

# Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

## Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

---

Die Verfasser:

### **Roland Ott**

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

### **Kurt Bohner**

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

### **Ronald Deusch**

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

### **Günther Thun**

Studiendirektor in Oldenburg

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG behält sich eine Nutzung ihrer Inhalte für kommerzielles Text- und Data Mining (TDM) im Sinne von § 44b UrhG ausdrücklich vor. Für den Erwerb einer entsprechenden Nutzungserlaubnis wenden Sie sich bitte an [copyright@merkur-verlag.de](mailto:copyright@merkur-verlag.de).

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.

Stand: Juni 2017

Umschlag: Hintergrundbild Kirill Kedrinski - Fotolia.com

Bild Kasten Links: Mike Kiev - Fotolia.com

Bild Kasten Mitte: Andres Rodriguez - Fotolia.com.

1. Auflage 2017

© 2017 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: [info@merkur-verlag.de](mailto:info@merkur-verlag.de); [lehrer-service@merkur-verlag.de](mailto:lehrer-service@merkur-verlag.de)

Internet: [www.merkur-verlag.de](http://www.merkur-verlag.de)

Merkur-Nr. 0386-01

ISBN 978-3-8120-0386-5

# Vorwort

## Vorbemerkungen

Der vorliegende Band „**Mathematik, kompetent zur Erlangung der Fachhochschulreife**“ ist ein Arbeitsbuch für die Fachoberschulen (FOS) der nichttechnischen Fachrichtungen in Niedersachsen und für weitere Bildungsgänge, die zur Fachhochschulreife führen. Das Lehrbuch richtet sich nach den Rahmenrichtlinien für das Fach Mathematik in der Fachoberschule vom November 2006.

Das Autorenteam berücksichtigt sowohl die in den Rahmenrichtlinien geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen (modellieren, argumentieren, kommunizieren, nutzen mathematischer Werkzeuge und Darstellungen, lösen innermathematischer Problemstellungen sowie das Umgehen mit formalen und symbolischen Elementen).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die in den Richtlinien aufgeführten Kompetenzen und Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Damit bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

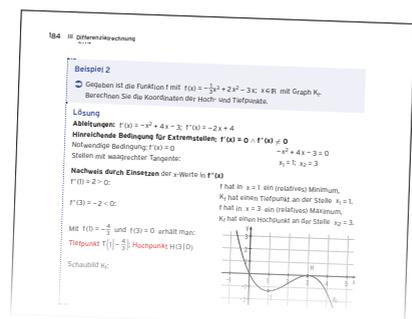
Begleitend werden ein Arbeitsheft (ISBN 978-3-8120-2386-3) und eine Formelsammlung (ISBN 978-3-8120-1386-4) angeboten. Das Arbeitsheft soll Schüler und Lehrer durch Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

## Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.



Jede Lerneinheit endet mit einer umfassenden Anzahl von Aufgaben. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Fragestellung mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Probleme aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.

Eine Differenzierung der Aufgaben ist durch Farben bzw. Rechnerlogo gegeben;

**rot:** Aufgaben mit gehobenem Niveau



Zur Lösung ist ein **GTR (CAS)** empfohlen oder nötig.



Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese im Downloadbereich zum Buch auf unserer Website <http://www.merkur-verlag.de>.

**Definitionen, Festlegungen, Merksätze** und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

**Grundwissen:** Die Schüler in der Fachoberschule kommen aus verschiedenen Schularten mit unterschiedlichen Vorkenntnissen.

Um die Schüler dennoch möglichst schnell auf ein gleiches Wissensniveau zu bringen und damit gleiche Ausgangsbedingungen für den Mathematikunterricht zu schaffen, gibt es ein umfangreiches **Kapitel zur Wiederholung** der grundlegenden Rechentechniken und aller mathematischen Grundlagen aus der Mittelstufe.



Seite 476

Die **Heftklammer** im Lehrbuch mit Seitenangabe weist auf einen entsprechenden Abschnitt im Kapitel Grundwissen hin.

Die Aufgaben „**Modellierung einer Situation**“ und „**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**“ werden im Anhang ausführlich gelöst.

204 11. Wahrscheinlichkeit

**Aufgaben**

- Ein Unternehmen stellt Glasbecher für Großbestellen her. Die Grundkosten in Abhängigkeit der produzierten ME  $x$  können sich beschreiben durch  $K(x) = 0,2x^2 - 3x + 1200$ .
  - Ermitteln Sie die durchschnittlichen Grundkosten auf [0; 10].
  - Berechnen Sie die durchschnittlichen realen Stückkosten für  $10 \leq x \leq 30$ . Interpretieren Sie Ihr Ergebnis aus ökonomischer Sicht.
  - Der Erlös  $E(x)$  bei Verkauf des Bechers durch  $E(x) = 2,2x - 0,005x^2$ . Wie hoch ist der durchschnittliche Erlös auf [0; 1000].
- Berechnen Sie im Intervall [0; 50] die durchschnittliche Differenz zwischen dem tatsächlichen Umsatz und dem zweiten variablen Stückkosten.
  - Welche Umsatzfunktion  $U(x)$  und welche Umsatzfunktion  $U(x)$  beschreiben durch  $U(x) = -x^2 + 20x$ ,  $U(x) = 0$ .
  - Die Umsatzfunktion  $U(x)$  ist in einem 10-tägigen Verkaufsplan gegeben. Wie hoch ist der durchschnittliche Umsatz pro Woche?
    - Bestimmen Sie die Umsatzfunktion, wie viel haben Zehn Tage der Umsatzmarkt in den ersten 10 Tagen des Jahres? und interpretieren Sie das Ergebnis.
    - Nach einem halben Jahr sind insgesamt mehr als 8000 Tassen verkauft. Überprüfen Sie die Behauptung.
- Die Veränderung des Heizpreises im Laufe eines Jahres (in Euro pro 100) lässt sich durch die Funktion  $f(x) = -0,001x^3 + 0,002x^2 - 0,001x + 0,001$  beschreiben, wobei  $x$  die Zeit in Wochen nach der Einführung,  $f(x)$  die veränderte Stückkosten in Prozent pro Woche beschreibt.
  - Bestimmen Sie die Heizpreismenge, wie viel haben Zehn Tage der Umsatzmarkt in den ersten 10 Tagen des Jahres? und interpretieren Sie das Ergebnis.
  - Nach einem halben Jahr sind insgesamt mehr als 8000 Tassen verkauft. Überprüfen Sie die Behauptung.
- Die Funktion  $G$  mit  $G(x) = -x^2 + 2x^2 + x + 0,1$  ist die Gewinnfunktion eines Unternehmens.
  - Bestimmen Sie die Produktionsmenge  $x$ , die den maximalen Gewinn  $G(x)$  ergibt. Wie hoch ist der Gewinn?
  - Bestimmen Sie die Produktionsmenge  $x$ , die den maximalen Gewinn  $G(x)$  ergibt. Wie hoch ist der Gewinn?

1. Untersuchen Sie die Scheitelpunkte  $K_1$  von  $f$  auf Extrem- und Wendepunkte. Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptoten  $m$  und  $n$ . Skizzieren Sie  $K_1$ .

2. Zeichnen Sie die Scheitelpunkte  $K_1$  von  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$  und  $g(x) = x^2 - 2x + 1$  in ein Koordinatensystem ein. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an  $K_1$  von  $f$ .

3. Gegeben sei die Funktion  $f$  durch  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ .

Bestimmen Sie die Wendepunkte von  $f$ . Untersuchen Sie die Scheitelpunkte  $K_1$  von  $f$  auf Wendepunkte und geben Sie die Gleichung der Wendepunkte an.

**Beachten Sie**

Die Gerade mit der Gleichung  $x = x_0$  schneidet die Scheitelpunkte der **Parabel**  $f(x) = ax^2 + bx + c$  in  $C(x_0, f(x_0))$ . Die **Wendepunkte** des Graphen  $f$  sind  $W(x_0, f'(x_0))$ . Die **Wendepunkte** sind die **Wendepunkte** der **Parabel**  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Die **Wendepunkte** sind die **Wendepunkte** der **Parabel**  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

450 11. Grundwissen

**1 Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen**

**Beispiel**

$D_1 = ]0; 5[$  alle reellen Zahlen von 0 bis 5, einschließlich 0 und 5  
 $D_2 = ]-2; 2[$  alle reellen Zahlen zwischen -2 bis 2  
 $D_3 = ]0; 5[ \cap ]-2; 2[ = ]0; 2[$  alle reellen Zahlen zwischen 0 und 2  
 $D_4 = ]0; 5[ \cup ]-2; 2[ = ]-2; 5[$  alle reellen Zahlen größer oder gleich 1

**Erweitertes Intervall:**  $I_1 = ]-2; 5[$

**Offenes Intervall:**  $I_2 = ]-2; 5[$

**Halboffenes Intervall:**  $I_3 = ]-2; 5[$

Quadratische Funktionen

**Beispiel 3**

Wir schneiden das Scheitelpunkt  $C$  der  $x$ -Achse.

Die Gleichung  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  ist  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  ist  $f(x) = x^2 - 3x + 2$

**Lösung**

Bestimmen Sie die Nullstellen:  $f(x) = 0$

Lösen Sie  $x^2 - 3x + 2 = 0$

a)  $x^2 - 3x + 2 = 0$  b)  $x^2 - 3x + 2 = 0$  c)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_1 = 1$   $x_2 = 2$   $x_1 = 1$   $x_2 = 2$   $x_1 = 1$   $x_2 = 2$

108 11. Quadratische Funktionen

**3 Quadratische Funktionen**

**Modellierung einer Situation**

Die Firma Modellier stellt unter anderem ein modulares Schiffsmodell her.

Die Herstellungskosten sind in der Tabelle aufgeführt.

Modellgröße	1	2	3	4
Herstellungskosten	1000	1500	2000	2500

Die Herstellkosten pro Einheit sind in der Tabelle aufgeführt.

Generieren Funktionen 3. und 4. Grades

**1 Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Gleichung:**

a)  $0,25x^2 + 3x = 0$   
 b)  $-2x^2 + x + 0 = 0$   
 c)  $x^2 - 3x^2 + x + 3 = 0$

**2 Gegeben sind die Kubikfunktion  $K$  durch  $K(x) = 0,25x^3 - 3x^2 + 9x + 5$  und die Erzeugende  $E$  mit  $E(x) = 13x$ .**

**3 Gegeben sei eine mit  $G(x) = 0,25x^3 + 3x^2 - 13x - 5$  beschriebene Funktion  $G$ .**

# Inhaltsverzeichnis

## I Optionale Lerngebiete 1 11

1	Grundlagen der Wirtschaftsmathematik	11
1.1	Ökonomische Anwendungen des Dreisatzes	12
1.1.1	Proportionale und antiproportionale Zuordnungen	12
1.1.2	Dreisatzaufgaben	16
1.1.3	Dreisatzrechnung in Anwendungen	20
1.2	Prozentrechnung	26
1.2.1	Prozente	26
1.2.2	Rechnen mit der Grundgleichung	27
1.2.3	Verminderter und vermehrter Grundwert	31
1.2.4	Zusammengesetzte Prozentrechnung	34
1.2.5	Handelskalkulation als Anwendung der Prozentrechnung	37
2	Grundlagen der Finanzmathematik	47
2.1	Finanzwirtschaftliche Anwendungen der Zinsrechnung	48
2.1.1	Grundlagen und Grundbegriffe	48
2.1.2	Berechnung des Effektivzinssatzes	52
2.2	Zinseszinsrechnung	57
2.2.1	Die Zinseszinsformel	57
2.2.2	Barwert, Zinssatz- und Laufzeitermittlung	58
2.2.3	Kapitalienvergleich	62
2.2.4	Renditeberechnungen beim Zuwachssparen	64
2.2.5	Unterjährige Verzinsung	65

## II Ganzrationale Funktionen 73

1	Von Zuordnung zur Funktion	73
1.1	Zuordnungen	74
1.2	Definition einer Funktion	80
2	Lineare Funktionen	86
2.1	Definition der linearen Funktion	87
2.2	Aufstellen von Geradengleichungen	93
2.3	Gemeinsame Punkte	95
2.4	Wirtschaftliche Anwendungen	100
3	Quadratische Funktionen	108
3.1	Definition einer quadratischen Funktion	109
3.2	Gemeinsame Punkte	113
3.3	Aufstellen von Parabelgleichungen	121
3.4	Quadratische Funktionen in Anwendungen	124

4	Ganzrationale Funktionen 3. und 4. Grades	130
4.1	Potenzfunktionen	131
4.2	Ganzrationale Funktionen 3. Grades – Einführung	132
4.3	Ganzrationale Funktionen 4. Grades – Einführung	135
4.4	Polynomgleichungen und geometrische Interpretation	139
4.5	Ganzrationale Funktionen 3. Grades in Anwendungen	152
4.6	Aufstellen von Kurvengleichungen	157

### **III Differenzialrechnung** **160**

1	Ableitung von ganzrationalen Funktionen	160
1.1	Änderungsrate	161
1.2	Definition der Ableitung	165
1.3	Ableitungsregeln	167
1.4	Ableitung und Steigung	171
2	Kurvenuntersuchung ganzrationaler Funktionen	177
2.1	Monotonie	178
2.2	Extrempunkte	182
2.3	Wendepunkte	189
2.4	Beispiele zur Kurvenuntersuchung	194
2.5	Weitere Anwendungen der Differenzialrechnung	198
2.5.1	Kurvenuntersuchung in wirtschaftlichen Anwendungen	199
2.5.2	Aufstellen von Kurvengleichungen aus gegebenen Bedingungen	216
2.5.3	Extremwertaufgaben	221

### **IV Integralrechnung** **225**

1	Einführung	226
2	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	228
3	Das bestimmte Integral	236
4	Flächeninhaltsberechnung mithilfe der Integralrechnung	244
4.1	Fläche zwischen Kurve und x-Achse	244
4.2	Fläche zwischen zwei Kurven	250
5	Anwendung der Integralrechnung in der Wirtschaft	257

### **V Optionale Lerngebiete 2** **265**

1	Exponentialfunktionen	265
1.1	Einführungsbeispiele	266
1.2	Definition einer Exponentialfunktion	268
1.3	Die Euler'sche Zahl $e$	270

1.4	Exponentialfunktionen zur Basis e	271
1.5	Schaubilder von Exponentialfunktionen	273
1.6	Exponentialgleichungen und geometrische Interpretation	278
1.6.1	Der natürliche Logarithmus	278
1.6.2	Exponentialgleichungen	279
1.6.3	Bestimmung von Schnittpunkten	281
1.7	Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	284
1.8	Differenzialrechnung bei Exponentialfunktionen	288
1.8.1	Ableitungsregeln	288
1.8.2	Kurvenuntersuchung	292
1.8.3	Produktlebenszyklus	294
2	Gebrochenrationale Funktionen	298
2.1	Einführung	299
2.2	Die Grundfunktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$	300
2.3	Schaubilder von gebrochenrationalen Funktionen	303
2.4	Hebbare Definitionslücken	309
2.5	Gebrochenrationale Funktionen in Anwendungen	311
2.6	Differenzialrechnung bei gebrochenrationalen Funktionen	321
2.6.1	Ableitungsregeln	321
2.6.2	Kurvendiskussion	327
2.6.3	Wirtschaftliche Anwendungen	330
3	Lineare Algebra	336
3.1	Rechnen mit Matrizen	336
3.1.1	Einführung	337
3.1.2	Addition und skalare Multiplikation	339
3.1.3	Multiplikation von Matrizen	343
3.2	Lineare Gleichungssysteme	350
3.2.1	Einführung	351
3.2.2	Umformung und Lösung eines linearen Gleichungssystems	353
3.3	Inverse Matrix	358
3.3.1	Einführung	358
3.3.2	Berechnung der inversen Matrix	359
3.4	Ein- und zweistufige Produktionsprozesse	365
3.4.1	Einführung	366
3.4.2	Verflechtungsmatrizen	369
3.4.3	Produktions- und Verbrauchsvektoren	376
3.4.4	Kosten und Gewinn	383
4	Stochastik	395
4.1	Beschreibende Statistik	395
4.1.1	Erfassung und Darstellung von Daten	396
4.1.2	Deutung und Bewertung von Daten	401

4.2	Wahrscheinlichkeit .....	411
4.2.1	Zufallsexperiment .....	412
4.2.2	Ereignisse .....	416
4.2.3	Definition der Wahrscheinlichkeit .....	421
4.2.4	Zufallsvariable .....	433
4.2.5	Erwartungswert einer Zufallsvariablen .....	439
4.2.6	Standardabweichung einer Zufallsvariablen .....	441
4.2.7	Binomialverteilung .....	443

## **VI Grundwissen 460**

1	Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen .....	460
2	Algebraische Begriffe und Vorübungen .....	461
2.1	Begriffe .....	461
2.2	Rechnen mit Summen und Differenzen .....	461
2.3	Rechnen mit Brüchen .....	464
2.4	Vereinfachung durch Ausklammern .....	466
2.5	Rechnen mit Potenzen .....	467
3	Gleichungen, Ungleichungen und lineare Gleichungssysteme .....	470
3.1	Lineare Gleichungen .....	470
3.2	Lineare Ungleichungen .....	472
3.3	Lineare Gleichungssysteme .....	473
3.4	Quadratische Gleichungen .....	475

## **VII Anhang 479**

1	Lösungen der Modellierungen und Tests .....	479
2	Lösungen der Aufgaben im Kapitel Grundwissen .....	507
3	Kopiervorlagen .....	513
4	Mathematische Zeichen .....	517
5	Stichwortverzeichnis .....	520