

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner

Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG behält sich eine Nutzung ihrer Inhalte für kommerzielles Text- und Data Mining (TDM) im Sinne von § 44b UrhG ausdrücklich vor. Für den Erwerb einer entsprechenden Nutzungserlaubnis wenden Sie sich bitte an copyright@merkur-verlag.de.

Umschlag: © Adrian Schulz Foto: Mall of Berlin

Bild Kreis links: © Christian Schwier - fotolia.com

Bild Kreis rechts: © Kirill Kedrinski - fotolia.com

* * * * *

6. Auflage 2016

© 1996 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0234-06

ISBN 978-3-8120-0234-9

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band ist ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht in allen Berufskollegs und in Bildungsgängen, die zur Fachhochschulreife führen. Das Buch behandelt den Lehrstoff des ersten Schuljahres (BK I) im zweijährigen Berufskolleg, nämlich die Polynomfunktionen sowie die Exponentialfunktionen und deren Linearkombinationen mit Linearen Funktionen. Grundlage der Inhalte ist der Lehrplan für Bildungsgänge, die zum Erwerb der Fachhochschulreife führen, vom August 2015. Grundlage der Inhalte ist der *Lehrplan für Bildungsgänge, die zum Erwerb der Fachhochschulreife führen*, vom August 2015.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam die im Lehrplan geforderten Inhalte. Die Autoren orientieren sich an den in den Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife formulierten mathematischen Kompetenzen (Mathematisch modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die in den Bildungsstandards aufgeführten Kompetenzen wie auch die Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Begleitend wird jeweils ein Arbeitsheft (ISBN 978-3-8120-2234-7) angeboten. Es soll Schüler und Lehrer durch Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.



Alle Titel, mit Ausnahme der Arbeitshefte, können Sie auch für das Digitale Schulbuchregal erhalten.

Eine sinnvolle Ergänzung ist das Buch „Mathematik im Berufskolleg - Prüfungsaufgaben für die Fachhochschulreife“ (ISBN 978-3-8120-0459-6) mit Aufgaben für die Prüfung zur Fachhochschulreife in neuer Form. Das Buch wird jährlich aktualisiert.

Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.

Jede Lerneinheit endet mit einer umfassenden Anzahl von Aufgaben. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Fragestellung mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Probleme aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.

Eine **Differenzierung der Aufgaben nach Schwierigkeit** ist durch Farben gegeben.

Für Aufgaben mit dem **Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Website:
<http://www.merkur-verlag.de>

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

Polynomfunktionen (Ganzrationale Funktionen) 63

C) Gegenseitige Lage von zwei Kurven

Beispiel

Bei der Produktion eines Artikels werden die Gesamtkosten in € pro Tag, in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge x (in Stück), festgelegt durch:

$$K(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x + 200; 0 \leq x \leq 90$$

Der Betrieb hat einen konstanten Verkaufspreis von 14 € je Stück geplant.

- Beschreiben Sie die gegenseitige Lage von Gesamtkostenkurve und Erlösgerade.
- Bestimmen Sie grafisch und rechnerisch, für welche Stückzahlen der Erlös und die Gesamtkosten gleich groß sind (Gewinnschwelle und Gewinngrenze).
- Für welche Produktionsmenge beträgt der Gewinn 100 €?

Lösung

a) Kostenkurve und Erlösgerade
Erlösfunktion E mit: $E(x) = 14x$
(10 Stück = 1 LE; 200 € = 1 LE)

Kostenkurve und Erlösgerade schneiden sich in zwei Punkten.

b) Aus der Zeichnung: Erlös und Gesamtkosten sind gleich groß in $x = 20$ bzw. $x = 80$.
Berechnung der Schnittpunkte von Erlösgerade und Gesamtkostenkurve
Bedingung: $E(x) = K(x)$
Nullform:
$$\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x + 200 = 14x$$

Lösung (Schnittpunkte):
$$x_1 = 20, x_2 = 80$$

Polynomfunktionen (Ganzrationale Funktionen) 67

Aufgaben

- Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der Schaubilder K von f und G von g .
a) $f(x) = x^2$; $g(x) = 4x$ b) $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = 2x$ c) $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$
- Untersuchen Sie, ob die Parabel K von f und die Gerade G von g gemeinsame Punkte besitzen. Bestimmen Sie deren Koordinaten. Wie liegen Parabel und Gerade zueinander?
a) $f(x) = 2x^2 - 6x + 2$; $g(x) = -2x + 8$ b) $f(x) = x^2 + x - 5$; $g(x) = 3x - 6$
- Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der beiden Graphen K von f und G von g . Welche Lage haben die beiden Graphen zueinander?
a) $K: f(x) = x^2 + 3x$ $G: g(x) = 0,5x^2$
b) $K: f(x) = 2x^2 - 4x + 8$ $G: g(x) = x^2 + 2x - 1$
c) $K: f(x) = -x^2 + 3x - 1,5$ $G: g(x) = 2,5 - x - x^2$
- K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 5x + 4$; $x \in \mathbb{R}$.
a) Die Gerade g mit der Gleichung $y = \frac{3}{2}x + 3$ schneidet K in zwei Punkten S_1 und S_2 . Berechnen Sie die Koordinaten von S_1 und S_2 .
b) Zeigen Sie: Die Ursprungsgerade h mit der Steigung $m = -\frac{3}{2}$ berührt K . Geben Sie die Koordinaten des Berührungspunktes an.
Welche auf der Geraden h senkrecht stehende Gerade schneidet K in $P(\frac{1}{3} | \frac{1}{3})$?
- K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = (1-x)(2x+5)$; $x \in \mathbb{R}$.
a) Die Gerade g verläuft parallel zur x -Achse durch $A(1 | 3)$. Wie liegen K und g zueinander?
Welche Parallele zu g ist Tangente an K von f ?
b) Welche Gerade mit Steigung -3 berührt K ?
c) Zeigen Sie: Die Gerade h mit der Gleichung $y = -\frac{3}{2}x + 9$ und die Parabel K von f haben keinen gemeinsamen Punkt.
- Die Abbildung zeigt die Parabeln K von f mit $f(x) = -0,5x^2 - x + 3$ und G von g mit $g(x) = x^2 - 8x + 12$.
Beschreiben Sie die Achsen.
Ordnen Sie jeder Funktion ihr Schaubild zu.
Begründen Sie Ihre Wahl.
Zeigen Sie, die Gerade h schneidet eine Parabel und berührt die andere Parabel.
- Gegeben ist die Kostenfunktion K mit: $K(x) = 0,02x^3 + 2x + 160$; $x > 0$.
a) Welche Ursprungsgerade h schneidet die Kostenkurve in $x = 20$?
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden und die Koordinaten des weiteren Schnittpunktes. In welchem Bereich verläuft die Gerade h oberhalb der Parabel?
Interpretieren Sie den Sachverhalt ökonomisch.
b) Zeigen Sie: Die Ursprungsgerade mit Steigung h berührt die Kostenkurve.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes.

Hinweis: Das Kapital verdoppelt sich bei dem Wachstumsfaktor 100:
 $y = 1000 e^{0,07701t}$ bezeichnet man als **Wachstums Gleichung**.

Beachten Sie:

Prozesse **exponentiellen Wachstums** können mit einer Exponentialfunktion beschrieben werden: $f(t) = a e^{kt}$; $t > 0$
 $k > 0$ ist die **Wachstumskonstante**; $a = f(0)$ ist der **Anfangsbestand**.

b) Best. für die **Verdoppelungszeit**: $f(t) = 2 \cdot f(0)$
 $2000 = 1000 e^{0,07701t}$
 $e^{0,07701t} = 2$
 $t = \frac{\ln(2)}{0,07701} \approx 9,0$

Logarithmieren ergibt:

Anhang: Grundwissen

Die Schüler im Berufskolleg kommen aus verschiedenen Schularten mit unterschiedlichen Vorkenntnissen. Um die Schüler dennoch möglichst schnell auf ein gleiches Wissensniveau zu bringen und damit gleiche Ausgangsbedingungen für den Mathematikunterricht zu schaffen, gibt es ein umfangreiches **Kapitel zur Wiederholung** der grundlegenden Rechentechniken und aller mathematischen Grundlagen aus der Mittelstufe.

Die **Heftklammer** im Lehrbuch mit Seitenangabe weist auf ein entsprechendes Grundwissenkapitel im Anhang hin.

Die Aufgaben „**Modellierung einer Situation**“ und „**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**“ werden im Anhang ausführlich gelöst.

Gleichung und Gleichungssystem 163

3 Gleichung und Gleichungssystem

3.1 Lineare Gleichungen

Beispiel

Gegeben ist die Gleichung $4x - 2 = 8$.
Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Umformung der Gleichung zur Bestimmung der Lösungsmenge L.
Auf beiden Seiten 2 addieren $4x - 2 = 8 \quad | +2$
 $4x = 10 \quad | :4$
 $x = 2,5$
Lösungsmenge: $L = \{2,5\}$
Probe: $x = 2,5$ einsetzen ergibt $4 \cdot 2,5 - 2 = 8$
 $10 - 2 = 8$ wahre Aussage
Alle Elemente, die zu einer wahren Aussage führen, gehören zur Lösungsmenge L.

Eine Gleichung (äquivalent) umformen heißt,
– beide Seiten der Gleichung mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) multiplizieren,
– beide Seiten durch die gleiche Zahl ($\neq 0$) dividieren,
– auf beiden Seiten die gleiche Zahl addieren oder subtrahieren.

Beispiel

56 1 Funktionen

2.2.3 Quadratische Gleichungen und geometrische Interpretation

A) Lösung von quadratischen Gleichungen

Wurzelziehen	Nullprodukt
Beispiel: $x^2 = 9$ Wurzelziehen: $x_{1/2} = \pm \sqrt{9}$ Lösung: $x_{1/2} = \pm 3$	Beispiel: $(x - 3)(x + 5) = 0$ Satz vom Nullprodukt: $x - 3 = 0$ oder $x + 5 = 0$ Lösung: $x_1 = 3; x_2 = -5$
Ausklammern	abc-Formel
Beispiel: $x^2 - 7x = 0$ Ausklammern: $x(x - 7) = 0$ Satz vom Nullprodukt: $x = 0$ v. $x - 7 = 0$	Beispiel: $x^2 - 2x - 8 = 0$ abc-Formel: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Mit $a = 1, b = -2, c = -8$

Polynomfunktionen (Ganzrationale Funktionen) 47

2.2 Quadratische Funktionen

Modellierung einer Situation

Die Firma Waldner stellt unter anderem ein medizinisches Gerät her.
Die Herstellkosten sind in der Tabelle aufgelistet.

Menge in Stück	0	10	40
Herstellkosten K(x) in 1000 €	8	10,25	16

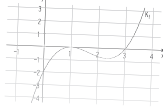
Eine Markuntersuchung ergibt einen mittleren Verkaufspreis von 2425 € pro Stück.
Die Geschäftsleitung erwartet von Ihnen eine fundierte Analyse der Gewinnfunktion und Aufschluss über die Produktionszahl.
Überraschend meldet sich ein chinesischer Konkurrent mit einem vergleichbar leistungsfähigen Gerät auf dem Markt und bietet das Gerät für 1925 € an.
Kann die Firma Waldner ihr Gerät zu diesem Preis anbieten? Erläutern Sie Ihre Antwort.



122 Funktionen

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

Bestimmen Sie einen geeigneten Funktionsterm f mithilfe der Abbildung.



Inhaltsverzeichnis

Vorwort

5

I Funktionen

11

1 Einführung in Funktionen	11
1.1 Das rechtwinklige Koordinatensystem	12
1.2 Abhängigkeiten und grafische Darstellung	15
1.3 Definition einer Funktion	17
2 Polynomfunktionen (Ganzrationale Funktionen)	22
2.1 Lineare Funktionen	22
2.1.1 Einführung	23
2.1.2 Die Steigung einer Geraden	25
2.1.3 Punktprobe	29
2.1.4 Aufstellen von Geradengleichungen	30
2.1.5 Schnittpunkte	34
2.1.6 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	43
2.2 Quadratische Funktionen	47
2.2.1 Einführungsbeispiel	48
2.2.2 Von der Normalparabel zur allgemeinen Parabel	49
2.2.3 Quadratische Gleichungen und geometrische Interpretation	56
2.2.4 Aufstellen von Parabelgleichungen	69
2.2.5 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	77
2.3 Polynomfunktionen höheren Grades	81
2.3.1 Potenzfunktionen	82
2.3.2 Polynomfunktionen 3. Grades – Einführung	84
2.3.3 Polynomfunktionen 4. Grades – Einführung	88
2.3.4 Polynomgleichungen und geometrische Interpretation	93
2.3.5 Aufstellen von Funktionstermen	109
2.3.6 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	117
3 Exponentialfunktionen	123
3.1 Einführungsbeispiele	124
3.2 Definition einer Exponentialfunktion	126
3.3 Die Euler'sche Zahl e	128
3.4 Exponentialfunktionen zur Basis e	129
3.5 Schaubilder von Exponentialfunktionen	131
3.6 Exponentialgleichungen und geometrische Interpretation	137
3.6.1 Der natürliche Logarithmus	137
3.6.2 Exponentialgleichungen	138
3.6.3 Bestimmung von gemeinsamen Punkten	142
3.7 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	147
3.7.1 Exponentielles Wachstum	147
3.7.2 Beschränktes Wachstum	153

Grundwissen	
1 Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen.....	156
2 Algebraische Begriffe und Vorübungen	157
2.1 Begriffe.....	157
2.2 Rechnen mit Summen und Differenzen.....	157
2.3 Rechnen mit Brüchen	159
2.4 Vereinfachung durch Ausklammern	160
2.5 Rechnen mit Potenzen	161
3 Gleichung und Gleichungssystem.....	163
3.1 Lineare Gleichungen	163
3.2 Lineare Gleichungssysteme	165
3.3 Quadratische Gleichungen	167
4 Lösungen der Aufgaben im Kapitel „Grundwissen“.....	171
Lösungen der Modellierungen und Tests	174
Mathematische Zeichen	185
Stichwortverzeichnis	186
Abbildungsverzeichnis.....	188