP}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

Der Punkt A′ liegt in der x_1x_2-Ebene, d. h. $x_3 = 0$.

A′ ist der Spurpunkt der Geraden g_{AP} mit der x_1x_2-Ebene.

$x_3 = 0$: $\quad 12 - 5r = 0$

$\quad r = 2{,}4$

$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + 2{,}4 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10{,}2 \\ 7{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}$

S_{12} (10,2 | 7,2 | 0) = A′

Gerade durch P(3 | 0 | 12) und B(0 | 3 | 7)

g_{BP}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$

B′ ist der Spurpunkt der Geraden g_{BP} mit der x_1x_2-Ebene.

$x_3 = 0$: $\quad 12 + 5r = 0$

$\quad r = -2{,}4$

$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} - 2{,}4 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}2 \\ 7{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}$

S_{12} (− 4,2 | 7,2 | 0) = B′

Lehrbuch Seite 256

1 a) Die Richtungsvektoren von g und h sind nicht parallel (nicht kollinear).

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

g und h schneiden sich in einem Punkt oder sind windschief.

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$r\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösen des Gleichungssystems: $\begin{array}{cc} r & s \\ \end{array}$ $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Das LGS ist damit eindeutig lösbar, somit schneiden sich die Geraden g und h in genau einem Punkt S.

Auflösung ergibt: $s = -1$ und $r = 2$

Ortsvektor des Schnittpunktes: $\vec{x} = \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt: $S(-5 \mid 2 \mid 3)$

b) Die Richtungsvektoren von g und h sind parallel (kollinear).

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Man überprüft, ob der Aufpunkt $P(4 \mid 5 \mid 1)$ von g auf der Geraden h liegt.

Punktprobe: $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} s = -3 \\ s = 1{,}5 \\ s = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Es gibt kein s, sodass alle drei Gleichungen erfüllt sind.

Die Geraden g und h sind parallel und verschieden (echt parallel).

Lehrbuch Seite 256

1 c) Die Richtungsvektoren von g und g sind parallel (kollinear).

$$\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\2{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$$

g und h können echt parallel oder identisch sein.

Man überprüft, ob der Aufpunkt P(2 | − 5 | 1) von g auf der Geraden h liegt.

Punktprobe: $\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-15\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\2{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}8\\10\\2\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}2\\2{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}s = 4\\ s = 4\\ s = 4\end{matrix}$$

Es gibt ein s, sodass alle drei Gleichungen erfüllt sind.

Die Geraden g und h sind identisch.

d) Die Richtungsvektoren von g und h sind nicht parallel (nicht kollinear).

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \neq k\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

g und h schneiden sich in einem Punkt oder sind windschief.

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$$r\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix}$$

Lösen des Gleichungssystems für r und s:

$$\left(\begin{array}{cc|c}-1 & -2 & -6\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}-1 & -2 & -6\\ 0 & -3 & -12\\ 0 & -1 & -3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}-1 & -2 & -6\\ 0 & -3 & -12\\ 0 & 0 & -3\end{array}\right)$$

Das LGS ist damit unlösbar. g und h schneiden sich nicht.

g und h sind nicht parallel und schneiden sich nicht. Sie sind windschief.

Lehrbuch Seite 257

9 a) Die Richtungsvektoren sind parallel: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ $t = 2$

$t = 2$ einsetzen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ $1 = 2a$
$0 = 2b$

Dies ist erfüllt für $a = 0{,}5$ und $b = 0$.

Für $a = 0{,}5$ und $b = 0$ ist g_2 parallel zu g_1.

g_1 liegt in der x_1x_2-Ebene.

Der Aufpunkt A(0 | 0 | 1) von g_2 liegt aber nicht in der x_1x_2-Ebene.

$g_1 = g_2$ ist nicht möglich.

b) Punktprobe mit P(8 | 3 | 0): $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ $8 = s$
$3 = sa$
$-1 = sb$

$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$

Mit $s = 8$ erhält man $a = \frac{3}{8}$ und $b = -\frac{1}{8}$.

Lehrbuch Seite 259

2 a) Gerade g_{LA} durch L und A: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

Gerade g_{LB} durch L und B: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$

Die beiden Lichtpunkte auf dem Schirm sind die Spurpunkte der Geraden g_{LA} und g_{LB} in der x_1x_2-Ebene. Die x_3-Koordinaten haben jeweils den Wert 0.

Für g_{LA} erhält man $0 = 12 - 9r \Leftrightarrow r = \frac{4}{3}$. Somit ergibt sich $P(10 \mid \frac{5}{3} \mid 0)$.

Für g_{LB} erhält man $0 = 12 - 8s \Leftrightarrow s = \frac{3}{2}$. Somit ergibt sich $Q(\frac{1}{2} \mid 6 \mid 0)$.

b) Mittelpunkt der Strecke PQ: $\vec{m} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 10 \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{21}{4} \\ \frac{23}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$, also $M(\frac{21}{4} \mid \frac{23}{6} \mid 0)$

Gerade durch A und B mit der Geraden durch L und M schneiden:

$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{13}{4} \\ \frac{5}{6} \\ -12 \end{pmatrix}$ ergibt: $r = \frac{9}{17}$ und $s = \frac{12}{17}$

r einsetzen ergibt den gesuchten Punkt $S(\frac{73}{17} \mid \frac{61}{17} \mid \frac{60}{17})$.

c) L_h kann abgesenkt werden, bis das Dreieck ABL_h rechtwinklig ist bei L_h.

Bedingung: $\overrightarrow{L_hA} \cdot \overrightarrow{L_hB} = 0$ $\qquad \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3-h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4-h \end{pmatrix} = 0$

$4 - 7h + h^2 = 0$

Lösungen der quadratischen Gleichung: $h_1 = 6{,}37$; $h_2 = 0{,}63$

Für $h_2 = 0{,}63$ (Höhe über der x_1x_2-Ebene) würde sich die Laserquelle unterhalb der Folie befinden, also entfällt diese Lösung.

Der Laser darf also nicht unter eine Höhe von etwa 6,4 abgesenkt werden.

Lehrbuch Seite 268

2 a) $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ $\qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \overrightarrow{OC} + r\overrightarrow{CB} + s\overrightarrow{CA}$ $\qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$

$\vec{x} = r\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OC}$ $\qquad \vec{x} = r\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = r\overrightarrow{CB} + s\overrightarrow{OC}$ $\qquad \vec{x} = r\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

7 a) Die Geraden g und h sind parallel, da der Richtungsvektor von g ein Vielfaches des Richtungsvektors von h ist. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Punktprobe: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$

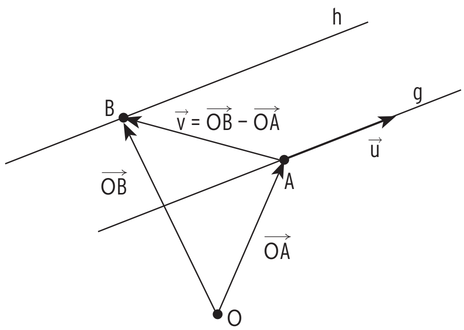
Das LGS ist unlösbar. Die Geraden g und h schneiden sich nicht.

Die Geraden g und h sind parallel und verschieden (echt parallel).

b) Die Ebene E ist bestimmt durch den Aufpunkt A und die zwei Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$



Lehrbuch Seite 272

1 a)

$$\begin{array}{rr} 3 & -2 \\ -3 & 3 \\ 4 & -1 \\ 3 & -2 \\ -3 & 3 \\ 4 & -1 \end{array}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \cdot (-1) - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 3 - (-3) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{array}{rr} -1 & 6 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \\ -1 & 6 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{array}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-2) - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 6 - (-1) \cdot (-2) \\ (-1) \cdot 4 - 0 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{array}{rr} -2 & -5 \\ 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & -5 \\ 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{array}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-5) - (-2) \cdot (-1) \\ (-2) \cdot 2 - 3 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Lehrbuch Seite 281

1 a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$; r, s ∈ ℝ

Ein Normalenvektor von E: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ Vektorprodukt

Mit $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$: $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-2\\-4\end{pmatrix}$

Normalenform:

$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$; $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}8\\-2\\-4\end{pmatrix} = 0$

Koordinatenform:

Ausmultiplizieren ergibt: $8x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2 = 0$

bzw. $4x_1 - x_2 - 2x_3 - 1 = 0$

Hinweis: $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$; r, s ∈ ℝ

Ein Normalenvektor von E: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ Vektorprodukt

Mit $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$: $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}$

Normalenform:

$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$; $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix} = 0$

Koordinatenform:

Ausmultiplizieren ergibt: $4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 6 = 0$

bzw. $2x_1 - x_2 - x_3 + 3 = 0$

Lehrbuch Seite 282

2 a) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

Ausmultiplizieren ergibt: $4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 12 = 0$

b) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Ausmultiplizieren ergibt: $2x_1 - x_3 - 7 = 0$

3 a) E: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; Punkt auf E: P(4 | 0 | 0): $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$

Achsenabschnittsform: $\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{\frac{8}{3}} + \frac{x_3}{\frac{8}{5}} = 1$

b) E: $5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 20 = 0$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; Punkt auf E: P(0 | 10 | 0): $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Achsenabschnittsform: $\frac{x_1}{-4} + \frac{x_2}{10} + \frac{x_3}{-\frac{20}{3}} = 1$

Lehrbuch Seite 282

4 a) E: $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$

Zwei Parameter sind frei wählbar: $x_3 = r$; $x_2 = s$

x_1 berechnen:

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$$
$$2x_1 - s + 3r = 4$$
$$x_1 = 2 - 1{,}5r + 0{,}5s$$

Vektorschreibweise:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1{,}5r + 0{,}5s \\ s \\ r \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parameterform:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}$$

b) E: $-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -6$

Zwei Parameter sind frei wählbar: $x_3 = r$; $x_2 = s$

x_1 berechnen:

$$-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -6$$
$$-3x_1 - 2s + 4r = -6$$
$$x_1 = 2 + \frac{4}{3}r - \frac{2}{3}s$$

Vektorschreibweise:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{3}r - \frac{2}{3}s \\ s \\ r \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parameterform:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}$$

Lehrbuch Seite 287

1 a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\-1\\15\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-1\\15\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$

LGS für r, s und t: $r\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\12\end{pmatrix}$

Umformung $$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} r & s & t\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&5\\3&0&1&1\\5&1&-3&12\end{array}\right)\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&5\\0&-6&4&-14\\0&-9&2&-13\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&5\\0&-6&4&-14\\0&0&8&-16\end{array}\right)$$

Das LGS ist eindeutig lösbar. g und E schneiden sich in einem Punkt S.

Hinweis: Auflösung des LGS ergibt $t = -2$, $s = 1$ und $r = 1$.
Schnittpunkt $S(4 \mid 1 \mid 9)$

b) g: $\vec{x} = t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

LGS für r, s und t: $r\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-4\\-1\end{pmatrix}$

Umformung $$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} r & s & t\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\2&-2&-2&-4\\5&4&1&-1\end{array}\right)\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\0&0&0&-2\\0&9&6&4\end{array}\right)$$

Das LGS ist unlösbar. g und E haben keine gemeinsamen Punkte.

g und E sind parallel und h verläuft nicht in E. h und E sind echt parallel.

Lehrbuch Seite 290

1 g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

a) E: $x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$

Die Punkte auf der Geraden haben die

Koordinaten (aus der Geradengleichung): $x_1 = 1 + r$; $x_2 = -5 - 4r$; $x_3 = 2 + r$

Einsetzen von x_1, x_2, x_3 in die Koordinatengleichung ergibt eine

Gleichung in r. $1 + r - 5 - 4r + 3(2 + r) = 3$

$2 = 3$ falsche Aussage

Die Gleichung ist unlösbar.

Es gibt keinen r-Wert, der zu einem gemeinsamen Punkt führt.

Gegenseitige Lage: g und E sind parallel und h liegt nicht in E.

g und E sind echt parallel.

e) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

E in Koordinatenform: $9x_1 + x_2 = 9$

Koordinaten (Geradengleichung): $x_1 = 1 + r$; $x_2 = -5 - 4r$; $x_3 = 2 + r$

Einsetzen von x_1, x_2, x_3 in die Koordinatengleichung ergibt eine

Gleichung in r. $9(1 + r) - 5 - 4r = 9$

$r = 1$

Die Gleichung ist eindeutig lösbar.

Für $r = 1$ gibt es einen Punkt, der auf der Geraden und zugleich auf der Ebene liegt.

Gegenseitige Lage: g durchstößt die Ebene E.

Einsetzen von $r = 1$ in die Geradengleichung von g ergibt den

Durchstoßpunkt $S(2 \mid -9 \mid 3)$.

Lehrbuch Seite 291

4 a) Punktprobe ergibt eine wahre bzw. eine falsche Aussage.
Der Punkt P(− 17 | 2 | 6) liegt auf g aber nicht in E.

P ist kein gemeinsamer Punkt von g und E.

b) Der Richtungsvektor von g steht senkrecht auf dem

Normalenvektor von E. $\begin{pmatrix}-6\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = 0$

g und E sind parallel.

Da es einen Punkt P gibt, der auf g nicht aber in E liegt,
ist g echt parallel zu E.
g und E haben keine gemeinsamen Punkte.

Lehrbuch Seite 294

1 a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$; r, s $\in \mathbb{R}$ F: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$; u, v $\in \mathbb{R}$

Gegenseitige Lage von E und F

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$

Umformung: $r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-2\\0\end{pmatrix}$

Matrixumformung: $\left(\begin{array}{cccc|c}0 & 3 & -5 & 2 & -6\\2 & -1 & -2 & 1 & -2\\1 & -2 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 0 & 0\\2 & -1 & -2 & 1 & -2\\0 & 3 & -5 & 2 & -6\end{array}\right)$ Zeilentausch

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 0 & 0\\0 & 3 & -4 & 1 & -2\\0 & 3 & -5 & 2 & -6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 0 & 0\\0 & 3 & -4 & 1 & -2\\0 & 0 & 1 & -1 & 4\end{array}\right)$

Aus der 3. Zeile: $u - v = 4$

$u = v + 4$

Das LGS ist mehrdeutig (allgemein) lösbar. Es ist ein Parameter frei wählbar,

z. B. v.

Die Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

Bestimmung der Schnittgeraden g

Einsetzen von u = v + 4 in die Ebenengleichung von F:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} + (v+4)\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\6\\-3\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Gleichung der Schnittgeraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}18\\6\\-3\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$; v $\in \mathbb{R}$

Lehrbuch Seite 294

4 E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $u, v \in \mathbb{R}$

a) Gleichsetzen: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Umformung: $r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Matrixumformung: $\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r & s & u & v \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 7 & 2 & 6 \end{array}\right) \end{array}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Aus der 3. Zeile: $5u + 2v = 2$

$v = 1 - 2{,}5u$

Einsetzen von $v = 1 - 2{,}5u$ in die Ebenengleichung von F:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + (1 - 2{,}5u)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 2{,}5u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Schnittgerade von E und F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$; $u \in \mathbb{R}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}; \; k \in \mathbb{R}$$

Lehrbuch Seite 294

4 Punkte A(− 2 | − 1 | 10) und B(2 | 2 | 3)

b) Strecke AB: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + u \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$; $0 \leq u \leq 1$

Punktprobe mit P ergibt u = 2 > 1.

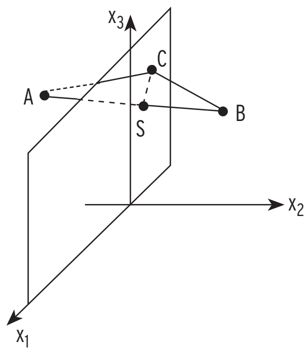
Der Punkt liegt auf der Geraden durch die Punkte A und B.

Er liegt aber außerhalb der Strecke AB, da u > 1 ist.

c) Die Schnittmenge der x_1x_3-Ebene mit der Dreiecksfläche ist eine Strecke (siehe Skizze).

Da C in der x_1x_3-Ebene liegt, muss nur der Schnittpunkt der Geraden (AB) mit der x_1x_3-Ebene berechnet werden.

(AB): $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + u \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$; $u \in \mathbb{R}$



$x_2 = 0$ ergibt $u = \frac{1}{3}$

$S(-\frac{2}{3} \mid 0 \mid \frac{23}{3})$

Wegen $0 < u < 1$ liegt S zwischen A und B.

Die Schnittmenge entspricht der Strecke SC:

$\vec{x} = \overrightarrow{OS} + u \cdot \overrightarrow{SC}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{23}{3} \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $0 \leq u \leq 1$

Lehrbuch Seite 298

1 a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; r, s $\in \mathbb{R}$

Gleichung von E in Koordinatenform

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$: $\quad \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Stützvektor z. B. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Normalenform: $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ $\quad \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

Ausmultiplizieren ergibt: $4x_1 - x_2 - 2x_3 - 6 = 0$

Koordinatenform: $4x_1 - x_2 - 2x_3 = 6$

E: $4x_1 - x_2 - 2x_3 = 6$

F: $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$

LGS: $\quad 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 6$
$\quad x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$

Umformung in „Richtung"

Dreiecksform: $\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & 6 \end{array}\right)$

2. Zeile als Gleichung: $-5x_2 + 10x_3 = 6$

Bei einer Gleichung mit 2 Unbekannten kann eine

Unbekannte frei gewählt werden. Wir wählen $x_3 = r$ ($r \in \mathbb{R}$).

Umformung: $-5x_2 + 10r = 6$

$x_2 = 2r - 1{,}2$

Einsetzen von x_3 und x_2 in

$4x_1 - x_2 - 2x_3 = 6$: $\quad 4x_1 - (2r - 1{,}2) - 2r = 6$

Nach x_1 auflösen: $x_1 = r + 1{,}2$

Ortsvektor der gemeinsamen Punkte: $\vec{x} = \begin{pmatrix} r + 1{,}2 \\ 2r - 1{,}2 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ -1{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gleichung der Schnittgeraden: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ -1{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

Lehrbuch Seite 298

1 d) E: $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2$

F: $x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$

LGS:
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

Umformung in „Richtung"

Dreiecksform:
$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

2. Zeile als Gleichung:
$$5x_2 - 5x_3 = -10$$
$$x_2 - x_3 = -2$$

Bei einer Gleichung mit 2 Unbekannten kann eine

Unbekannte frei gewählt werden. Wir wählen $x_3 = r$ ($r \in \mathbb{R}$).

Umformung:
$$x_2 - r = -2$$
$$x_2 = r - 2$$

Einsetzen von x_3 und x_2 in

$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2$:
$$2x_1 + 3(r - 2) - r = 2$$

Nach x_1 auflösen:
$$x_1 = -r + 4$$

Ortsvektor der gemeinsamen Punkte:
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -r+4 \\ r-2 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Schnittgeraden:
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -r+4 \\ r-2 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$$

Lehrbuch Seite 298

1 f) E: $-\frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 = 2$

F: $-3x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{6}{5}x_3 - \frac{12}{5} = 0$

Gleichung von E umformen: $-\frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 = 2 \quad | \cdot 6$

$-15x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 12$

Gleichung von F umformen: $-3x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{6}{5}x_3 - \frac{12}{5} = 0 \quad | \cdot 5$

$-15x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 12$

Gleichungen von E und F: E: $-15x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 12$

F: $-15x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 12$

E und F werden durch die gleiche Gleichung beschrieben.

E und F sind identisch.

Lehrbuch Seite 306

1 a) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punkt Q auf g wählen: $\vec{x} = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1-t \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1-t \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t-2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ steht senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g.

Bedingung: $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$

$\begin{pmatrix} t \\ -t-2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$t + t + 2 = 0$

$t = -1$

Einsetzen von $t = -1$ in $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} t \\ -t-2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Abstand: $d = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

b) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punkt Q auf g wählen: $\vec{x} = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ 2-t \\ t \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ 2-t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ 2-t \\ t \end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ steht senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g.

Bedingung: $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$

$\begin{pmatrix} 3+2t \\ 2-t \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$6 + 4t - 2 + t + t = 0$

$t = -\frac{2}{3}$

Einsetzen von $t = -\frac{2}{3}$ in $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ 2-t \\ t \end{pmatrix}$ ergibt: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Abstand: $d = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{\sqrt{93}}{3}$

Lehrbuch Seite 310

1 a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Punkt P auf E: P(− 3 | 1 | 0); $\overrightarrow{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$d = \left| \frac{(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$ $d = \frac{13}{\sqrt{5}} = 5{,}81$

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Punkt P auf E: P(3 | 0 | 0); $\overrightarrow{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$d = \left| \frac{(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$ $d = \frac{|-5|}{\sqrt{11}} = 1{,}51$

e) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punkt P auf E: P(0 | 0 | 0); $\overrightarrow{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$d = \left| \frac{(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$ $d = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

7 $\vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$

Der Richtungsvektor von g steht senkrecht auf dem

Normalenvektor von E.

Punktprobe mit A(50 | 75 | 25) in E ergibt eine falsche Aussage.

g und E sind echt parallel.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 50 \\ 75 \\ 25 \end{pmatrix}$; $\vec{p} = \begin{pmatrix} 330 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $d = \frac{95}{\sqrt{146}} = 7{,}86$

Der Abstand beträgt 78,6 m.

Lehrbuch Seite 376

3 X: Folgekosten in €
$E(X) = 20\text{ €} \cdot 0{,}05 + 30\text{ €} \cdot 0{,}02 + 150\text{ €} \cdot 0{,}005 = 2{,}35$
Die Folgekosten betragen 2,35 €.
Hinweis: $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$

Lehrbuch Seite 383

7 a) X: Durchmesser in mm
$\mu = E(X) = 3{,}18 \cdot 0{,}03 + 3{,}19 \cdot 0{,}21 + 3{,}20 \cdot 0{,}43 + 3{,}21 \cdot 0{,}29 + 3{,}22 \cdot 0{,}04 = 3{,}201$
Der mittlere Durchmesser beträgt 3,201 mm.
Varianz: $\sigma^2 = (3{,}18 - 3{,}201)^2 \cdot 0{,}03 + \ldots + (3{,}22 - 3{,}201)^2 \cdot 0{,}04 = 7{,}69 \cdot 10^{-5}$
Standardabweichung: $\sigma = 8{,}77 \cdot 10^{-3}$ (in mm)
Ausschuss: $0{,}03 + 0{,}04 = 0{,}07 = 7\ \%$
Es entsteht 7 % Ausschuss.

b) Der mittlere Durchmesser ist gleich geblieben, die Standardabeichung hat sich verringert. Die Durchmesser, die im Februar gemessen wurden, streuen weniger um den mittleren Durchmesser 3,201 mm als die Werte, die im Januar gemessen wurden.

Lehrbuch Seite 389

2 X: Anzahl der roten Kugeln

Mit Zurücklegen: $P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot (\frac{3}{4})^2 \cdot (\frac{1}{4})^1 = 0{,}4219$

Bernoulli-Kette: Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Kugel bleibt gleich.

Ohne Zurücklegen: $P(X = 2) = 3 \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} = 0{,}5357$

Keine Bernoulli-Kette: Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Kugel ändert sich.

Lehrbuch Seite 393

5 a) $\binom{5}{4} \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^1 = P(X = 4) = 0{,}0768$; X ist binomialverteilt mit n = 5; p = 0,4

b) $\binom{15}{4} \cdot 0{,}3^4 \cdot 0{,}7^{11} = P(X = 4) = 0{,}2186$; X ist binomialverteilt mit n =15; p = 0,3

c) $\binom{50}{10} \cdot 0{,}1^{10} \cdot 0{,}9^{40} = P(X = 10) = 0{,}0152$;

X ist binomialverteilt mit n = 50; p = 0,1

d) $\binom{100}{44} \cdot 0{,}2^{44} \cdot 0{,}8^{56} = P(X = 44) = 3{,}25 \cdot 10^{-8} \approx 0$

X ist binomialverteilt mit n = 100; p = 0,2; X ist $B_{100;\,0,2}$-verteilt

Lehrbuch Seite 399

1 a) n = 8; k = 2; p = 0,5 — $P(X \leq 2) = 0{,}1445$

b) n = 20; k = 5; p = 0,8 — $P(X \leq 5) = 1{,}8 \cdot 10^{-7} \approx 0$

c) n = 50; k = 20; p = 0,1 — $P(X \leq 20) = 0{,}9999...$

Lehrbuch Seite 400

9 a) X: Anzahl der Ananaskonserven; X ist $B_{50;\frac{1}{3}}$-verteilt

$n = 50$; $p = \frac{1}{3}$; $k = 16$

Genau 16 Ananaskonserven: $P(X = 16) = B_{50;\frac{1}{3}}(16) = 0{,}1178$

b) Y: Anzahl der Papayakonserven; Y ist $B_{50;\frac{2}{3}}$-verteilt

$n = 50$; $p = \frac{2}{3}$; $k = 25$

Mindestens 25 Papayakonserven:

$P(Y \geq 25) = 1 - P(Y \leq 24) = 1 - 0{,}0049 = 0{,}9951$

Lehrbuch Seite 406

3 $\mu = n \cdot p = 5$

$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = 5 \cdot (1 - p) = 4$: $\quad 5 \cdot (1 - p) = 4$

$p = 0{,}2$

Einsetzen von $p = 0{,}2$ in $\mu = n \cdot p = 5$ ergibt: $\quad n \cdot 0{,}2 = 5$

$n = 25$

Ergebnis: $n = 25$; $p = 0{,}2$

Lehrbuch Seite 407

7 a) X: Anzahl der defekten Dichtungen; X ist $B_{500;\,0,05}$-verteilt

$E(X) = 25$

b) $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 4{,}87$

$\mu - \sigma = 20{,}13 \qquad \mu + \sigma = 29{,}87$

ganzzahlige Werte in dem Intervall $[20{,}13; 29{,}87]$ sind 21, ... , 29.

$P(20{,}13 \leq X \leq 29{,}87) = P(21 \leq X \leq 29) = 0{,}8235 - 0{,}1789 = 0{,}6446$

c) Berechnungen mit dem WTR:

X ist $B_{50;\,0,05}$-verteilt;

$P(A) = P(X = 0) = 0{,}0769$

$P(B) = P(X \leq 3) = 0{,}7604$

$P(C) = P(X > 35) = 1 - P(X \leq 35) = 0$

$P(D) = P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) = 0{,}9882 - 0{,}7604 = 0{,}2278$

Lehrbuch Seite 417

7 X: Ausgangsleistung in Watt; $\mu = 200$; $\sigma = 6$

$P(X < 190) = P(X \leq 190) \approx 0{,}04779$

$P(X < 200 + c) \leq 0{,}975$

$P(X \leq 211) \approx 0{,}967 < 0{,}975$

$P(X \leq 212) \approx 0{,}977 > 0{,}975$

$c = 12$

Hinweis: Bestimmung von c durch Ausprobieren mit WTR.

Lehrbuch Seite 421

1 a) $p = 0{,}5$; $n = 50$:

Erwartungswert $\mu = 25$ Standardabweichung $\sigma = 3{,}54$

maximale Wahrscheinlichkeit $P(X = 25) = 0{,}1123$

$\mu - \sigma = 21{,}46$ $\mu + \sigma = 28{,}54$

ganzzahlige Werte in dem Intervall $[21{,}46; 28{,}54]$ sind 22, ... , 28.

$P(22 \leq X \leq 28) = P(X \leq 28) - P(X \leq 21) = 0{,}8389 - 0{,}1611 = 0{,}6778$

b) $n = 50$; $p = \frac{1}{6}$:

$\mu = 8{,}333$; $\sigma = 2{,}64$

maximale Wahrscheinlichkeit $P(X = 8) = 0{,}1510$

Zum Vergleich: $P(X = 9) = 0{,}1410$

$\mu - \sigma = 5{,}69$ $\mu + \sigma = 10{,}97$

ganzzahlige Werte in dem Intervall $[5{,}69; 10{,}97]$ sind 6, ... , 10.

$P(6 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 5) = 0{,}7986 - 0{,}1388 = 0{,}6598$

Lehrbuch Seite 422

9 $p = 5\ \%$ für mangelhafte Ware; $n = 50$

X: Anzahl der mangelhaften Prüfstücke

a) X ist binomialverteilt, da es nur zwei mögliche Ergebnisse gibt und man vom Experiment: Ziehen mit Zurücklegen ausgehen kann.

b) Erwartungswert $\mu = 50 \cdot 0{,}05 = 2{,}5$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95} = 1{,}54$

c) $P(A) = P(X = 3) = 0{,}2199$

$P(B) = P(X \leq 3) = 0{,}7604$

$\mu + \sigma = 4{,}04$; $\mu - \sigma = 0{,}96$;

ganzzahlige Werte in dem Intervall $[0{,}96; 4{,}04]$ sind 1, ... , 4.

$P(C) = P(1 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X = 0) = 0{,}8964 - 0{,}0769 = 0{,}8195$

d) X ist $B_{n;\,0{,}05}$-verteilt

Bedingung für den kleinsten Stichprobenumfang n:

$P(X \geq 1) \geq 0{,}90$ ergibt $P(X = 0) \leq 0{,}1$;

$$0{,}95^n \leq 0{,}1$$

Lösung der Gleichung $0{,}95^n = 0{,}1$ mit dem WTR (Log-Taste)

oder durch Logarithmieren $n = \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}95)} = 44{,}89$

$n \geq 45$

Es müssen mindestens 45 Prüfstücke entnommen werden.

Lehrbuch Seite 425

3 a) $\mu = 10$; $\sigma = 3$ $1{,}96\sigma$-Intervall: $[4{,}12; 15{,}88]$

95 %-Prognoseintervall: $[5; 15]$

b) $1{,}64\sigma$-Intervall: $[5{,}08; 14{,}92]$ 90 %-Prognoseintervall: $[6; 14]$

Das Ergebnis 18 ist nicht verträglich mit den Angaben.

Lehrbuch Seite 431

1 Vertrauensintervall für die Vertrauenswahrscheinlichkeit γ = 90 %: c = 1,64
Vertrauensintervall für γ = 95 %: c = 1,96

$$\left[h - c\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}};\ h + c\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\right]$$

a) n = 50; k = 20; h = 0,4

$$\left[0{,}4 - 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}4(1-0{,}4)}{50}};\ 0{,}4 + 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}4(1-0{,}4)}{50}}\right] = [0{,}2864;\ 0{,}5136]$$

$$\left[0{,}4 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}4(1-0{,}4)}{50}};\ 0{,}4 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}4(1-0{,}4)}{50}}\right] = [0{,}2642;\ 0{,}5358]$$

b) n = 100; k = 60; h = 0,6

$$\left[0{,}6 - 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}6(1-0{,}6)}{100}};\ 0{,}62 + 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}6(1-0{,}6)}{100}}\right] = [0{,}5197;\ 0{,}6803]$$

$$\left[0{,}6 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}6(1-0{,}6)}{100}};\ 0{,}6 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}6(1-0{,}6)}{100}}\right] = [0,\ 5040;\ 0{,}6960]$$

c) n = 40; k = 20; h = 0,5

c = 1,64: [0,3703; 0,6297]

c = 1,96: [0,3450; 0,6550]

3 Schätzwert für p: h = 0,45
Mit n = 1350 und c = 1,96 folgt
[0,4235; 0,4765]
bezogen auf die Grundgesamtheit von 45650 Wählern:
[0,4235 · 45650; 0,4765 · 45650] = [19332,8; 21752,2]
Die Stichprobe lässt auf mindestens 19333 und höchstens 21752
Wahlberechtigte schließen, die Partei A wählen.

Lehrbuch Seite 446

1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

b) $2A - B = 2\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & -2 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 5 \\ -4 & 15 & 3 \\ 3 & -3 & 10 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & -0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -2{,}5 & 0{,}5 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1{,}5 & 0 & 5{,}5 \end{pmatrix}$

d) $3A - 4B = 3\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 6 \\ -6 & 15 & 9 \\ 0 & -3 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 0 & -20 & 12 \\ -12 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

$3A - 4B = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 10 \\ -6 & 35 & -3 \\ 12 & -7 & 5 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 450

1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = (2 \;\; 3 \;\; -4)$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 5 \\ 15 & -6 & -28 \\ -17 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ Berechnung im Schema

b) $B \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$

c) $B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -2 & 10 \\ 5 & -14 & -2 \\ -6 & 18 & 21 \end{pmatrix}$ Berechnung im Schema

d) $(A + E) \cdot B = \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$(A + E) \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & -12 & 6 \\ 18 & -6 & -29 \\ -19 & 4 & 15 \end{pmatrix}$

e) $\frac{1}{20} \cdot A \cdot \vec{a} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0 \\ -0{,}45 \end{pmatrix}$

f) $\vec{b} \cdot A = (2 \;\; 3 \;\; -4) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} = (1 \;\; 20 \;\; -19)$

g) $\vec{b} \cdot B \cdot A = (2 \;\; 3 \;\; -4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} = (19 \;\; -16 \;\; -21) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{b} \cdot B \cdot A = (54 \;\; 16 \;\; 59)$

h) $\vec{b} \cdot \vec{a} = (2 \;\; 3 \;\; -4) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Lehrbuch Seite 451

14 a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 210 & 120 \\ 180 & 220 \\ 320 & 300 \end{pmatrix}$

Maschinenlaufzeiten der Automaten je Arbeitsperiode:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1600 & 1500 \\ 1640 & 1640 \\ 1390 & 1380 \end{pmatrix}$

Automat I braucht für die Produktion von 210 E_1, 180 E_2 und 320 E_3

in Periode I:

$210 \cdot 2 + 180 \cdot 3 + 320 \cdot 2 = 1600$ (Minuten)

In Periode I läuft Automat I 1600 Minuten, Automat II 1640 Minuten und

Automat III 1390 Minuten.

In Periode II läuft Automat I 1500 Minuten, Automat II 1640 Minuten und

Automat III 1380 Minuten.

b) Maschinenlaufzeit in Periode I: 4630 Minuten.

Maschinenlaufzeit in Periode II: 4520 Minuten.

Auslastung in Periode I: $\frac{4630}{7200} \cdot 100\% = 64{,}3\%$

Auslastung in Periode II: $\frac{4520}{6000} \cdot 100\% = 75{,}3\%$

Lehrbuch Seite 457

1 a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Berechnung der Inversen

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Berechnung der Inversen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 8 & 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 24 & 0 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 24 & 0 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 24 & 0 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 24 & -6 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 \\ 7 & -3 & 2 \\ -6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$