Bohner | Ott | Deusch | Rosner

Mathematik – Jahrgangsstufen 1 und 2
Grundlegendes Anforderungsniveau

Berufliches Gymnasium
Baden-Württemberg

Analysis
Vektorielle Geometrie
Stochastik

Ausführliche Lösungen
zu im Buch gekennzeichneten Aufgaben

ab 1. Auflage 2022
ISBN 978-3-8120-1105-1

Geogebra interaktiv

Lern- und Erklärvideos

Merkur Verlag Rinteln

Lehrbuch Seite 29

1 $p = \frac{2\pi}{b}$

d) $|a| = 4$; $b = \pi$; $p = \frac{2\pi}{\pi} = 2$; $y = 3$

e) $|a| = 6$; $b = \frac{1}{2}$; $p = 4\pi$; $y = 3$

f) $|a| = 2$; $b = \frac{\pi}{2}$; $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$; $y = -3$

Lehrbuch Seite 37

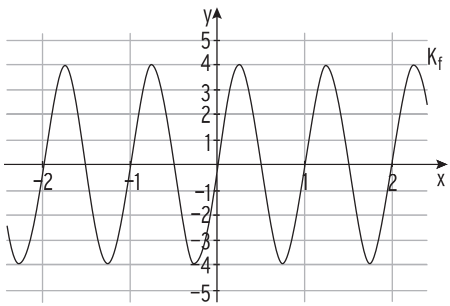
2 Ansatz mit Sinus, da ein Symmetriepunkt auf der y-Achse liegt.

$a = 4$

$b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

Keine Verschiebung in x-Richtung.

$f(x) = 4\sin(2\pi x)$

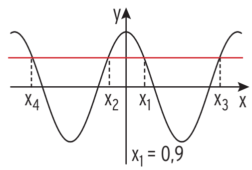


Lehrbuch Seite 44

8 a) $x_1 = 0{,}9$; $x_2 = -0{,}9$

$x_3 = x_2 + 2\pi = 5{,}38$

$x_4 = -x_3 = -5{,}38$

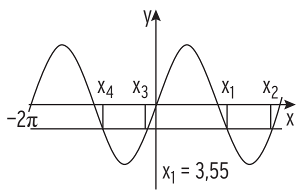


b) $x_1 = 3{,}55$; $x_2 = 2\pi - (3{,}55 - \pi) = 3\pi - 3{,}55 = 5{,}87$

$x_3 = 5{,}87 - 2\pi = -0{,}41$

$x_4 = 3{,}55 - 2\pi = -2{,}73$

oder: $x_4 = -2\pi + x_1 = -2\pi + 3{,}55 = -2{,}73$



Lehrbuch Seite 77

4 a) $f(x) = \frac{1}{7}x^3 + 3x - 5 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{7}x^2 + 3$ Konstanter Summand fällt weg.

b) $f(x) = \frac{1}{4}(8 - 2x^2) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}(-4x) = -x$ Konstanter Faktor $\frac{1}{4}$ bleibt erhalten.

$f(x) = \frac{1}{4}(8 - 2x^2) = 2 - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = -x$

c) $g(x) = xe^x \Rightarrow g'(x) = 1 \cdot e^x + xe^x = (x + 1)e^x$ (Produktregel)

$f(x) = x^2 + xe^x \Rightarrow f'(x) = 2x + (x + 1)e^x$

d) $f(x) = \sin(3x)e^{2x}$ Mithilfe der Produkt- und Kettenregel

$f'(x) = 3\cos(3x)e^{2x} + \sin(3x) \cdot 2e^{2x} = (3\cos(3x) + 2\sin(3x))e^{2x}$

e) $f(x) = e^{\sin(x)} \Rightarrow f'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$ (Kettenregel)

f) $g(x) = x^2e^{3x-5} \Rightarrow g'(x) = 2xe^{3x-5} + x^2e^{3x-5} \cdot 3 = (2x + 3x^2)e^{3x-5}$

$f(x) = 4x^2 + x^2e^{3x-5} \Rightarrow f'(x) = 8x + (2x + 3x^2)e^{3x-5}$

g) $f(x) = e^{4x}(x - x^2)$ mit der Produkt- und Kettenregel

$f'(x) = 4e^{4x}(x - x^2) + e^{4x}(1 - 2x) = e^{4x}(1 + 2x - 4x^2)$

h) $f(a) = e^a(e^{-a} + 3) = e^{a-a} + 3e^a = e^0 + 3e^a = 1 + 3e^a$

$f'(a) = 3e^a$ a ist die Funktionsvariable, nach der abgeleitet wird.

i) $f(u) = \frac{5}{u} + 2\sqrt{u} = 5u^{-1} + 2u^{0,5}$

$f'(u) = -5u^{-2} + 2 \cdot 0{,}5u^{-0,5} = -\frac{5}{u^2} + u^{-0,5}$

j) $f(x) = 5 + 3xe^{-ax}$

$f'(x) = 3e^{-ax} + 3xe^{-ax} \cdot (-a) = (3 - 3ax)e^{-ax} = 3(1 - ax)e^{-ax}$

k) $f(x) = \frac{t}{2}x^4 + 2tx^2 - \pi$

$f'(t) = 2tx^3 + 4tx$ Konstanter Summand π fällt weg.

l) $f(x) = e^{x^2} + e^x + e$

$f'(x) = 2xe^{x^2} + e^x$ Konstanter Summand e fällt weg.

Lehrbuch Seite 82

4 $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x - 3) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2$; $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$

a) Tangente in $W(1 \mid -\frac{1}{2})$: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

Punktprobe mit $P(3 \mid -2)$ ergibt eine wahre Aussage.

b) Stellen mit Steigung $\frac{9}{4}$

Bedingung: $f'(x) = \frac{9}{4}$ $\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{9}{4}$

Lösungen: $x_1 = 3$; $x_2 = -1$

Tangente in $x_1 = 3$: $y = \frac{9}{4}x - \frac{27}{4}$

Tangente in $x_2 = -1$: $y = \frac{9}{4}x + \frac{5}{4}$

c) Punkte mit waagrechter Tangente

Bedingung: $f'(x) = 0$

Stellen: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$

Punkte: $O(0 \mid 0)$; $E(2 \mid -1)$

d) Stellen mit Steigung 6

Bedingung: $f'(x) = 6$ $\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = 6$

Lösungen: $x_1 = 4$; $x_2 = -2$

Punkte: $P(4 \mid 4)$; $Q(-2 \mid -5)$

e) Stellen mit Steigung 18

Bedingung: $f'(x) = 18$ $\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = 18$

Lösungen: $x_1 = 6$; $x_2 = -4$

y-Werte berechnen: $f(6) = 27$; $f(-4) = -28$

$y = 18 \cdot 6 - 81 = 27$; $y = 18 \cdot (-4) - 81 = -153$

Der Punkt $B(6 \mid 27)$ liegt auf K und H. H ist eine Tangente an K.

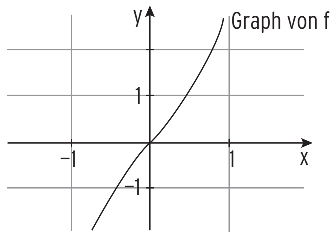
Lehrbuch Seite 88

5 a) $f'(x) > 1$

Die Steigung des Graphen von f ist größer als 1,

f ist streng monoton wachsend.

Z. B. $f(x) = x^3 + 2x$

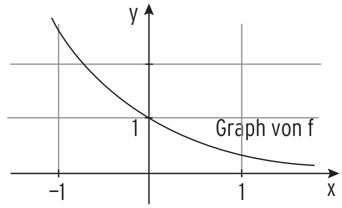


b) $f'(x) \leq 0$

f ist monoton fallend.

Z. B. $f(x) = e^{-x}$

der Graph von f kann z. B. auch eine Parallele zur x-Achse sein.



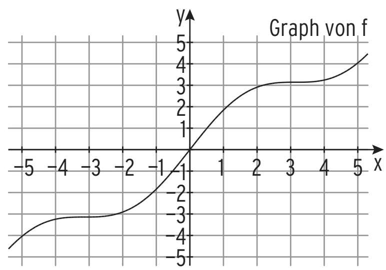
c) $f'(x) \in [0; 2]$

f ist (streng) monoton wachsend.

Steigungen zwischen 0 und 2

Z. B. $f(x) = x + \sin(x)$

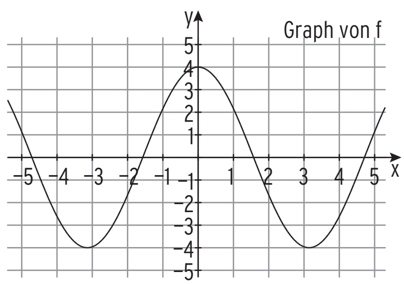
Waagrechte Tangente in $x = \pm\,\pi$



d) $f(x) \in [-4; 4]$

Funktionswerte zwischen − 4 und 4

Z. B. $f(x) = 4\cos(x)$



Lehrbuch Seite 94

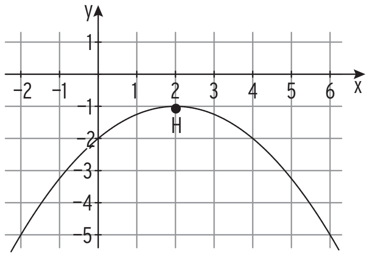
1 a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 2$

$f'(x) = -\frac{1}{2}x + 1$; $f''(x) = -\frac{1}{2} < 0$

Bedingung: $f'(x) = 0$ für $x_1 = 2$

$f''(2) < 0$

$H(2 \mid -1)$



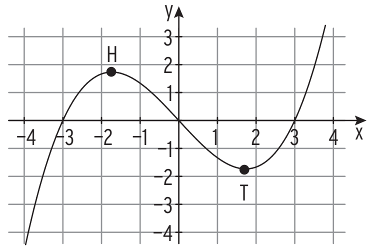
b) $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 9x)$

$f'(x) = \frac{1}{6}(3x^2 - 9)$; $f''(x) = x$

Bedingung: $f'(x) = 0$ für $x_{1|2} = \pm\sqrt{3}$

$f''(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3} < 0$; $f''(\sqrt{3}) = \sqrt{3} > 0$

$H(-\sqrt{3} \mid \sqrt{3})$; $T(\sqrt{3} \mid -\sqrt{3})$



c) $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5$

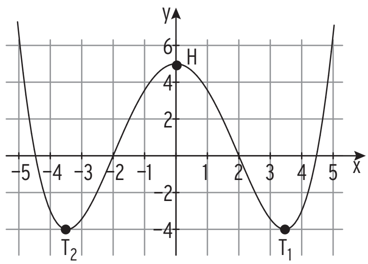
$f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$; $f''(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$

Bedingung: $f'(x) = 0$ für $x_1 = 0$; $x_{2|3} = \pm\sqrt{12}$

$f''(0) = -3 < 0$; $f''(\pm\sqrt{12}) = 6 > 0$

$H(0 \mid 5)$

$T_1(\sqrt{12} \mid -4)$; $T_2(-\sqrt{12} \mid -4)$



Lehrbuch Seite 94

1 d) $f(x) = -x - 2 + e^{0,5x}$

$f'(x) = -1 + 0{,}5e^{0,5x}$; $f''(x) = 0{,}25e^{0,5x} > 0$

Bedingung: $f'(x) = 0$ für $x_1 = 2\ln(2)$

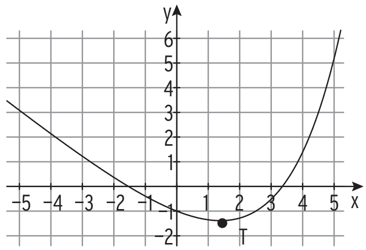
$f''(2\ln(2)) > 0$

Mit $e^{0,5 \cdot 2\ln(2)} = 2$ erhält man

$f(2\ln(2)) = -2\ln(2)$

Extrempunkt des Graphen von f:

Tiefpunkt $T(2\ln(2) \mid -2\ln(2))$



e) $f(x) = 2\sin(2x) + 1$; $x \in \,]-1; 4[$

$f'(x) = 4\cos(2x)$; $f'(x) = -8\sin(2x)$

Bedingung: $f'(x) = 0$

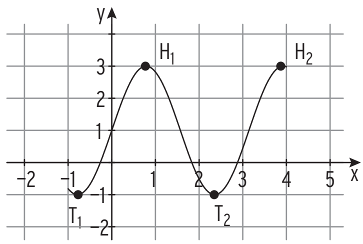
für $x_1 = -\frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{\pi}{4}$; $x_3 = \frac{3}{4}\pi$; $x_4 = \frac{5}{4}\pi$

$f''(x_{1|3}) > 0$; $f''(x_{2|4}) < 0$

Extrempunkte des Graphen von f:

$T_1(-\frac{\pi}{4} \mid -1)$; $H_1(\frac{\pi}{4} \mid 3)$

$T_2(\frac{3}{4}\pi \mid -1)$; $H_2(\frac{5}{4}\pi \mid 3)$



f) $f(x) = \frac{1}{x} + x$; $x \neq 0$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$; $f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^3}$

Bedingung: $f'(x) = 0$ für $x_{1|2} = \pm 1$

$-\frac{1}{x^2} + 1 = 0 \quad | \cdot x^2$

$-1 + x^2 = 0$

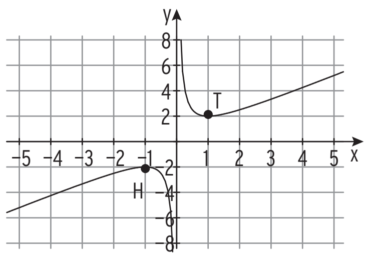
$x^2 = 1$

$x_{1|2} = \pm 1$

$f''(-1) = -2 < 0$; $f''(1) = 2 > 0$

$f(-1) = -2$; Hochpunkt $H(-1 \mid -2)$

$f(1) = 2$; Tiefpunkt $T(1|2)$



Lehrbuch Seite 95

15 $K(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + 10$

$K'(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$; $K''(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

$K'(x) = 0$ hat wegen $D = (\frac{3}{4})^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} < 0$ keine Lösung

$K'(0) = \frac{3}{2}$, also gilt $K'(x) > 0$ für $x > 0$: K ist monoton wachsend.

$K'(x)$ ist am geringsten,

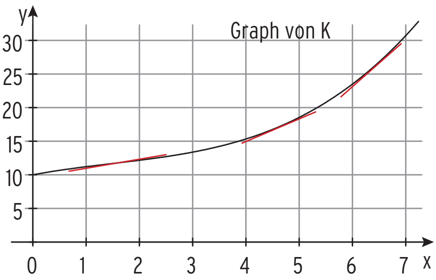
wenn $K''(x) = 0$: $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$

$x = \frac{3}{2}$

Produktionsmenge, bei der sich die Gesamtkosten am geringsten ändern:

$x = \frac{3}{2}$

Kostenänderung $K'(\frac{3}{2}) = \frac{15}{16}$



Lehrbuch Seite 102

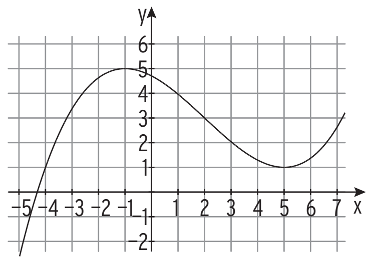
3 $f(x) = e^{-3x} + x + 2$; $f'(x) = -3e^{-3x} + 1$; $f''(x) = 9e^{-3x}$

$f''(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$

K ist eine Linkskurve. Maria hat Recht.

Lehrbuch Seite 103

18 Schaubild einer Polynomfunktion 3. Grades



Lehrbuch Seite 116

4 $f(x) = ax^3 + bx^2 + \frac{9}{2}x$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + \frac{9}{2}$

Waagrechte Tangente an der Stelle 1: $f'(1) = 0$	$3a + 2b + \frac{9}{2} = 0$
Waagrechte Tangente an der Stelle 3: $f'(3) = 0$	$27a + 6b + \frac{9}{2} = 0$
Lösung des linearen Gleichungssystems:	$a = \frac{1}{2}$; $b = -3$
Funktionsterm:	$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x$

A ist der Wendepunkt.

Lehrbuch Seite 116

7 Ziel: $f(x) = a\cos(b(x - c)) + d$

Start: $g(x) = \cos(bx)$

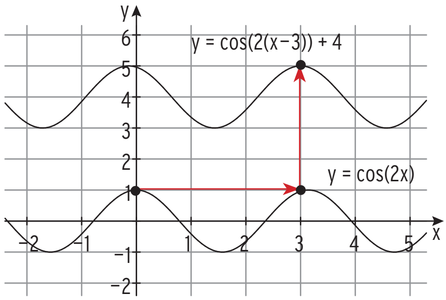
Periode $p = \pi$: $b = \frac{2\pi}{p} = 2$

Ansatz: $g(x) = \cos(bx)$ $g(x) = \cos(2x)$

Hochpunkt von G: $H(0 \mid 1)$

Verschiebt man G um 3 nach rechts und um 4 nach oben, so hat die verschobene Kurve den Hochpunkt $H(3 \mid 5)$.

Funktionsterm: $f(x) = \cos(2(x - 3)) + 4$



Alternative:

mit dem Ansatz: $g(x) = \sin(2x)$

Hochpunkt von G: $H(\frac{\pi}{4} \mid 1)$

Verschiebt man G um $3 - \frac{\pi}{4}$ nach rechts und um 4 nach oben, so hat die verschobene Kurve den Hochpunkt $H(3 \mid 5)$.

Funktionsterm: $f(x) = \sin(2(x - (3 - \frac{\pi}{4}))) + 4$

Lehrbuch Seite 125

4 $f(t) = a\,te^{bt}$

Bedingungen: $f(2) = 33{,}8 \qquad 2ae^{2b} = 33{,}8 \;(1)$

$f(4) = 24{,}9 \qquad 4ae^{4b} = 24{,}9 \;(2)$

Aus (1): $e^{2b} = \frac{16{,}9}{a}$ **Hinweis:** $e^{4b} = (e^{2b})^2 = (\frac{16{,}9}{a})^2$

in (2): $4a(\frac{16{,}9}{a})^2 = 24{,}9$

$\frac{1142{,}44}{a} = 24{,}9 \Rightarrow a = 45{,}88$

Aus $e^{2b} = \frac{16{,}9}{45{,}88} \Rightarrow b = -\,0{,}5$

$f(t) = 45{,}88\,te^{-\,0{,}5t}$; $f'(t) = e^{-\,0{,}5t}(-\,22{,}94t + 45{,}88)$

$f'(t) = 0$ für $t = 2$

$f(0) = 0$; $f(t) \to 0$ für $t \to \infty \quad \Rightarrow t = 2$ ist Maximalstelle

Die Behauptung stimmt.

Lehrbuch Seite 126

7 a) $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$; Schaubild verläuft durch O(0 | 0): $d = 0$

$s'(x) = 3at^2 + 2bt + c$; $s''(x) = 6at + 2b$

$s'(0) = v(0) = 0$: $c = 0$

$s''(0) = 3$: $2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$

$s''(7{,}5) = 0$: $45a + 2b = 0$

Mit $b = \frac{3}{2}$ erhält man: $45a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{15}$

$s(t) = -\frac{1}{15}t^3 + \frac{3}{2}t^2$

$s'(t) = v(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 3t$; $s''(t) = a(t) = -\frac{2}{5}t + 3$

b) Die Geschwindigkeit nimmt zu bis $s''(t) = a(t) = 0$

$-\frac{2}{5}t + 3 = 0$

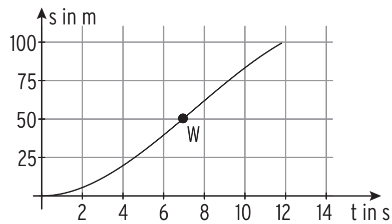
$t = 7{,}5$

Für $t < 7{,}5$ nimmt die Geschwindigkeit zu:

Beschleunigung: $a(t) = s''(t) > 0$ (Wendestelle $t = 7{,}5$)

c) Laufzeit $s(t) = 100$ für $t = 11{,}89$ (s)

mit Hilfsmittel oder mit einer verfeinerten Wertetabelle im WTR



d) Mittlere Geschwindigkeit: $v = \frac{100}{11{,}9} = 8{,}4$

Größte Geschwindigkeit: $v'(t) = s''(t) = 0$

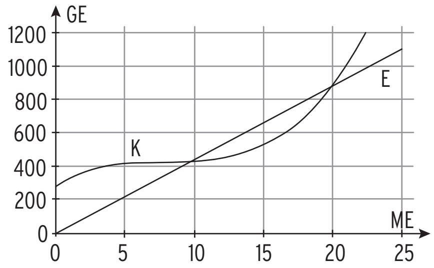
$t = 7{,}5$

$v_{max} = v(7{,}5) = 11{,}25$

Die größte Geschwindigkeit nach 7,5 s ist $11{,}25\ \frac{m}{s}$.

Lehrbuch Seite 127

9 a) Zeichnung: $E(x) = 44x$



b) Gewinnfunktion G:

$G(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 6x^2 - 6x - 280$

$G(6) = -154$; Verlust

$G(20) = 0$ Kostendeckung

$G'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 12x - 6$; $G''(x) = -\frac{3}{2}x + 12$

Maximaler Gewinn

Bedingung: $G'(x) = 0$ $\quad -\frac{3}{4}x^2 + 12x - 6 = 0$

$x_1 = 15{,}48$; $x_2 = 0{,}52$

Nachweis: $G''(15{,}48) < 0$; $G''(0{,}52) > 0$

Der maximale Gewinn liegt bei 15,48 ME und beträgt 137,53 GE.

c) $\frac{K(15) - K(10)}{5} = \frac{93{,}75}{5} = 18{,}75$

Die durchschnittliche Zunahme der Kosten beträgt 18,75 GE pro ME.

d) Minimaler Kostenzuwachs: $K''(x) = 0$

$x = 8$

$K'(8) = 2$

Die Stelle mit minimalem Kostenzuwachs ist die Wendestelle.

Wird die Produktion von 8 ME auf 9 ME erhöht, so beträgt

der Kostenzuwachs 2 GE/ME.

Lehrbuch Seite 131

5 Abstand: $d(x) = 0{,}021x^2 - 1{,}072x + 25 - 0{,}2x$

Zielfunktion: $d(x) = 0{,}021x^2 - 1{,}272x + 25;\ 0 \leq x < 70$

Untersuchung von d auf ein Minimum

Ableitung: $d'(x) = 0{,}042x - 1{,}272$

Notwendige Bedingung: $d'(x) = 0 \quad 0{,}042x - 1{,}272 = 0$

$x = 30{,}3 \in [0; 70[$

Nachweis: Das Schaubild von d ist eine nach oben geöffnete Parabel.

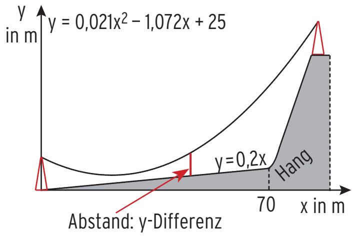
d besitzt somit bei x = 30,3 ein globales (absolutes) Minimum.

d wird minimal für x = 30,3.

Minimaler Abstand: d(30,3) = 5,7

Der minimale Abstand beträgt 5,7 m,

die Vorschrift wird eingehalten.



Lehrbuch Seite 138

2 a) $F(x) = x + \frac{5}{2}\cos(x) + C$ Ein konstanter Summand fällt beim Ableiten weg.

b) $F(x) = -2\sin(x) - \frac{1}{3}x^3 + C$

c) $F(x) = tx - t^2\cos(x) + C$ t und t^2 werden wie Zahlen behandelt

d) $F(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2}e^x + C$

e) $F(x) = t(e^x - x) + C$ $t(e^x - x)$ muss nicht ausmultipliziert werden.

f) $F(x) = -\frac{1}{72}tx^4 - \sin(x) + C$ Der Parameter t ist eine konstante reelle Zahl.

g) $F(x) = (t + 1) \cdot (-\cos(x) - 0{,}5x^2) + C = -(t + 1) \cdot (\cos(x) + 0{,}5x^2) + C$

h) $F(x) = -4e^x - \frac{1}{4}x^2 + 4x + C$

i) $F(x) = -(\frac{2}{3}e^x - 3x) + c = -\frac{2}{3}e^x + 3x + C$

j) $F(x) = e \cdot e^x + \frac{e}{2}x^2 + C$ e ist eine konstante Zahl; $e = 2{,}718...$

k) $F(x) = e^x(1 - e) + C$ $(1 - e)$ ist ein konstanter Faktor

l) $F(x) = ae^x + bx + C$

Lehrbuch Seite 141

5 Stammfunktion von f: $F(x) = -2x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x + C$

Punktprobe mit A(− 1 I 2): $2 = -2(-1)^4 + \frac{1}{3}(-1)^3 - 3(-1) + C$

$(-1)^4 = 1$; $(-1)^3 = -1$ $2 = -2 - \frac{1}{3} + 3 + C$

$C = \frac{4}{3}$

Stammfunktion von f: $F(x) = -2x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x + \frac{4}{3}$

Lehrbuch Seite 145

6 Nullstelle von f mit VZW ist Extremstelle von F

$x = 0$: Minimalstelle von F

$x = 3$: Maximalstelle von F

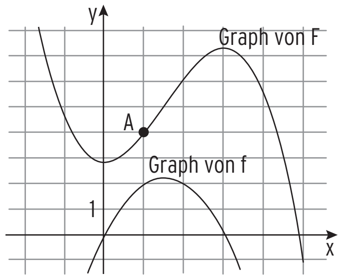
in $x = 1{,}5$ hat der Graph von F die größte

Steigung: 2,25

Ein Schaubild einer Stammfunktion

zeichnen und so nach oben verschieben,

dass es durch A(1 | 4) verläuft.



Lehrbuch Seite 151

1 a) $\int_{-1}^{2}(-x^2 - 2x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-2}^{a} = -\frac{1}{3}a^3 - a^2 + \frac{4}{3} = 7{,}5$

b) $\int_{0}^{4}(-2x^3 + \sin(2x))dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}\cos(2x)\right]_{0}^{4} = -127{,}4$

c) $\int_{0}^{-1}(3x + \frac{5}{2}e^{-x})dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}e^{-x}\right]_{0}^{-1} = -2{,}80$

d) $\int_{1}^{6}(-3\cos(\frac{\pi}{4}x))dx = \left[-\frac{12}{\pi}\sin(\frac{\pi}{4}x)\right]_{1}^{6} = 6{,}52$

e) $\int_{-2}^{2}(0{,}25x^3 + x)dx = \left[\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{2} = 0$

f) $\int_{0}^{\frac{2}{3}\pi}(\sin(3x))dx = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right]_{0}^{\frac{2}{3}\pi} = 0$

g) $\int_{-1}^{4}(ax + x^3)dx = \left[\frac{a}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{4} = 7{,}5a + 63{,}75$

h) $\int_{-2}^{x}(u^4 - \frac{1}{4}u^2)\,du = \left[\frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{12}u^3\right]_{-2}^{x} = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{86}{15}$

i) $\int_{-1}^{2}(\frac{x^4}{4} - \frac{x}{3}x)\,dx = \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^2\right]_{-1}^{2} = \frac{23}{20}$

Lehrbuch Seite 159

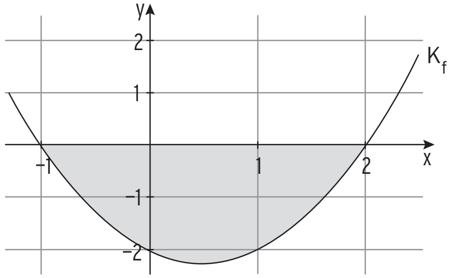
1 a) Nullstellen: – 1; 2

Skizze:

$f(x) = (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$\int_{-1}^{2} f(x)dx = -\frac{9}{2}$; $A = \frac{9}{2}$



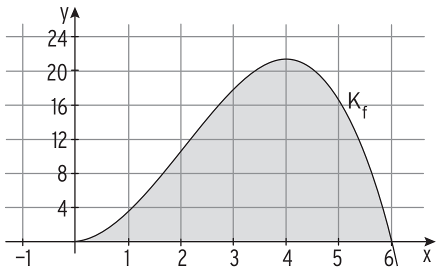
b) Nullstellen: 0; 6

Skizze:

$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2$

$F(x) = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{4}{3}x^3$

$\int_{0}^{6} f(x)dx = 72$



c) Nullstellen: 0; 3

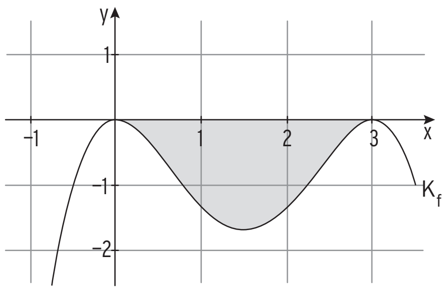
Skizze:

$f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + 2x^3 - 3x^2$

$F(x) = -\frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - x^3$

$\int_{0}^{3} f(x)dx = -\frac{27}{10}$

$A = \frac{27}{10}$



Lehrbuch Seite 160

14 Giebelrand: $f(x) = \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4$; $x \in [-4; 4]$

$$2\int_0^4 f(x)dx = f(x) = \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4 = 2\left[\frac{1}{320}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + 4x\right]_0^4 = 17{,}07$$

Farbverbrauch: $350 \cdot 17{,}07 = 5974{,}5$;

$2 \cdot 5974{,}5\ cm^3 = 11{,}949$ Liter

Es müssen mindestens 3 Dosen Farbe geliefert werden.

Lehrbuch Seite 173

1 $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$; $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$; $f''(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$; $f'''(x) = \frac{3}{4} \neq 0$

a) Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $\quad x = 2$

Mit $f(2) = 2$; $f'(2) = -\frac{3}{2}$ und $f'''(x) = \frac{3}{4} \neq 0$ erhält man den

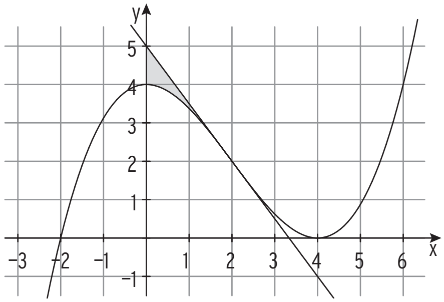
Wendepunkt $W(2 \mid 2)$ und die Wendetangente mit $y = -\frac{3}{2}x + 5$

Fläche zwischen Wendetangente

und y-Achse:

$\int_0^2 (-\frac{3}{2}x + 5 - f(x))dx = \frac{1}{2}$

$A = \frac{1}{2}$



b) $U(-2 \mid 0)$; $V(6 \mid 4)$ sind Kurvenpunkte.

Gerade g durch U und V: $g(x) = 0{,}5x + 1$

K und g schneiden sich in U, V und

im Wendepunkt

Schnittstellen: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; $x_3 = 6$

(aus der gegebenen Zeichnung zu

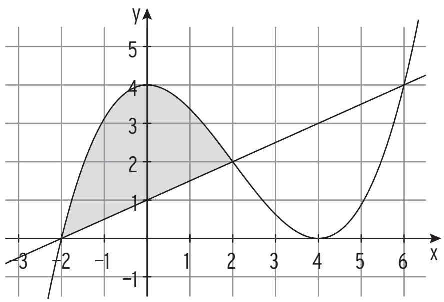
entnehmen)

Fläche zwischen K und der Geraden

im 1.und 2. Feld:

$\int_{-2}^2 (f(x) - (\frac{1}{2}x + 1))dx = 8$

$A = 8$



c) Dreiecksfläche: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$

$\int_2^4 f(x)dx = 1{,}5$; $A = 4 + 1{,}5 = 5{,}5$

Lehrbuch Seite 176

1 a) Bei gefüllter Rinne steht das Wasser 8 dm hoch.

Fläche zwischen Gerade (y = 8) und K:

$\int_{-4}^{4}(8 - f(x))dx = 34{,}13$; $A = 34{,}13$

Der Wasserquerschnitt ist etwa 34 dm^2 groß.

b) Höhe 3,5: Bedingung: f(x) = 3,5 $\quad -\frac{1}{32}x^4 + x^2 = 3{,}5$

Durch Substitution $x^2 = u$ erhält man: $\quad -\frac{1}{32}u^2 + u - 3{,}5 = 0$

$u^2 - 32u + 112 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung: $\quad u = 4;\ u = 28$

Lösungen in x: $\quad x_{1|2} = \pm 2;\ x_{3|4} = \pm 5{,}29$

Hinweis: $x_{3|4} = \pm 5{,}29$ ist nicht relevant.

Fläche zwischen Gerade (y = 3,5) und K: $\quad \int_{-2}^{2}(3{,}5 - f(x))dx = 9{,}07$

Der kleine Querschnitt beträgt $\frac{9{,}07}{34{,}13} = 26{,}6\ \%$ des maximalen Querschnitts.

Es fließen also 26,6 % der maximalen Wassermenge.

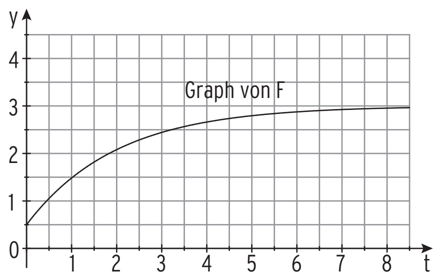
Lehrbuch Seite 178

1 a) Schaubild einer Stammfunktion F mit F(0) = 0,5

Integral über die Geschwindigkeit liefert die im Zeitraum [a; b] erreichte Höhe:

$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$

Stammfunktion $F(t) = -2{,}5e^{-0{,}5t} + 3$ mit $F(0) = 0{,}5$



b) $\int_0^1 v(t)dt$ Höhenzuwachs im 1. Jahr

$\int_1^4 v(t)dt$ Höhenzuwachs vom 1. bis zum 4. Jahr

$0{,}5 + \int_0^4 v(t)dt$ Höhe nach 4 Jahren

Lehrbuch Seite 186

1 a)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \end{array} \quad +\cdot(-2) \quad +\cdot(-3) \quad \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & 23 \end{array}\right) \quad + \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 20 & 80 \end{array}\right)$$

Dreiecksform

Letzte Gleichung: $20x_3 = 80$

$x_3 = 4$

Einsetzen von $x_3 = 4$ in die zweite Gleichung $3x_2 + 5x_3 = 11$: $3x_2 + 5 \cdot 4 = 11$

$x_2 = -3$

Einsetzen von $x_3 = 4$ und $x_2 = -3$ in die erste Gleichung $2x_1 + x_2 - x_3 = -3$: $2x_1 - 3 - 4 = -3$

$x_1 = 2$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array} \quad \cdot(-3) + \quad \cdot 2 +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 4 & 6 & 11 \end{array}\right) \quad +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Letzte Gleichung: $-2x_3 = -5 \Rightarrow x_3 = 2{,}5$

Einsetzen von $x_3 = 2{,}5$ ergibt: $-4x_2 - 8 \cdot 2{,}5 = -16 \Rightarrow x_2 = -1$

Einsetzen von $x_3 = 2{,}5$ und $x_2 = -1$: $x_1 - 1 + 2 \cdot 2{,}5 = 5 \Rightarrow x_1 = 1$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 187

7 Es können x_1 ME an W_1, x_2 ME an W_2 und x_3 ME an W_3 hergestellt werden.

	W_1	W_2	W_3
T_1	3	1	2
T_2	0	4	1
T_3	1	0	3

Gleichungen

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 448 \\ 4x_2 + x_3 &= 442 \\ x_1 + 3x_3 &= 330 \end{aligned}$$

LGS in Matrixschreibweise

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 1 & 0 & 3 & 330 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 0 & 1 & -7 & -542 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 0 & 0 & 29 & 2610 \end{array}\right)$$

Ergebnis: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 60 \\ 88 \\ 90 \end{pmatrix}$

Es können 60 ME an W_1, 88 ME an W_2 und 90 ME an W_3 hergestellt werden.

Lehrbuch Seite 195

2 c)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \end{array} \quad :2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \quad \cdot(-3) \; +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \quad + \; \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

Aus der 2. Zeile: $-4x_2 - 8x_3 = 1$

Wir wählen z. B. $x_3 = r$, $r \in \mathbb{R}$ (x_3 ist frei wählbar).

Durch Einsetzen berechnet man x_2 in

Abhängigkeit von r: $-4x_2 - 8r = 1$

$x_2 = -0{,}25 - 2r$

Einsetzen in $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ ergibt: $x_1 + 2 \cdot (-0{,}25 - 2r) + 3r = 0$

$x_1 = 0{,}5 + r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 + r \\ -0{,}25 - 2r \\ r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

Lösungsmenge: $L = \{ \vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 + r \\ -0{,}25 - 2r \\ r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}\}$

Lehrbuch Seite 195

2 d)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 1 & 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 12 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} + \\ \cdot(-2) \\ + \cdot(-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 0 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} + \\ \cdot(-5) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 0 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

Aus der 2. Zeile: $5x_2 - 15x_3 = 5$

Wir wählen z. B. $x_3 = r$, $r \in \mathbb{R}$ (x_3 ist frei wählbar).

x_2 in Abhängigkeit von r: $5x_2 - 15r = 5$

$x_2 = 1 + 3r$

Einsetzen in $2x_1 + 5x_2 - x_3 = 25$ ergibt: $2x_1 + 5 \cdot (1 + 3r) - r = 25$

$x_1 = 10 - 7r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 - 7r \\ 1 + 3r \\ r \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

Lösungsmenge: $L = \{ \vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 - 7r \\ 1 + 3r \\ r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}\}$

Lehrbuch Seite 196

8 $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -9 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

$x_3 = r$, $r \in \mathbb{R}$ (frei wählbar): $x_2 + 3r = 2$

x_2 in Abhängigkeit von r: $x_2 = 2 - 3r$

x_1 berechnen: $2x_1 - (2 - 3r) + r = -2$

$x_1 = -2r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r \\ 2-3r \\ r \end{pmatrix}$

Vergleich der Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r \\ 2-3r \\ r \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen ergibt: $\begin{pmatrix} -2r \\ 2-3r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad$ $r = 7{,}5$; $r = 8$; $r = 8$

Es gibt kein r, so dass alle drei Gleichungen erfüllt sind.

Der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist kein Lösungsvektor.

Gleichung: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$x_1 = -2r$; $x_2 = 2 - 3r$; $x_3 = r$: $-2r + 2 - 3r + r = 1$

$r = 0{,}25$

Lehrbuch Seite 204

1 a) Aufpunkt: $A(-3 \mid 2 \mid 1)$

Richtungsvektor: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Geradengleichung von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

b) Aufpunkt: $A(0 \mid 0 \mid 3)$

Richtungsvektor: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Geradengleichung von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

c) Aufpunkt: $A(5 \mid 0 \mid 0)$

Richtungsvektor: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Geradengleichung von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

Lehrbuch Seite 204

7 Gerade h durch A und B:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$$

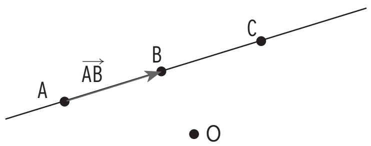
Probe mit C(5 | 0 | 8): $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

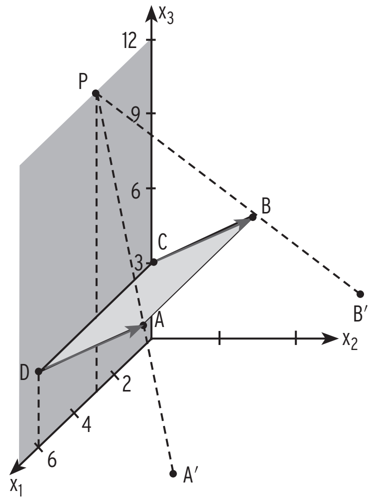
Für r = 2 ist die Gleichung erfüllt.

C liegt wegen r = 2 nicht zwischen A und B (nicht auf der Strecke AB).

Für $0 \leq r \leq 1$ erhält man Punkte auf der Strecke AB.



Lehrbuch Seite 208



8 $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Punkt A(6 | 3 | 7)

$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Punkt B(0 | 3 | 7)

Lichtquelle: P(3 | 0 | 12)

Gerade durch P(3 | 0 | 12) und A(6 | 3 | 7)

g_{AP}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

Der Punkt A′ liegt in der x_1x_2-Ebene, d. h. $x_3 = 0$.

A′ ist der Spurpunkt der Geraden g_{AP} mit der x_1x_2-Ebene.

$x_3 = 0$: $12 - 5r = 0$

$r = 2{,}4$

$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + 2{,}4 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10{,}2 \\ 7{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}$

S_{12} (10,2 | 7,2 | 0) = A′

Gerade durch P(3 | 0 | 12) und B(0 | 3 | 7)

g_{BP}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$

B′ ist der Spurpunkt der Geraden g_{BP} mit der x_1x_2-Ebene.

$x_3 = 0$: $12 + 5r = 0$

$r = -2{,}4$

$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} - 2{,}4 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}2 \\ 7{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}$

S_{12} (− 4,2 | 7,2 | 0) = B′

Lehrbuch Seite 214

1 a) Die Richtungsvektoren von g und h sind nicht parallel (nicht kollinear).

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

g und h schneiden sich in einem Punkt oder sind windschief.

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$r\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösen des Gleichungssystems: $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Das LGS ist damit eindeutig lösbar, somit schneiden sich die Geraden g und h in genau einem Punkt S.

Auflösung ergibt: $s = -1$ und $r = 2$

Ortsvektor des Schnittpunktes: $\vec{x} = \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt: $S(-5 \mid 2 \mid 3)$

b) Die Richtungsvektoren von g und h sind parallel (kollinear).

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Man überprüft, ob der Aufpunkt $P(4 \mid 5 \mid 1)$ von g auf der Geraden h liegt.

Punktprobe: $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} s = -3 \\ s = 1{,}5 \\ s = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Es gibt kein s, sodass alle drei Gleichungen erfüllt sind.

Die Geraden g und h sind parallel und verschieden (echt parallel).

Lehrbuch Seite 214

1 c) Die Richtungsvektoren von g und g sind parallel (kollinear).

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

g und h können echt parallel oder identisch sein.

Man überprüft, ob der Aufpunkt P(2 | − 5 | 1) von g auf der Geraden h liegt.

Punktprobe: $$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} s = 4 \\ s = 4 \\ s = 4 \end{matrix}$$

Es gibt ein s, sodass alle drei Gleichungen erfüllt sind.

Die Geraden g und h sind identisch.

d) Die Richtungsvektoren von g und h sind nicht parallel (nicht kollinear).

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq k\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

g und h schneiden sich in einem Punkt oder sind windschief.

Gleichsetzen: $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösen des Gleichungssystems für r und s:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & -12 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Das LGS ist damit unlösbar. g und h schneiden sich nicht.

g und h sind nicht parallel und schneiden sich nicht. Sie sind windschief.

Lehrbuch Seite 215

9 a) Die Richtungsvektoren sind parallel: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ $t = 2$

t = 2 einsetzen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ $1 = 2a$, $0 = 2b$

Dies ist erfüllt für a = 0,5 und b = 0.

Für a = 0,5 und b = 0 ist g_2 parallel zu g_1.

g_1 liegt in der x_1x_2-Ebene.

Der Aufpunkt A(0 | 0 | 1) von g_2 liegt aber nicht in der x_1x_2-Ebene.

$g_1 = g_2$ ist nicht möglich.

b) Punktprobe mit P(8 | 3 | 0): $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$

$8 = s$
$3 = sa$
$-1 = sb$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

Mit s = 8 erhält man $a = \frac{3}{8}$ und $b = -\frac{1}{8}$.

Lehrbuch Seite 224

2 a) $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \overrightarrow{OC} + r\overrightarrow{CB} + s\overrightarrow{CA}$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$

$\vec{x} = r\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OC}$ $\quad \vec{x} = r\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = r\overrightarrow{CB} + s\overrightarrow{OC}$ $\quad \vec{x} = r\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

7 a) Die Geraden g und h sind parallel, da der Richtungsvektor von g ein Vielfaches des Richtungsvektors von h ist. $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Punktprobe: $\quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$

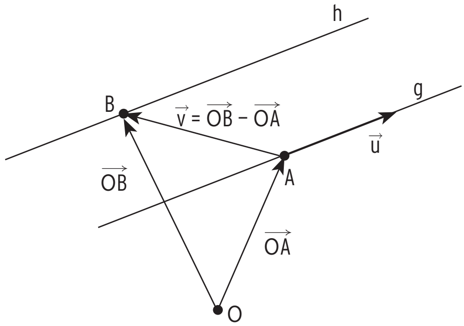
Das LGS ist unlösbar. Die Geraden g und h schneiden sich nicht.

Die Geraden g und h sind parallel und verschieden (echt parallel).

b) Die Ebene E ist bestimmt durch den Aufpunkt A und die zwei Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$



Lehrbuch Seite 232

1 a) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punkt Q auf g wählen: $\vec{x} = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1-t \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1-t \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t-2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ steht senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g.

Bedingung: $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$

$\begin{pmatrix} t \\ -t-2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$t + t + 2 = 0$

$t = -1$

Einsetzen von $t = -1$ in $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} t \\ -t-2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Abstand: $d = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

b) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punkt Q auf g wählen: $\vec{x} = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ 2-t \\ t \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ 2-t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ 2-t \\ t \end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ steht senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g.

Bedingung: $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$

$\begin{pmatrix} 3+2t \\ 2-t \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$6 + 4t - 2 + t + t = 0$

$t = -\frac{2}{3}$

Einsetzen von $t = -\frac{2}{3}$ in $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ 2-t \\ t \end{pmatrix}$ ergibt: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Abstand: $d = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{\sqrt{93}}{3}$

Lehrbuch Seite 294

3 X: Folgekosten in €

$E(X) = 20\text{ €} \cdot 0{,}05 + 30\text{ €} \cdot 0{,}02 + 150\text{ €} \cdot 0{,}005 = 2{,}35$

Die Folgekosten betragen 2,35 €.

Hinweis: $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$

Lehrbuch Seite 301

7 a) X: Durchmesser in mm

$\mu = E(X) = 3{,}18 \cdot 0{,}03 + 3{,}19 \cdot 0{,}21 + 3{,}20 \cdot 0{,}43 + 3{,}21 \cdot 0{,}29 + 3{,}22 \cdot 0{,}04 = 3{,}201$

Der mittlere Durchmesser beträgt 3,201 mm.

Varianz: $\sigma^2 = (3{,}18 - 3{,}201)^2 \cdot 0{,}03 + \ldots + (3{,}22 - 3{,}201)^2 \cdot 0{,}04 = 7{,}69 \cdot 10^{-5}$

Standardabweichung: $\sigma = 8{,}77 \cdot 10^{-3}$ (in mm)

Ausschuss: 0,03 + 0,04 = 0,07 = 7 %

Es entsteht 7 % Ausschuss.

b) Der mittlere Durchmesser ist gleich geblieben, die Standardabeichung hat sich verringert. Die Durchmesser, die im Februar gemessen wurden, streuen weniger um den mittleren Durchmesser 3,201 mm als die Werte, die im Januar gemessen wurden.

Lehrbuch Seite 307

2 X: Anzahl der roten Kugeln

Mit Zurücklegen: $P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot (\frac{3}{4})^2 \cdot (\frac{1}{4})^1 = 0{,}4219$

Bernoulli-Kette: Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Kugel bleibt gleich.

Ohne Zurücklegen: $P(X = 2) = 3 \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} = 0{,}5357$

Keine Bernoulli-Kette: Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Kugel ändert sich.

Lehrbuch Seite 311

5 a) $\binom{5}{4} \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^1 = P(X = 4) = 0{,}0768$; X ist binomialverteilt mit $n = 5$; $p = 0{,}4$

b) $\binom{15}{4} \cdot 0{,}3^4 \cdot 0{,}7^{11} = P(X = 4) = 0{,}2186$; X ist binomialverteilt mit $n = 15$; $p = 0{,}3$

c) $\binom{50}{10} \cdot 0{,}1^{10} \cdot 0{,}9^{40} = P(X = 10) = 0{,}0152$;

X ist binomialverteilt mit $n = 50$; $p = 0{,}1$

d) $\binom{100}{44} \cdot 0{,}2^{44} \cdot 0{,}8^{56} = P(X = 44) = 3{,}25 \cdot 10^{-8} \approx 0$

X ist binomialverteilt mit $n = 100$; $p = 0{,}2$; X ist $B_{100;\,0{,}2}$-verteilt

Lehrbuch Seite 317

1 a) $n = 8$; $k = 2$; $p = 0{,}5$ $P(X \leq 2) = 0{,}1445$

b) $n = 20$; $k = 5$; $p = 0{,}8$ $P(X \leq 5) = 1{,}8 \cdot 10^{-7} \approx 0$

c) $n = 50$; $k = 20$; $p = 0{,}1$ $P(X \leq 20) = 0{,}9999...$

Lehrbuch Seite 318

9 a) X: Anzahl der Ananaskonserven; X ist $B_{50;\frac{1}{3}}$-verteilt

$n = 50$; $p = \frac{1}{3}$; $k = 16$

Genau 16 Ananaskonserven: $P(X = 16) = B_{50;\frac{1}{3}}(16) = 0{,}1178$

b) Y: Anzahl der Papayakonserven; Y ist $B_{50;\frac{2}{3}}$-verteilt

$n = 50$; $p = \frac{2}{3}$; $k = 25$

Mindestens 25 Papayakonserven:

$P(Y \geq 25) = 1 - P(Y \leq 25) = 1 - 0{,}0049 = 0{,}9951$

Lehrbuch Seite 324

3 $\mu = n \cdot p = 5$

$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = 5 \cdot (1 - p) = 4$: $\quad 5 \cdot (1 - p) = 4$

$p = 0{,}2$

Einsetzen von $p = 0{,}2$ in $\mu = n \cdot p = 5$ ergibt: $\quad n \cdot 0{,}2 = 5$

$n = 25$

Ergebnis: $n = 25$; $p = 0{,}2$

Lehrbuch Seite 325

7 a) X: Anzahl der defekten Dichtungen; X ist $B_{500;\,0{,}05}$-verteilt

$E(X) = 25$

b) $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 4{,}87$

$\mu - \sigma = 20{,}13 \qquad \mu + \sigma = 29{,}87$

ganzzahlige Werte in dem Intervall $[20{,}13; 29{,}87]$ sind 21, ... , 29.

$P(20{,}13 \leq X \leq 29{,}87) = P(21 \leq X \leq 29) = 0{,}8235 - 0{,}1789 = 0{,}6446$

c) Berechnungen mit dem WTR:

X ist $B_{50;\,0{,}05}$-verteilt;

$P(A) = P(X = 0) = 0{,}0769$

$P(B) = P(X \leq 3) = 0{,}7604$

$P(C) = P(X > 35) = 1 - P(X \leq 35) = 0$

$P(D) = P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) = 0{,}9882 - 0{,}7604 = 0{,}2278$