„Sie müssen das Buch so schreiben, dass alles drin ist, aber man es trotzdem versteht!“
(Aufforderung einer Schülerin)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf die **schriftliche und mündliche Abiturprüfung** in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- Ihr gewonnenes Wissen anhand von Basisübungen mit ausführlichen Lösungen schnell und prüfungsbezogen zu vertiefen.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.
- eine gute Note in der Abiturprüfung zu erreichen.

Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.
- den Notendurchschnitt Ihrer Klasse in der Abiturprüfung zu optimieren.

Konzept

Der Kern des Buches besteht aus eingängigen **Stoffzusammenfassungen zu allen Lehrplanthemen** des **grundlegenden Anforderungsniveaus** am beruflichen Gymnasium in Baden-Württemberg.
Die Zusammenfassungen sind so konzipiert, dass alle mathematischen Inhalte direkt aufgenommen und kognitiv verarbeitet werden können.

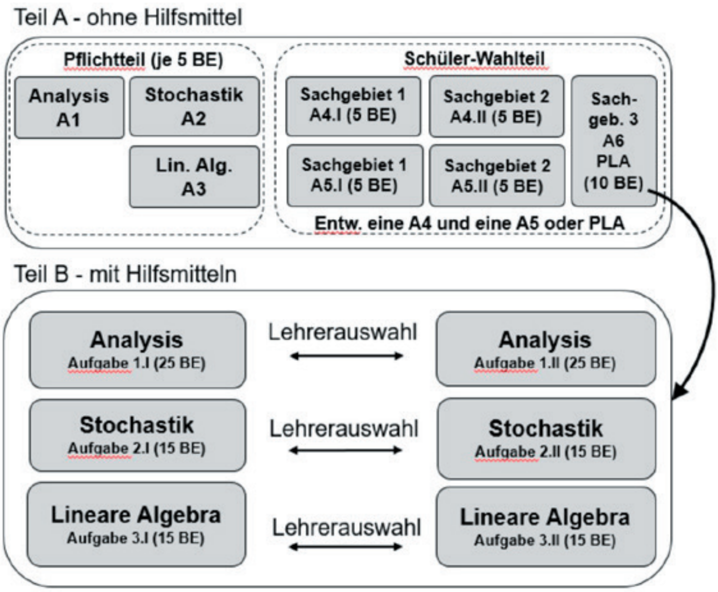
Die über **100 Videos** im Buch bieten einen weiteren Lernzugang, welcher in Kombination mit dem Buch bei vielen Schülerinnen und Schülern nachweisbar zu besseren Lernergebnissen führt.

Die kurzen, elementaren **Basisübungen** zu allen Themen werden **ausführlich gelöst**.

NEU: Orginalabituraufgaben vervollständigen eine optimale Prüfungsvorbereitung.

Ablauf der Abiturprüfung

Arbeitszeit: 255 Minuten (maximal 100 Minuten für Teil A)
Bewertungseinheiten: 80 gesamt



* Sachgebiete sind Analysis, Stochastik und Vektorgeometrie Quelle: IBBW Baden-Württemberg

Erläuterungen

- **Pflichtteil (Teil A, ohne Hilfsmittel)**: Die vorgelegten 3 Aufgaben (zu allen Themen des Lehrplans) müssen bearbeitet werden.
- **Schüler-Wahlteil (Teil A, ohne Hilfsmittel)**
  Beispiel: In Aufgabengruppe 1 (A4) liegt jeweils eine Aufgabe zur Analysis (Sachgebiet 1) und eine Aufgabe zur Stochastik (Sachgebiet 2) vor. In der Aufgabengruppe 2 (A5) entsprechend. Zusätzlich liegt die Aufgabe 6 zum Problemlösen (PLA) zur Vektorgeometrie vor. Die Schüler*in wählt dann **entweder aus jeder der beiden Aufgabengruppen genau eine Aufgabe** aus **oder wählt (nur) die Aufgabe 6 zum Problemlösen** aus. In diesem Fall gibt die Schüler*in **vor** der Bearbeitung der Problemlöseaufgabe den Teil A ab und erhält dann zur Bearbeitung der Problemlöseaufgabe die **Hilfsmittel (Taschenrechner und Merkhilfe)**.
- **Teil B, mit Hilfsmittel:** Vor der Prüfung wählt die Lehrer*in aus je zwei Aufgaben zur Analysis, Stochastik und Vektorgeometrie jeweils eine Aufgabe aus.

Faustformel zur Zeitplanung: Aus 255 min für 80 BE ergeben sich **3,19 min pro BE**.

Hinweis: Zur weiteren Erläuterung sei auf das nachfolgende **Video** verwisesen.

www.mvurl.de/uicu

Inhaltsverzeichnis

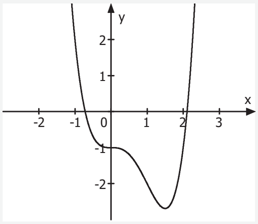
Hinweis:

Die Lösungen zu den Originalprüfungsfragen wurden von den Autoren selbst erstellt. Sie basieren auf den offiziellen Vorgaben und bieten eine fachlich fundierte Hilfestellung zur Bearbeitung der Prüfungsaufgaben.

Ganzrationale Funktion

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$

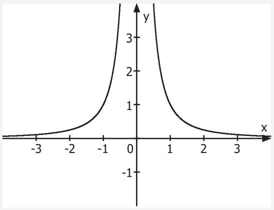
(S. 12)



Potenzfunktionen

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

(S. 16)

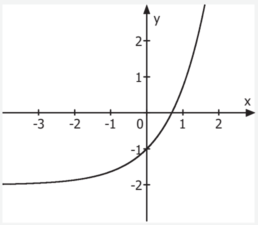


Funktionstypen

Exponentialfunktion

$f(x) = e^x - 2$

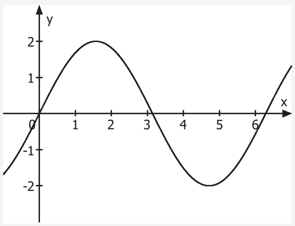
(S. 18)



Trignonometrische Funktion

$f(x) = 2 \cdot \sin(x)$

(S. 20)

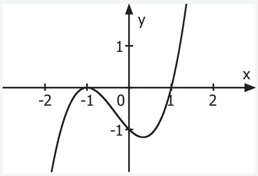


Analysis
Funktionen

Nullstellenansatz

$f(x)=(x+1)^2\cdot(x-1)$

(S. 14)

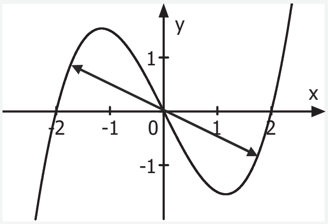


Symmetrie

…zur y-Achse

…zum Ursprung

(S. 24)



Spiegeln, Strecken und Verschieben

(S. 22)

2.2 Gleichungstypen: Konkretes Lösungsvorgehen

1. Polynomgleichungen

Typ 1 **Gegenoperation**	**Typ 2** **Satz vom Nullprodukt**	**Typ 3** **abc -** bzw. **pq - Formel**
$2x-4=0 \quad \vert +4$ $2x=4 \quad \vert :2$ $x=2$		
$2x^2-4=0 \quad \vert +4$ $2x^2=4$ $x^2=2 \quad \vert \sqrt{}$ $x_1=\sqrt{2}\approx 1,41$ $x_2=-\sqrt{2}\approx -1,41$	$2x^2-4x=0$ $x\cdot(2x-4)=0$ **S. v. Nullpr.** (S. 36) $x_1=0 \qquad 2x-4=0$ $2x=4$ $x_2=2$	$x^2-8x+15=0$ mit **abc - Formel**: $(a=1;\ b=-8;\ c=15)$ $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 15}}{2}$ $=\frac{8\pm 2}{2}$ $x_1=5; \quad x_2=3$ oder mit **pq - Formel**: $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ (*Bei dieser Formel muss vor dem* x^2 *stets eine* $+1$ *stehen!*)
$2x^3-4=0$ $2x^3=4$ $x^3=2 \quad \vert \sqrt[3]{}$ $x=\sqrt[3]{2}$ $x\approx 1,26$	$2x^3-4x=0$ $x\cdot(2x^2-4)=0$ **S. v. Nullpr.** $x_1=0 \qquad 2x^2-4=0$ $2x^2=4$ $x^2=2 \quad \vert \sqrt{}$ $x_2=\sqrt{2}\approx 1,41$ $x_3=-\sqrt{2}\approx -1,41$	

Typ 1 Gegenoperation	Typ 2 Satz vom Nullprodukt	Typ **S** **S**ubstitution führt zu $\ldots u^2 + \ldots u + \ldots = 0$
$2x^4 - 4 = 0 \quad \vert +4$ $2x^4 = 4 \quad \vert :2$ $x^4 = 2 \quad \vert \sqrt[4]{\ }$ $x_1 = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}19$ $x_2 = -\sqrt[4]{2} \approx -1{,}19$	$2x^4 - 4x = 0$ $x \cdot (2x^3 - 4) = 0$ **S. v. Nullpr.** $x_1 = 0 \qquad 2x^3 - 4 = 0$ $2x^3 = 4$ $x^3 = 2$ $x_2 = \sqrt[3]{2}$ $x_2 \approx 1{,}26$	$x^4 - 8x^2 + 15 = 0$ **Substitution :** $(x^4 = u^2;\ x^2 = u)$ $u^2 - 8u + 15 = 0$ $u_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 15}}{2}$ (abc-Formel) $= \frac{8 \pm 2}{2}$ $u_1 = 5; \qquad u_2 = 3$ **Rücksubstitution :** $x^2 = 5 \qquad x^2 = 3$ $x_1 = \sqrt{5} \approx 2{,}34 \qquad x_3 = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ $x_2 = -\sqrt{5} \approx -2{,}34 \qquad x_4 = -\sqrt{3} \approx -1{,}73$

2. Exponentialgleichungen

Typ 1 Gegenoperation	Typ 2 Satz vom Nullprodukt	Typ **S** **S**ubstitution führt zu $\ldots u^2 + \ldots u + \ldots = 0$
$e^x = 0{,}5 \quad \vert \ln$ $x = \ln(0{,}5)$ $x \approx -0{,}69$ oder $e^{2x-1} = 0{,}5 \quad \vert \ln$ $2x - 1 = \ln(0{,}5) \quad \vert +1$ $2x = \ln(0{,}5) + 1 \quad \vert :2$ $x = \frac{\ln(0{,}5) + 1}{2}$ $x \approx 0{,}153$	$2e^{2x} - e^x = 0$ $e^x \cdot (2e^x - 1) = 0$ **S. v. Nullpr.** $e^x = 0 \qquad 2e^x - 1 = 0$ $x = \ln(0) \qquad e^x = 0{,}5$ keine Lösung $\qquad x = \ln(0{,}5)$ $x \approx -0{,}69$	$e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$ **Substitution :** $(e^{2x} = u^2;\ e^x = u)$ $u^2 - 8u + 15 = 0$ $u_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 15}}{2}$ (abc-F.) $= \frac{8 \pm 2}{2}$ $u_1 = 5; \qquad u_2 = 3$ **Rücksubstitution :** $e^x = 5 \qquad e^x = 3$ $x_1 = \ln(5) \approx 1{,}6 \qquad x_2 = \ln(3) \approx 1{,}1$

3. Trigonometrische Gleichungen

Sinusgleichung **Typ 1** **Gegenoperation**	**Kosinusgleichung** **Typ 1** **Gegenoperation**
$\sin(x)=0{,}5 \quad \mid \sin^{-1}$ $x=\sin^{-1}(0{,}5)$ $x_1=\frac{1}{6}\pi$ (WTR) $x_2=\pi-x_1=\pi-\frac{1}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi$ weitere Lösungen: $x=\frac{1}{6}\pi\pm1\cdot2\pi;\quad x=\frac{1}{6}\pi\pm2\cdot2\pi;\quad ...$ und $x=\frac{5}{6}\pi\pm1\cdot2\pi;\quad x=\frac{5}{6}\pi\pm2\cdot2\pi;\quad ...$	$\cos(x)=0{,}5 \quad \mid \cos^{-1}$ $x=\cos^{-1}(0{,}5)$ $x_1=\frac{1}{3}\pi$ (WTR) $x_2=2\pi-x_1=2\pi-\frac{1}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi$ weitere Lösungen: $x=\frac{1}{3}\pi\pm1\cdot2\pi;\quad x=\frac{1}{3}\pi\pm2\cdot2\pi;\quad ...$ und $x=\frac{5}{3}\pi\pm1\cdot2\pi;\quad x=\frac{5}{3}\pi\pm2\cdot2\pi;\quad ...$

Unterschied

Sinusgleichung: $\boldsymbol{x_2=\pi-x_1}$

Kosinusgleichung: $\boldsymbol{x_2=2\pi-x_1}$

Hinweis : Bis Kosinusgleichungen kann alternativ über $\boldsymbol{x_2=-x_1}$ vorgegangen werden.

Verständnis

Eine ausführliche Erklärung des Lösungsvorgehens finden Sie auf den folgenden beiden Seiten.

http://mvurl.de/yre5

Sinusgleichung **Typ 1S** **Substitution führt zu :** $sin(u) = ...$	**Kosinusgleichung** **Typ 1S** **Substitution führt zu :** $cos(u) = ...$
$\sin(2x) = 0{,}5$ **Substitution :** $2x = u$ ——— $\sin(u) = 0{,}5 \quad \vert \sin^{-1}$ $u = \sin^{-1}(0{,}5)$ $u_1 = \frac{1}{6}\pi$ (WTR) $u_2 = \pi - u_1 = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$ weitere Lösungen: $u = \frac{1}{6}\pi \pm 1\cdot 2\pi; \quad u = \frac{1}{6}\pi \pm 2\cdot 2\pi; \quad ...$ und $u = \frac{5}{6}\pi \pm 1\cdot 2\pi; \quad u = \frac{5}{6}\pi \pm 2\cdot 2\pi; \quad ...$ ——— **Rücksubstitution :** $u = 2x$ $2x = \frac{1}{6}\pi \pm 1\cdot 2\pi \quad \vert :2$ $x = \frac{1}{12}\pi \pm 1\cdot\pi; \quad x = \frac{1}{12}\pi \pm 2\cdot\pi; \quad ...$ und $2x = \frac{5}{6}\pi \pm 1\cdot 2\pi \quad \vert :2$ $x = \frac{5}{12}\pi \pm 1\cdot\pi; \quad x = \frac{5}{12}\pi \pm 2\cdot\pi; \quad ...$	$\cos(2x) = 0{,}5$ **Substitution :** $2x = u$ ——— $\cos(u) = 0{,}5 \quad \vert \cos^{-1}$ $u = \cos^{-1}(0{,}5)$ $u_1 = \frac{1}{3}\pi$ (WTR) $u_2 = \mathbf{2}\pi - u_1 = \mathbf{2}\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$ weitere Lösungen: $u = \frac{1}{3}\pi \pm 1\cdot 2\pi; \quad u = \frac{1}{3}\pi \pm 2\cdot 2\pi; \quad ...$ und $u = \frac{5}{3}\pi \pm 1\cdot 2\pi; \quad u = \frac{5}{3}\pi \pm 2\cdot 2\pi; \quad ...$ ——— **Rücksubstitution :** $u = 2x$ $2x = \frac{1}{3}\pi \pm 1\cdot 2\pi \quad \vert :2$ $x = \frac{1}{6}\pi \pm 1\cdot\pi; \quad x = \frac{1}{6}\pi \pm 2\cdot\pi; \quad ...$ und $2x = \frac{5}{3}\pi \pm 1\cdot 2\pi \quad \vert :2$ $x = \frac{5}{6}\pi \pm 1\cdot\pi; \quad x = \frac{5}{6}\pi \pm 2\cdot\pi; \quad ...$

4 Integralrechnung

4.1 Integrationsregeln („Aufleitungsregeln“)

Nr.	Beispiel	Vorgehen
	Elementarregeln	
1	$f(x) = x^5$ $F(x) = \frac{1}{6}x^6$ $f(x) = x^2$ $F(x) = \frac{1}{3}x^3$	$f(x) = x^{Exponent}$ $F(x) = \frac{1}{Exponent+1} \cdot x^{Exponent+1}$ (Potenzregel)
2	$f(x) = e^x$ $F(x) = e^x$	*Abschreiben*
3	$f(x) = \sin(x)$ $F(x) = -\cos(x)$	$\sin \to -\cos \to -\sin \to \cos \to \sin$ (*Gegen den Uhrzeigersinn!*)
4	$f(x) = \cos(x)$ $F(x) = \sin(x)$	
	Vorgehensregeln	
5	$f(x) = \mathbf{2} \cdot x^2$ $F(x) = \mathbf{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 = \frac{2}{3}x^3$	*„Zahlen“ mit* $\cdot$ *oder* : *„bleiben“* (Faktorregel)
6	$f(x) = x^2 + \mathbf{2}$ $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \mathbf{2x}$	*„Zahlen“ mit* + *oder* − *„erhalten ein* x*“*
7	$f(x) = x^2 - 4x$ $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$	+ *und* − *Zeichen unterteilen die Funktion in Teilfunktionen, welche einzeln aufgeleitet werden* (Summenregel)

http://mvurl.de/xtxi

Nr.	Beispiel	Vorgehen
	Produktregel	
8	$f(x)=x^2\cdot e^x$ $\mathrm{F}(x)=?$	Die Produktregel zum Aufleiten (partielle Integration) wird im Abitur nicht verlangt.

	Anwendungen der Kettenregel	
9	$f(x)=e^{2x+3}$ $\mathrm{F}(x)=e^{2x+3}\cdot\frac{1}{2}$	$f(x)\ =e^{Exponent}$ $\mathrm{F}(x)\ =e^{Exponent}\cdot\frac{1}{Exponent\ abgeleitet}$
10	$f(x)=\sin(2x+3)$ $\mathrm{F}(x)=-\cos(2x+3)\cdot\frac{1}{2}$	$f(x)\ =\sin(Klammerinhalt)$ $\mathrm{F}(x)\ =-\cos(Klammerinhalt)\cdot\frac{1}{Klammerinhalt\ abgeleitet}$
11	$f(x)=\cos(2x+3)$ $\mathrm{F}(x)=\sin(2x+3)\cdot\frac{1}{2}$	$f(x)\ =\cos(Klammerinhalt)$ $\mathrm{F}(x)\ =\sin(Klammerinhalt)\cdot\frac{1}{Klammerinhalt\ abgeleitet}$
12	$f(x)=(2x+3)^5$ $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{6}\cdot(2x+3)^6\cdot\frac{1}{2}$ $=\frac{1}{12}\cdot(2x+3)^6$	$f(x)\ =(Klammerinhalt)^{Exponent}$ $\mathrm{F}(x)\ =\frac{1}{Exponent+1}\cdot(Klammerinhalt)^{Exponent+1}\cdot\frac{1}{Klammerinhalt\ abgeleitet}$

Annahme: *Klammerinhalt* bzw. *Exponent* ist linear („enthält nur x, also kein x^2, e^x, ...“)

Hinweis: Integrationskonstante

Eine Funktion hat nur eine Ableitungsfunktion, aber **unendlich viele Stammfunktionen**, da der hintere Summand $\boldsymbol{c}$ (Integrationskonstante) beim Ableiten verschwindet.

Allg.: $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{3}x^3+\boldsymbol{c}$

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{3}x^3 \qquad \mathrm{F}(x)=\frac{1}{3}x^3+2 \qquad \mathrm{F}(x)=\frac{1}{3}x^3-3$$

$$\nwarrow \qquad \uparrow \qquad \nearrow$$

$$f(x)=x^2$$

$$\downarrow$$

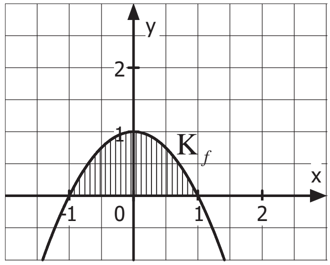
$$f'(x)=2x$$

4.2 Flächeninhaltsberechnung zwischen Schaubild und *x*-Achse

1. Fläche oberhalb der *x*-Achse

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 1$.
Welchen Inhalt besitzt die schraffierte Fläche?



Ansatz

$$\mathbf{A} = \int_a^b f(x)\,dx = [\mathbf{F}(x)]_a^b = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$$

Lösung

$$\mathrm{A} = \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + 1\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}\cdot 1^3 + 1 - \left(-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 + (-1)\right) \approx 1{,}333 \text{ FE}$$

Rechte Grenze nach oben, linke nach unten → *aufleiten* → *Rechte und linke Grenze in Stammfunktion einsetzen, voneinander subtrahieren*

Merkregel

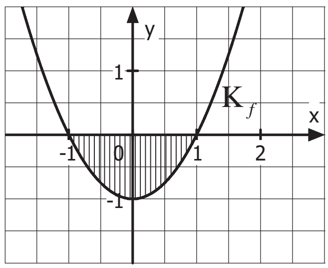
$$\mathbf{A} = \int_{\text{linke Grenze}}^{\text{rechte Grenze}} \textbf{(Funktionsterm)}\ dx$$

2. Fläche unterhalb der *x*-Achse

Unterschied

$$\mathrm{A} = \int_{-1}^{1} -f(x)\,dx$$

Minuszeichen beachten!
Sonst: negatives Ergebnis



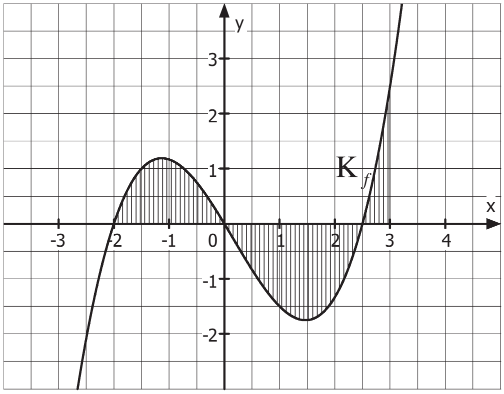
Hinweis: Falls Sie versehentlich ein negatives Ergebnis erhalten, können Sie dies korrigieren, indem Sie **Betragsstriche** setzen.

www.mvurl.de/gign

3. Zusammengesetzte Fläche

Beispiel : Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{3}x$. Welchen Inhalt besitzt die schraffierte Fläche?

Vorgehen (am Beispiel)



1. Nullstellen bestimmen

$f(x)=0 \;\rightarrow x_1=-2;\; x_2=0;\; x_3=2{,}5$

2. Teilflächeninhalte bestimmen

$$\mathrm{A}_1=\int_{-2}^{0} f(x)dx\approx 1{,}56;$$

$$\mathrm{A}_2=\int_{0}^{2{,}5} -f(x)\;dx\approx 2{,}82;$$

$$\mathrm{A}_3=\int_{2{,}5}^{3} f(x)\;dx\approx 0{,}57$$

3. Gesamtflächeninhalt bestimmen

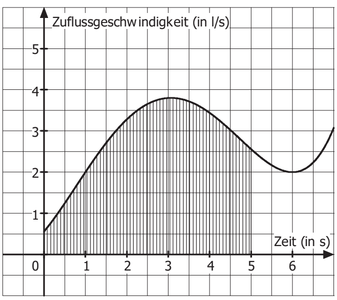
$\mathrm{A}=\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2+\mathrm{A}_3\approx 1{,}56+2{,}82+0{,}57=4{,}95$ FE

Von Nullstelle zu Nullstelle integrieren!
Ansonsten werden positive und negative Flächeninhaltswerte zu einer **„Flächenbilanz“** verrechnet.

4. Interpretation von Flächeninhalten

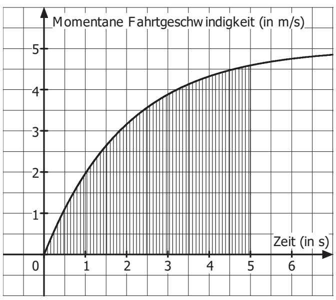
Der Inhalt der markierten Fläche gibt an …

Beispiel 1



… welche Wassermenge (in l) innerhalb von 5 s zugeflossen ist.

Beispiel 2



… welche Strecke (in m) innerhalb von 5 s zurückgelegt wurde.

Tipp : Einheit Integral („Fläche“) = Einheit Funktion $\cdot$ Einheit Variable (z.B. $\frac{l}{s}\cdot s=l$)

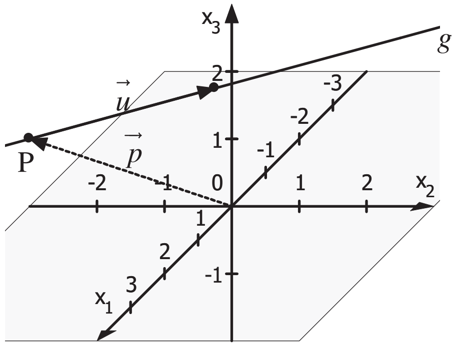
3 Geraden

3.1 Geradengleichungen in Parameterform

Die Punkt-Richtungs-Form:

$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ (mit $r \in \mathbb{R}$)

- $\vec{p}$: Stützvektor (Ortsvektor des Stützpunktes P)
- $\vec{u}$: Richtungsvektor
- r: Parameter (mit $r \in \mathbb{R}$)



Beispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ (mit $r \in \mathbb{R}$)

Spezielle Geraden: z.B. x_1-Achse: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; x_3-Achse: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Elementare Aufgabenstellungen

- **Geradenpunkte ermitteln**

Beispiel: Bestimmung eines Punktes auf $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ (mit $r \in \mathbb{R}$).

Einsetzen eines beliebigen Wertes für r (z.B. $r = 2$):

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{D}(1|3|3).$$

- **Überprüfen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt (Punktprobe)**

Beispiel: Liegt $\mathrm{Q}(0|8|4)$ auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ (mit $r \in \mathbb{R}$)?

Der Ortsvektor von Q wird für $\vec{x}$ eingesetzt, man erhält ein LGS.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 0 = 2 - 0,5r \Leftrightarrow r = 4 \\ 8 = -2 + 2,5r \Leftrightarrow r = 4 \\ 4 = 2 + 0,5r \Leftrightarrow r = 4 \end{array}$$

LGS ist eindeutig lösbar, somit liegt Q auf der Geraden.
(Bei verschiedenen Ergebnissen für r (Widerspruch) liegt der Punkt nicht auf der Geraden.)

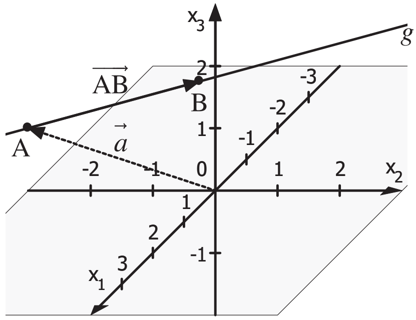
www.mvurl.de/pd8q

Aufstellen einer Geradengleichung aus zwei Punkten

Zwei-Punkte-Form:

$\boldsymbol{g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}}$ (mit $r \in \mathbb{R}$)

- $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, der Ortsvektor des Punktes A, wird als Stützvektor verwendet
- $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, der Verbindungsvektor der Punkte A und B, bildet den Richtungsvektor
- r: Parameter (mit $r \in \mathbb{R}$)



Beispiel: Gerade durch $A(2|-2|2)$ und $B(1{,}5|0{,}5|2{,}5)$.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5-2 \\ 0{,}5-(-2) \\ 2{,}5-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \quad (\text{mit } r \in \mathbb{R})$$

Hinweis: Die Gleichung einer Geraden ist nicht eindeutig. Durch „Vertauschen“ der Punkte erhält man eine „zahlenmäßig andere“ Gleichung (derselben Geraden):

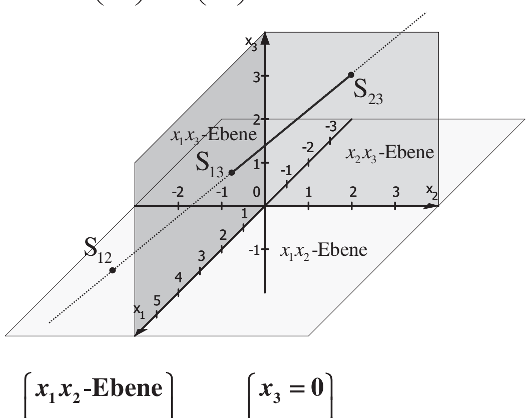
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -2{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \quad (\text{mit } r \in \mathbb{R})$$

Spurpunkte ermitteln (Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen)

Beispiel: Berechnen des Schnittpunktes von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit der x_2x_3-Ebene.

Da der gesuchte Schnittpunkt in der x_2x_3-Ebene liegt, hat seine x_1-Koordinate den Wert 0
$S_{x_2x_3}(0|...|...)$.
Dies wird in die Geradengleichung für x_1 eingesetzt: $0 = 3 - 3r \rightarrow r = 1$.
Nun wird $r = 1$ eingesetzt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{23}(0|2|3)$$



Beachten Sie: Für den Schnittpunkt mit der $\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{x_1x_2}\textbf{-Ebene} \\ \boldsymbol{x_1x_3}\textbf{-Ebene} \\ \boldsymbol{x_2x_3}\textbf{-Ebene} \end{matrix}\right\}$ wird $\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{x_3 = 0} \\ \boldsymbol{x_2 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 = 0} \end{matrix}\right\}$ gesetzt.

3.2 Gegenseitige Lage von Geraden

Beispiel 1

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Beispiel 2

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

Vorgehen

Schritt 1: Gleichsetzen.	
$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$
Schritt 2: LGS in r und s ordnen.	
$\begin{array}{l} 1+2r=3+s \\ -5+r=1+3s \\ 5+r=9+2s \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} 2r-s=2 & (1) \\ r-3s=6 & (2) \\ r-2s=4 & (3) \end{array}$	$\begin{array}{l} 1+r=2+4s \\ 2+2r=2+8s \\ 0+r=2+4s \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} r-4s=1 & (1) \\ 2r-8s=0 & (2) \\ r-4s=2 & (3) \end{array}$
Schritt 3: LGS aus zwei (beliebig) ausgewählten Gleichungen mit dem Gauß-Verfahren **lösen**. Mit der Lösung dann eine Probe in der verbliebenen Gleichung durchführen.	
LGS aus den Gleichungen (2) und (3): $\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \;\lrcorner-$ $\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$ Man erhält $\boldsymbol{s = -2}$. Einsetzen: $r-3\cdot(-2)=6 \Leftrightarrow \boldsymbol{r=0}$. Probe in (1): $2\cdot 0-(-2)=2 \Leftrightarrow 2=2$ Das LGS hat also eine **eindeutige Lösung**.	LGS aus den Gleichungen (1) und (3): $\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \;\lrcorner-$ $\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ $(0=-1$ Widerspruch$)$ Das LGS hat also **keine Lösung**.

www.mvurl.de/bq5l

4 Binomialverteilung

4.1 Die Bernoulli-Formel

Zugrunde liegt ein mehrfach ausgeführtes Bernoulli-Experiment, bei dem …
… nur **zwei mögliche Ergebnisse** („Treffer“ oder „Niete“) eintreten können
und
… sich die **Wahrscheinlichkeiten nicht ändern** (z.B. „Ziehen **mit** Zurücklegen“)

Beispiele: Münzwurf („Kopf“ oder „Zahl“); Mehrfach würfeln („6“ oder „keine 6“); …

Bernoulliformel (allg.)

$$\mathbf{P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}}$$

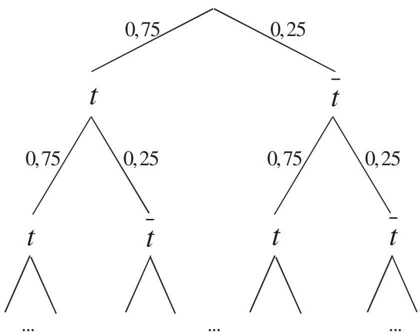
n: Anzahl der Versuche (Durchführungen)
k: Anzahl der „Treffer“
p: Wahrscheinlichkeit für einen „Treffer“

Bernoulliformel (in Worten)

$$\text{P(X = Anz. Treffer)}=\binom{\text{Anz. Versuche}}{\text{Anz. Treffer}}\cdot\text{Trefferwahrsch.}^{\text{Anz. Treffer}}\cdot\text{Nietenwahrsch.}^{\text{Anz. Nieten}}$$

Beispiel 1
Ein Basketballspieler trifft (t) erfahrungsgemäß einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Er wirft 8 Mal.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er insgesamt 5 Mal (und 3 Mal nicht)?

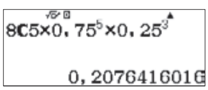
$$P(X=5)=\binom{8}{5}\cdot 0,75^5\cdot 0,25^3\approx 0,2076$$



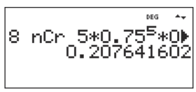
(8 Stufen)
(alle Pfade mit 5 Mal t und 3 Mal $\bar t$ relevant)

Eingabe in WTR (mit Taste nCr):

CASIO



TI



Erläuterungen

- Binomialkoeffizient (allg.): $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$
- $n!$ steht für die Fakultät einer Zahl: $n!=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1$
- $P(X=5)=\binom{8}{5}\cdot 0,75^5\cdot 0,25^3=\dfrac{8!}{5!\cdot(8-5)!}\cdot 0,75^5\cdot 0,25^3=56\cdot 0,00371\approx 0,2078.$

Es gibt also 56 mögliche Reihenfolgen für 5 Treffer unter 8 Schüssen ($ttttt\bar t\bar t\bar t$, $\bar t ttttt\bar t\bar t$, ...), von welchen jede eine Einzelwahrscheinlichkeit von ungefähr $0,00371$ aufweist.

www.mvurl.de/5yml

Beispiel 2
Eine faire Münze wird 5 Mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man genau 3 Mal „Zahl“? (Lösen ohne WTR)

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=10\cdot\frac{1}{32}=\frac{5}{16}$$

$$\left(\text{Nebenrechnung: }\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(3\cdot2\cdot1)\cdot(2\cdot1)}=\frac{5\cdot4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{(\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1})\cdot(2\cdot1)}=10\right)$$

Beispiel 3
Ein Bauteil ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 4 % defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich in einem Karton mit 50 Bauteilen genau 3 defekte Bauteile?

$$P(X=3)=\binom{50}{3}\cdot0{,}04^3\cdot0{,}96^{47}\,(\approx19600\cdot0{,}000009396)\approx0{,}184=18{,}4\,\%$$

(Es gibt also 19600 mögliche Reihenfolgen für 3 defekte unter 50 (nacheinander entnommenen) Bauteilen.)

Beispiel 4
Jonas würfelt 24 Mal.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er genau 7 Mal eine 3?

$$P(X=7)=\binom{24}{7}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^7\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{17}\approx0{,}056$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er genau 10 Mal eine 2 oder eine 3?

$$\left(\text{Wahrscheinlichkeit für 2 oder 3: }\frac{2}{6}\right)$$

$$P(X=10)=\binom{24}{10}\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^{10}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^{14}\approx0{,}114$$

4.2 Binomialverteilung und kumulierte Binomialverteilung

Beispiel: Ein Basketballspieler trifft erfahrungsgemäß einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Er wirft 8 Mal. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Treffer an.

Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen bestimmten Wert annimmt, kann mit Hilfe der Bernoulliformel (mit $n = 8$ und $p = 0,75$) berechnet werden.
Somit ist die Zufallsgröße X binomial verteilt.

1. Die Binomialverteilung (genau k Treffer; $P(X = k)$)

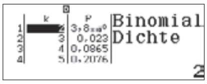
eine „Liste“, in welcher für jeden möglichen Wert der Zufallsgröße die **zugehörige Wahrscheinlichkeit** steht.

Beispiel: $P(X = 4) \approx 0,0865$

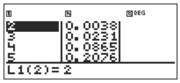
Die Wahrscheinlichkeit für **genau** 4 Treffer beträgt ca. 8,65 %.

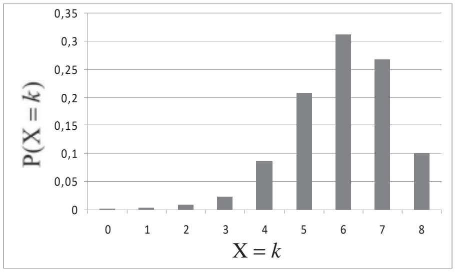
$$\left(\begin{array}{l} \text{Berechnung mit Bernoulliformel:} \\ P(X=4) = \binom{8}{4} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^4 \approx 0,0865 \end{array} \right)$$

CASIO



TI





2. Die kumulierte Binomialverteilung (höchstens k Treffer; $P(X \leq k)$)

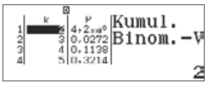
eine „Liste“, in welcher für jeden möglichen Wert der Zufallsgröße die **Wahrscheinlichkeit** steht, dass **dieser oder ein geringerer Wert als dieser** (**höchstens** dieser) angenommen wird.

Beispiel: $P(X \leq 4) \approx 0,1138$

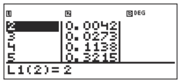
Die Wahrscheinlichkeit für 0 bis 4 Treffer (**höchstens** 4 Treffer) beträgt ca. 11,38 %.

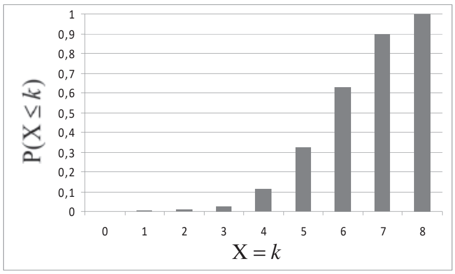
$$\left(\begin{array}{l} \text{Berechnung:} \\ P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + \ldots + P(X=4) \end{array} \right)$$

CASIO



TI



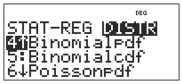


www.mvurl.de/miv1

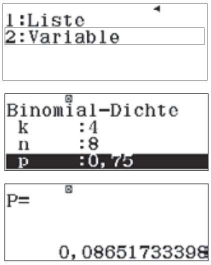
Eingabe in den Taschenrechner (WTR)

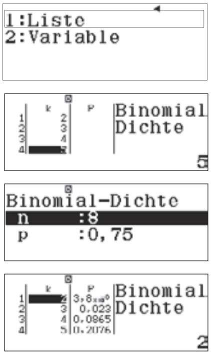
1. Die Binomialverteilung

CASIO FX-87DE X	TI-30X Plus MultiView



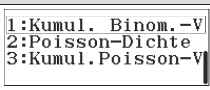
Einzelwert	Liste	Einzelwert	Liste



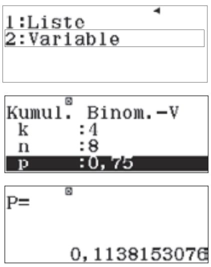


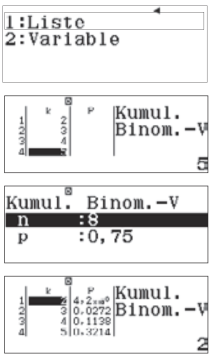
2. Die kumulierte Binomialverteilung

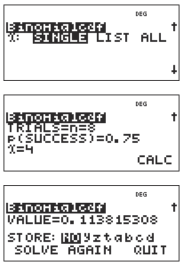
CASIO FX-87DE X	TI-30X Plus MultiView



Einzelwert	Liste	Einzelwert	Liste







Hinweis: Durch „Liste“ / „List“ erhält man die Wahrscheinlichkeiten zu mehreren Werten.

1 Basisübungen zur Analysis

1.1 Funktionen

Aufgabe 1: Eine Gerade verläuft durch die beiden Punkte $P_1(3|-2)$ und $P_2(-1|4)$. Berechnen Sie deren Gleichung.

Aufgabe 2: Geben Sie jeweils die Gleichung einer möglichen Geraden an.

a) Verläuft parallel zu $y=-2x+3$: $y=$ ________________

b) Verläuft parallel zu $y=-x$: $y=$ ________________

c) Verläuft senkrecht zu $y=-2x+3$: $y=$ ________________

d) Ursprungsgerade mit Steigungswinkel von $60°$: $y=$ ________________

e) Verläuft parallel zur x-Achse durch $P(2|-4)$: $y=$ ________________

f) Verläuft parallel zur y-Achse durch $P(2|-4)$: __ $=$ ________________

Aufgabe 3: Füllen Sie aus. (Hinweis: S_y bezeichnet der Schnittpunkt mit der y-Achse.).

Funktionsterm	Grad	S_y	Verlauf	Symmetrie zu …
$f(x)=-x^3-2x+2$		$S_y(0\mid \_\_)$	von __ nach __	☐ y-Achse ☐ Ursprung ☐ weder noch
$f(x)=2x^3+x$		$S_y(0\mid \_\_)$	von __ nach __	☐ y-Achse ☐ Ursprung ☐ weder noch
$f(x)=-x^4-2x^2-1$		$S_y(0\mid \_\_)$	von __ nach __	☐ y-Achse ☐ Ursprung ☐ weder noch
$f(x)=0{,}5x\cdot(x^3-2)$ $=$ ______________		$S_y(0\mid \_\_)$	von __ nach __	☐ y-Achse ☐ Ursprung ☐ weder noch
$f(x)=(1-x^2)\cdot(x^2+1)$ $=$ ______________ $=$ ______________		$S_y(0\mid \_\_)$	von __ nach __	☐ y-Achse ☐ Ursprung ☐ weder noch

Aufgabe 4 : Ordnen Sie jedem Schaubild die zugehörige Funktionsgleichung zu.
(Tipp: Prüfen Sie Grad, Schnittpunkt mit y-Achse, Verlauf und Symmetrie.)

a)

___ : $f_1(x) = -0,2x^3 + 0,5x^2 - x$

___ : $f_2(x) = 0,2x^3 + x$

___ : $f_3(x) = 0,2x^3 + x - 3$

___ : $f_4(x) = -0,2x^3 + x^2$

___ : $f_5(x) = x^2 - 2x + 3$

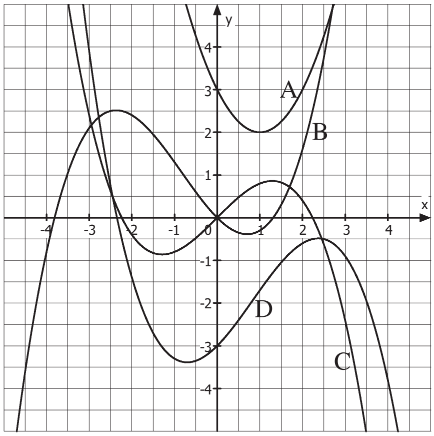
___ : $f_6(x) = 0,2x^3 + 0,5x^2 - x$

___ : $f_7(x) = -0,2x^3 + 0,5x^2 + x - 3$

___ : $f_8(x) = -x^2 - 3$

___ : $f_9(x) = -0,2x^3 + x$

___ : $f_{10}(x) = 0,2x^3 - x$



b)

___ : $f_1(x) = -0,2x^3 + 0,5x^2 + x - 2$

___ : $f_2(x) = -0,2x^4 + x^3 - 2$

___ : $f_3(x) = -x^2$

___ : $f_4(x) = 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2$

___ : $f_5(x) = 1,2x^3 - 0,5x^2 - x - 2$

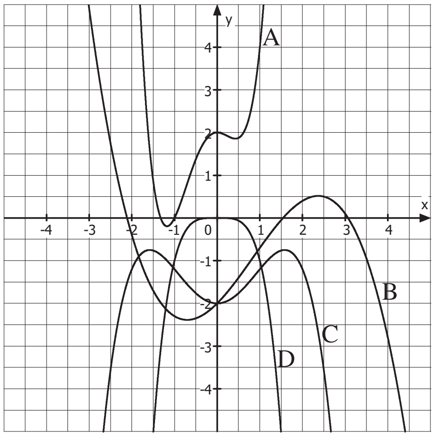
___ : $f_6(x) = 4x^4 - 2x^2 + 2$

___ : $f_7(x) = -x^4$

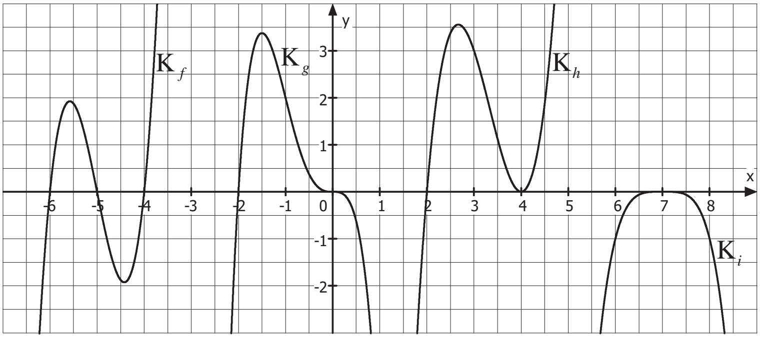
___ : $f_8(x) = -0,2x^4 + x^2 - 2$

___ : $f_9(x) = -0,2x^4 + 0,5x^2 + x - 2$

___ : $f_{10}(x) = -2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2$



Aufgabe 5 : Vervollständigen Sie die Funktionsterme im Nullstellenansatz.



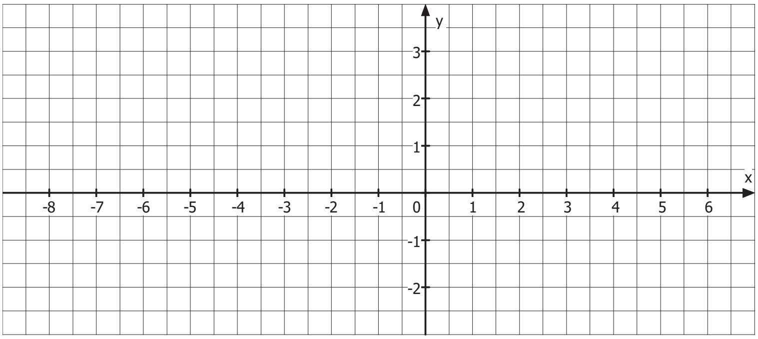
$K_f : f(x) = 5 \cdot$ ______________________ $K_g : g(x) = -2 \cdot$ ______________________

$K_h : h(x) = 3 \cdot$ ______________________ $K_i : i(x) = -$ ______________________

Aufgabe 6 : Skizzieren Sie die Schaubilder in das Koordinatensystem.

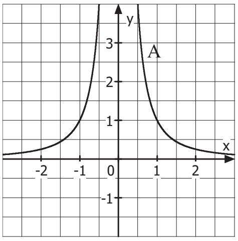
$K_f : f(x) = -(x+7)^2$ $K_g : g(x) = (x+5)^2 \cdot (x+3)^2$

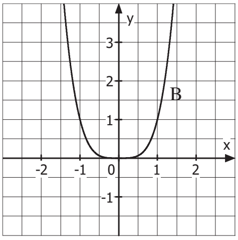
$K_h : h(x) = x^3$ $K_i : i(x) = -(x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-5) \cdot (x-6)$

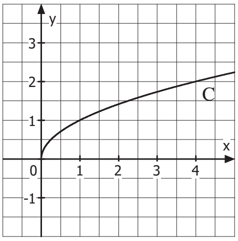


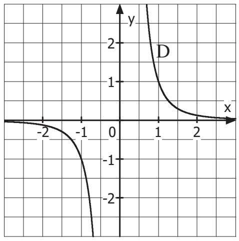
Aufgabe 7: Ordnen Sie zu.

___ : $f_1(x) = \sqrt{x}$ ___ : $f_2(x) = \dfrac{1}{x^3}$ ___ : $f_3(x) = x^4$ ___ : $f_4(x) = x^{-2}$









Aufgabe 8 : Ergänzen Sie.

a) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -2e^x - 1$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = e^x$ durch Spiegelung an der ___-Achse, durch Streckung um den Faktor ___ in ___-Richtung und durch Verschiebung um ___ nach ________.

b) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = e^{-(x-2)}$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = e^x$ durch Spiegelung an der ___-Achse und Verschiebung um ___ nach ________.

c) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -e^{-x} + 2$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = e^x$ durch Spiegelung an der ___-Achse, durch Spiegelung an der ___-Achse und Verschiebung um ___ nach ________.

Aufgabe 9 : Untersuchen Sie auf Asymptoten wie im Beispiel.

Funktion	**Asymptote**	**für $x \to +\infty$**	**für $x \to -\infty$**
a) $f(x) = e^x - 2$	$y = -2$	☐	☒
b) $f(x) = 1 + e^{-x}$	__________	☐	☐
c) $f(x) = 2e^{-x+1} - 2x - 1$	__________	☐	☐
d) $f(x) = e^x - x + 1$	__________	☐	☐
e) $f(x) = x - 1 + e^{-x}$	__________	☐	☐

Aufgabe 10 : Ergänzen Sie.

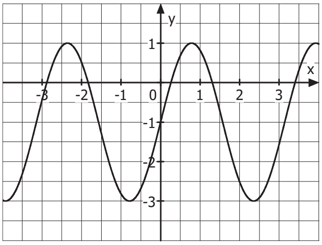
a) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -4\sin(x) + 1$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = \sin(x)$ durch Spiegelung an der ___-Achse, durch Streckung um den Faktor ___ in ___-Richtung und durch Verschiebung um ___ nach ________.

b) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = \sin(2(x+4))$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = \sin(x)$ durch Streckung um den Faktor ___ in ___-Richtung (Periodenlänge = ___) und durch Verschiebung um ___ nach ________.

c) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2{,}5\cos(x-2) - 2$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = \cos(x)$ durch Streckung um den Faktor ___ in ___-Richtung, durch Verschiebung um ___ nach ________ und durch Verschiebung um ___ nach ________.

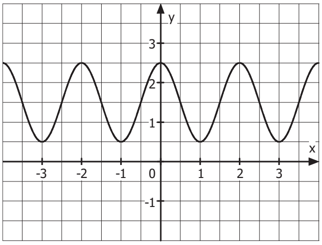
Aufgabe 11 : Ermitteln Sie jeweils eine mögliche zugehörige Funktionsgleichung.

a)



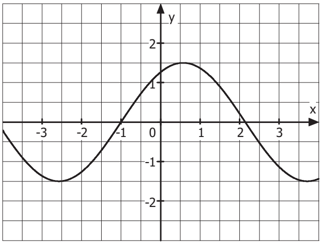
$f(x) =$ __________________

b)



$f(x) =$ __________________

c)



$f(x) =$ __________________

1.2 Gleichungen

Aufgabe 12 : Lösen Sie die Gleichungen.

a) $-x^4+1=4-4x^4$ **b)** $x^3-2x^2=x^2$ **c)** $6e^x-3=1-4e^x$

d) $1-e^{4x+3}=-4$ **e)** $2x\cdot(x^2-1)=0,5-2x$ **f)** $2e^{2x}-e^x=2e^x$

g) $\frac{3}{2}x^4-2=x^4$ **h)** $\sin(x)=0,2$ **i)** $2x^4-24x^2=-72+2x^2$

j) $2e^{2x}-17e^x+8=0$ **k)** $\frac{1}{x^3}-4=4$ **l)** $\cos(4x)+0,5=0$

Aufgabe 13

Entscheiden Sie, welchem Gleichungstyp bzw. Lösungsstrategie die Gleichungen zugeordnet werden können.

Nr.	Gleichung	Typ 1 Gegen - operation	Typ 1S Substitution führt zu $\begin{Bmatrix} sin(u) \\ cos(u) \end{Bmatrix} = ...$	Typ 2 S. v. Nullpr.	Typ 3 abc - bzw. pq - Formel	Typ S Substitution führt zu $...u^2+...u+...=0$
1	$3x^3=-2$	☐	☐	☐	☐	☐
2	$x^3-2x=0$	☐	☐	☐	☐	☐
3	$-x^4-2x^2=x^3$	☐	☐	☐	☐	☐
4	$-x^2-5=-x$	☐	☐	☐	☐	☐
5	$-x^4-2x^2=2$	☐	☐	☐	☐	☐
6	$2e^{1-2x}-1=3$	☐	☐	☐	☐	☐
7	$2e^{2x}=3e^x$	☐	☐	☐	☐	☐
8	$e^{2x}-e^x-2=0$	☐	☐	☐	☐	☐
9	$2e^{3x}-2e^x=0$	☐	☐	☐	☐	☐
10	$-\sin(x)=-0,3$	☐	☐	☐	☐	☐
11	$\sin(-x+2)=1$	☐	☐	☐	☐	☐

1.3 Differenzialrechnung

Aufgabe 14: Leiten Sie ab.

a) $f(x) = 2x^3 - 2x + 1$ $f'(x) =$ ______

b) $f(x) = x^4 - 0{,}5x + 1$ $f'(x) =$ ______

c) $f(x) = e^{7x-3} - 4$ $f'(x) =$ ______

d) $f(x) = -2\sin(x-3)$ $f'(x) =$ ______

e) $f(x) = \cos(2x-3)$ $f'(x) =$ ______

f) $f(x) = (1-3x)^4$ $f'(x) =$ ______

g) $f(x) = x^2 + e^{2x}$ $f'(x) =$ ______

h) $f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$ $f'(x) =$ ______

i) $f(x) = 4 \cdot x^3 \cdot e^{4x}$ $f'(x) =$ ______

j) $f(x) = 0{,}5x^5 + e^{-x}$ $f'(x) =$ ______

k) $f(x) = \cos(4x-1)$ $f'(x) =$ ______

l) $f(x) = -e^{-2x} - 2x$ $f'(x) =$ ______

m) $f(x) = -\sin(3x-1)$ $f'(x) =$ ______

n) $f(x) = -ax - 3x$ $f'(x) =$ ______

o) $f(x) = \sin(x) \cdot x$ $f'(x) =$ ______
(aus Abiturprüfung 2022)

p) $f(x) = x^3 \cdot (x-2) \cdot 2$ $f'(x) =$ ______

q) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ $f'(x) =$ ______

r) $f(x) = 3x^2 - x - \dfrac{1}{x}$ $f'(x) =$ ______
(aus Abiturprüfung 2019)

s) $f(x) = 2\sqrt{x}$ $f'(x) =$ ______
(aus Abiturprüfung 2020)

Vor dem Ableiten

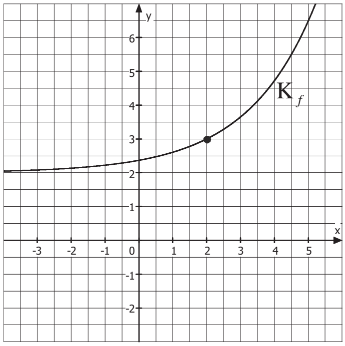
$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 15

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{0,5x-1} + 2$.

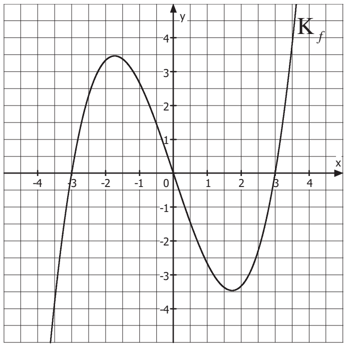
In $x = 2$ wird eine Tangente an das Schaubild angelegt. Berechnen Sie deren Gleichung.



Aufgabe 16

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$.

Es gibt eine Tangente an das Schaubild, welche die Steigung -3 besitzt.
Berechnen Sie deren Gleichung.



Aufgabe 17 : Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0,25x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Schaubildes mit der y-Achse.
b) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte.
c) Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.
d) Berechnen Sie die Gleichung der Wendetangente, welche eine positive Steigung besitzt.

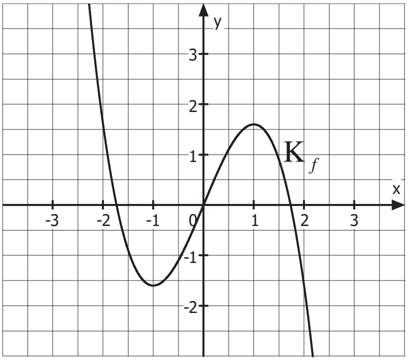
Aufgabe 18 : Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

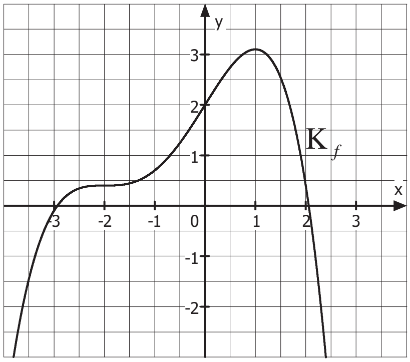
a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Schaubildes mit der x-Achse.
b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Schaubildes mit der y-Achse.
c) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte.
d) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.

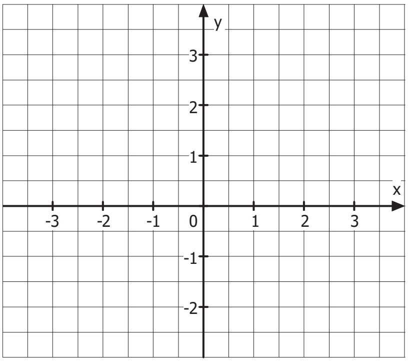
Aufgabe 19 : Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -2e^{-x} - 4x$.
Untersuchen Sie das zugehörige Schaubild auf Extrem- und Wendepunkte.

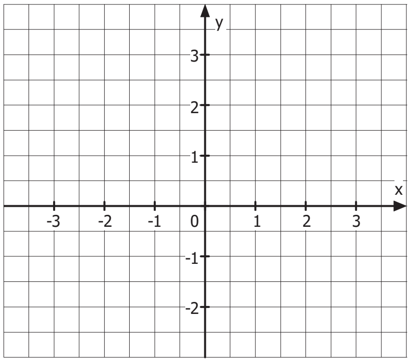
Aufgabe 20 : Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(x) + x$.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass das zugehörige Schaubild bei $x = \pi$ einen Sattelpunkt besitzt.

Aufgabe 21 : Skizzieren Sie jeweils die Schaubilder der zugehörigen Ableitungsfunktionen.



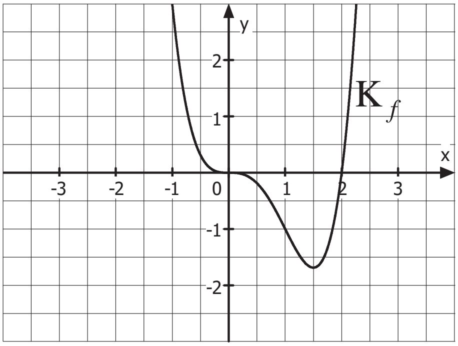






Aufgabe 22

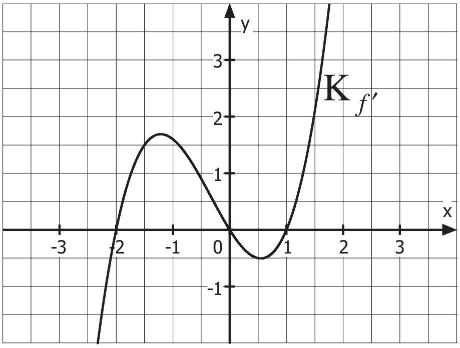
Gegeben ist das Schaubild der Funktion f.
Entscheiden Sie, welche der nachfolgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind.
Begründen Sie Ihre Antworten kurz.



Aussage	Entscheidung	Begründung
a) f' besitzt eine doppelte Nullstelle.	☐ wahr ☐ falsch	
b) Das Schaubild von f' besitzt genau zwei Extrempunkte.	☐ wahr ☐ falsch	
c) Das Schaubild von f' besitzt bei $x = 1,5$ einen Tiefpunkt.	☐ wahr ☐ falsch	
d) $f'(-0,5) > 0$	☐ wahr ☐ falsch	
e) Das Schaubild von f' besitzt bei $x = 1,3$ einen negativen y-Wert.	☐ wahr ☐ falsch	
f) $f''(0) = 0$	☐ wahr ☐ falsch	
g) $f''(-0,5) < 0$ (**Tipp:** Argumentieren Sie über die Krümmung)	☐ wahr ☐ falsch	
h) Das Schaubild von f' ist symmetrisch zum Ursprung.	☐ wahr ☐ falsch	

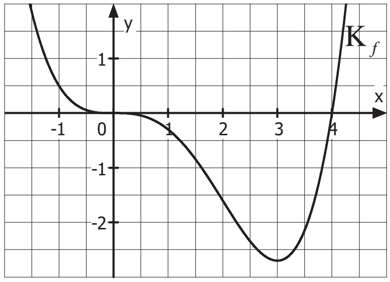
Aufgabe 23

Gegeben ist das Schaubild der Ableitungsfunktion f' zur Funktion f.
Entscheiden Sie, welche der nachfolgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind.
Begründen Sie Ihre Antworten kurz.



Aussage	Entscheidung	Begründung
a) Das Schaubild von f besitzt genau drei Extrempunkte.	☐ wahr ☐ falsch	
b) Das Schaubild von f besitzt genau drei Wendepunkte.	☐ wahr ☐ falsch	
c) Das Schaubild von f besitzt einen Sattelpunkt.	☐ wahr ☐ falsch	
d) Das Schaubild von f hat an der Stelle 0 eine waagrechte Tangente.	☐ wahr ☐ falsch	
e) f ist bei $x=-1$ steigend.	☐ wahr ☐ falsch	
f) Es gilt: $f(-2)<f(-1)$	☐ wahr ☐ falsch	
g) Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.	☐ wahr ☐ falsch	

Aufgabe 24
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung zum nebenstehenden Schaubild mit Hilfe des Nullstellenansatzes.



Aufgabe 25 : Das Schaubild einer Funktion 4. Grades ist symmetrisch zur y-Achse, verläuft durch P(0 | 2) und besitzt den Tiefpunkt T(1 | 0). Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung.

Aufgabe 26 : Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist symmetrisch zum Ursprung und hat hier die Steigung 4. Es schneidet an der Stelle -2 die x-Achse. Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung.

Aufgabe 27 : Geben Sie die zugehörigen mathematischen Bedingungen an.

Beschreibungen des Schaubildes	Mathematische Bedingungen
Schaubild besitzt an der Stelle 2 eine waagrechte Tangente	
Schaubild besitzt den Wendepunkt W(1 | –2)	
Schaubild besitzt den Sattelpunkt S(–4 | 5)	
Schaubild berührt an der Stelle 2 die x-Achse	
Schaubild ist achsensymmetrisch zur y-Achse	
Schaubild besitzt an der Stelle 2 eine Steigung von 4	
Schaubild schneidet das Schaubild der bekannten Funktion $g(x)$ an der Stelle 2	
Schaubild verläuft an der Stelle 3 parallel zur Geraden $y = -2x + 3$	

Aufgabe 28 (aus Abiturprüfung 2022)

Gegeben sind die Punkte $T_1(-2|2)$, $T_2(2|2)$ und H(0|4).
Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Polynomfunktion vom Grad 4, deren Schaubild K die folgenden drei Eigenschaften hat:

- K ist symmetrisch zur y-Achse.
- K schneidet die y-Achse im Punkt H.
- K hat einen Extrempunkt in T_1.

Aufgabe 29

Ein Computervirus verbreitet sich gemäß nachfolgender Tabelle.

Anzahl der Tage nach erstmaligem Auftritt	0	1	2	3	4	5	6	7
Gesamte Anzahl an infizierten Computern	1	3	8	27	88	198	699	2452

a) Die Funktion f soll den Vorgang näherungsweise beschreiben. Welcher Funktionstyp erscheint Ihnen hierfür sinnvoll?

b) Ermitteln Sie den zugehörigen Funktionsterm durch Regression mit Hilfe des WTR.

c) Der zugehörige Wert des Bestimmtheitsmaßes lautet: $r^2 \approx 0{,}9986$. Interpretieren Sie diesen Wert.

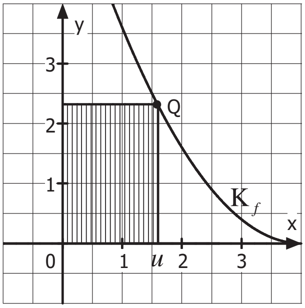
Aufgabe 30

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 4$, deren Schaubild K_f zwei Schnittpunkte mit der x-Achse besitzt.
Zwei Eckpunkte eines zur y-Achse symmetrischen Rechtecks befinden sich auf der x-Achse, zwischen diesen beiden Schnittpunkten. Die anderen beiden Eckpunkte des Rechtecks befinden sich auf dem Schaubild K_f.
Berechnen Sie den maximalen Umfang eines solchen Rechtecks.

Aufgabe 31

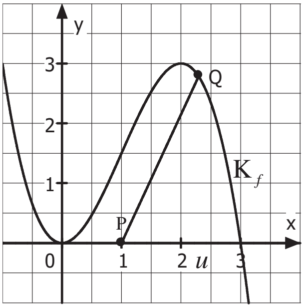
Nachfolgend sind 6 Extremwertaufgaben dargestellt. Hierbei gehört zu jeder eine der unten stehenden Zielfunktionen. Ordnen Sie zu.
(Der Punkt Q befindet sich jeweils „irgendwo“ auf dem Schaubild K_f.)

1. Flächeninhalt eines derartigen Rechtecks mit Eckpunkt im Ursprung soll maximal werden.



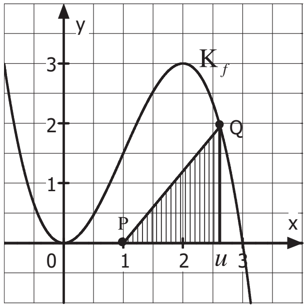
Zielfunktion : ___

2. Abstand zwischen den Punkten P(1|0) und Q soll maximal werden.



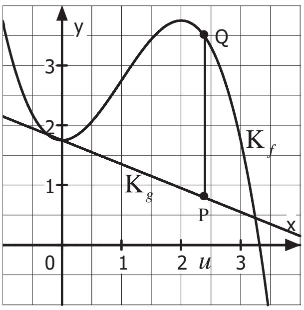
Zielfunktion : ___

3. Flächeninhalt eines derartigen Dreiecks mit Eckpunkt P(1|0) soll maximal werden.



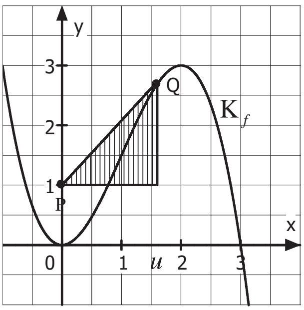
Zielfunktion : ___

4. Senkrechter Abstand zwischen den Schaubildern K_f und K_g soll maximal werden.



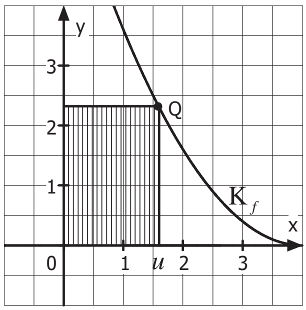
Zielfunktion : ___

5. Flächeninhalt eines derartigen Dreiecks mit Eckpunkt P(0|1) soll maximal werden.



Zielfunktion : ___

6. Umfang eines derartigen Rechtecks mit Eckpunkt im Ursprung soll maximal werden.



Zielfunktion : ___

A: $\frac{1}{2}\cdot(u-1)\cdot f(u) \quad (u>1)$

B: $f(u)-g(u)$

C: $\sqrt{(u-1)^2+\left(f(u)\right)^2}$

D: $\frac{1}{2}\cdot u\cdot\left(f(u)-1\right) \quad \left(f(u)>1\right)$

E: $u\cdot f(u)$

F: $2\cdot u+2\cdot f(u)$

1.4 Integralrechnung

Aufgabe 32 : Bestimmen Sie jeweils die Funktionsgleichung einer Stammfunktion.

a) $f(x) = -x^3 + 1$ F(x) = ____________________

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x + 1$ F(x) = ____________________

c) $f(x) = 2e^{x-3} - 4$ F(x) = ____________________

d) $f(x) = 2e^{2x-3} - 4$ F(x) = ____________________

e) $f(x) = \cos(4x-4)$ F(x) = ____________________

f) $f(x) = (1-4x)^4$ F(x) = ____________________

g) $f(x) = x^2 + 2e^{2x}$ F(x) = ____________________

h) $f(x) = \sin(3x-5)$ F(x) = ____________________

i) $f(x) = (3x-2)^4$ F(x) = ____________________

j) $f(x) = 0{,}5x^5 - 2x^3 - x$ F(x) = ____________________

k) $f(x) = -x^3 - 2 + x$ F(x) = ____________________

l) $f(x) = -e^{-2x} - 2x$ F(x) = ____________________

m) $f(x) = -\sin(6x)$ F(x) = ____________________

n) $f(x) = -2x^4 + e^x$ F(x) = ____________________

o) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x-5}$ F(x) = ____________________

p) $f(x) = 4x^3 - e^{-x}$ F(x) = ____________________

q) $f(x) = -e^{1-2x} + x$ F(x) = ____________________

r) $f(x) = e^{ax+b}$ F(x) = ____________________

s) $f(x) = -\sin(2ax-b)$ F(x) = ____________________

t) $v(t) = 0{,}6 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{3} \cdot t\right)$ V(t) = ____________________

(aus Abiturprüfung 2020)

Aufgabe 33

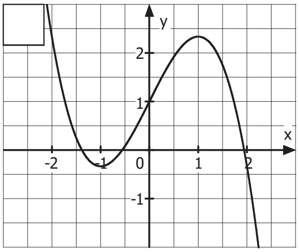
a) Erklären Sie rechnerisch, weshalb eine Funktion unendlich viele Stammfunktionen besitzt.

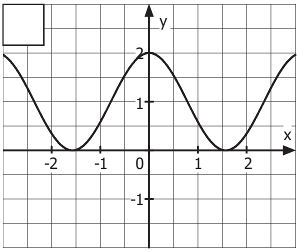
b) Erklären Sie grafisch, weshalb eine Funktion unendlich viele Stammfunktionen besitzt.

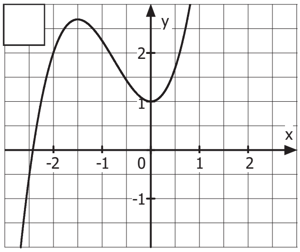
c) Bei welcher Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 8x$ verläuft das Schaubild durch den Punkt $P(3\,|\,-31)$?
(Hinweis: Berechnen Sie den hierzu notwendigen Wert der Integrationskonstanten.)

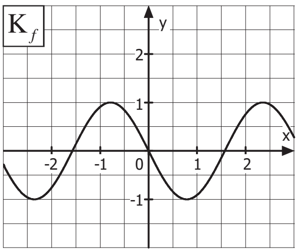
Aufgabe 34

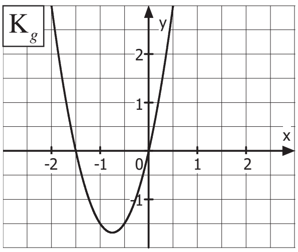
In der unteren Zeile befinden sich die Schaubilder K_f, K_g und K_h. In der oberen Zeile befinden sich die Schaubilder der zugehörigen Stammfunktionen. Ordnen Sie zu, indem Sie diese mit K_F, K_G und K_H beschriften.

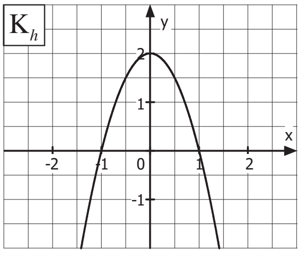












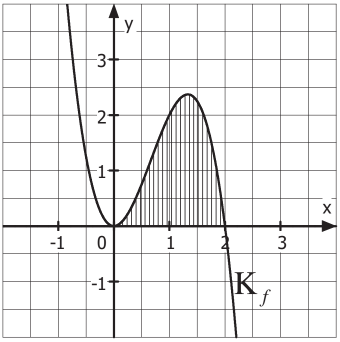
Tipp

N E W
N E W
N E W

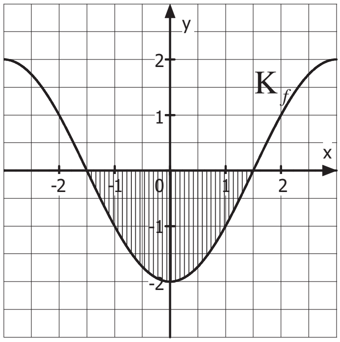
Aufgabe 35

Berechnen Sie jeweils den Inhalt der schraffierten Fläche.

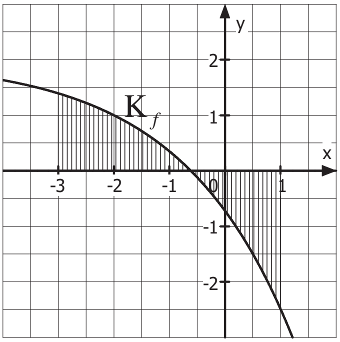
a) $f(x) = -2x^3 + 4x^2$



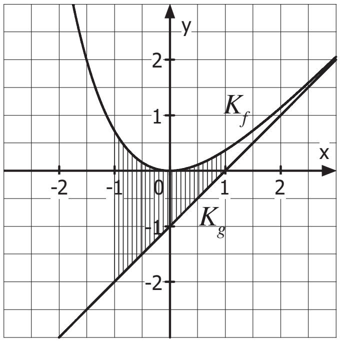
b) $f(x) = -2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$



c) $f(x) = -e^{0,5x+1} + 2$



d) $f(x) = x - 1 + e^{-x}$; $g(x) = x - 1$



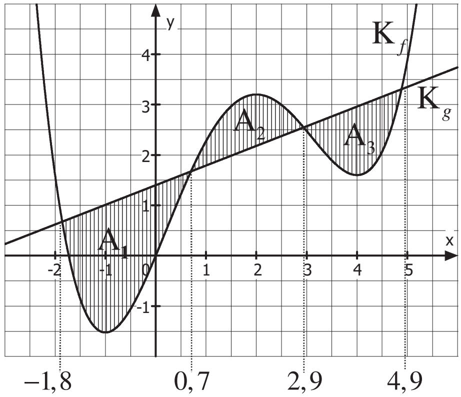
(aus Abiturprüfung 2019)

s

Aufgabe 36

Die Schaubilder der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ schließen drei Flächen mit den Inhalten $A_1 = 4{,}1$ FE, $A_2 = 1{,}5$ FE und $A_3 = 1{,}7$ FE ein.

Geben Sie zu jedem der nachfolgenden Flächenberechnungsansätze das zugehörige Ergebnis an.



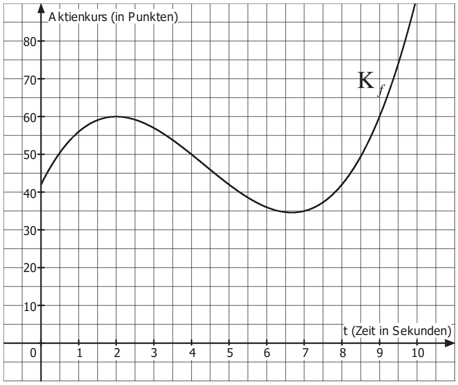
Flächenberechnungsansatz	Ergebnis
a) $\int_{0,7}^{2,9} \left(f(x)-g(x)\right)dx$	____
b) $\int_{2,9}^{4,9} \left(f(x)-g(x)\right)dx$	____
c) $\int_{-1,8}^{2,9} \left(f(x)-g(x)\right)dx$	____
d) $\int_{-1,8}^{4,9} \left(g(x)-f(x)\right)dx$	____
e) $\int_{-1,8}^{0,7} \left(g(x)-f(x)\right)dx + \int_{0,7}^{2,9} \left(f(x)-g(x)\right)dx + \int_{2,9}^{4,9} \left(g(x)-f(x)\right)dx$	____
f) $\int_{-1,8}^{2,9} g(x)-f(x)\,dx$	____
g) $\int_{4,9}^{2,9} \left(g(x)-f(x)\right)dx$	____

Von Schnittstelle zu Schnittstelle integrieren!

Ansonsten werden positive und negative Flächeninhaltswerte zu einer **„Flächenbilanz“** verrechnet.

1.5 Anwendungsorientierte Aufgaben (Zusatz)

Aufgabe 37



Die Funktion $f(t)=0,5t^3-6,5t^2+20t+42$ beschreibt den Kurs einer Aktie über einen Zeitraum von 10 Sekunden.

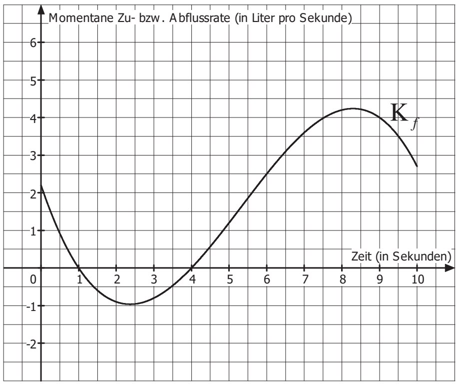
a) Welcher Aktienkurs liegt zum Zeitpunkt $t=3$ vor?

b) Zu welchem Zeitpunkt liegt der geringste Aktienkurs vor. Wie hoch ist dieser?

c) An welchem der beiden nachfolgenden Zeitpunkte nimmt der Aktienkurs stärker zu: $t=1$ oder $t=7,7$?

d) Zu welchem Zeitpunkt nimmt der Aktienkurs am stärksten ab?

Aufgabe 38



Ein Biogasspeicher ist mit einer Zuflussleitung und einer Abflussleitung versehen. Die Funktion f mit $f(t)=-0,05t^3+0,8t^2-2,95t+2,2$ beschreibt die momentane Zu- bzw. Abflussmenge über einen Zeitraum von 10 Sekunden. Positive Funktionswerte stehen hierbei für einen Gaszufluss, negative für einen Gasabfluss.

a) Berechnen Sie $f(3)$ und $f(9)$. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

b) Beschreiben Sie auf Basis des Schaubildes: Wann liegt ein Zufluss bzw. Abfluss vor?

c) An wie vielen Zeitpunkten fließt genau 1 Liter pro Sekunde zu?

d) Zu welchem Zeitpunkt liegt der stärkste Gaszufluss vor? Geben Sie diesen an.

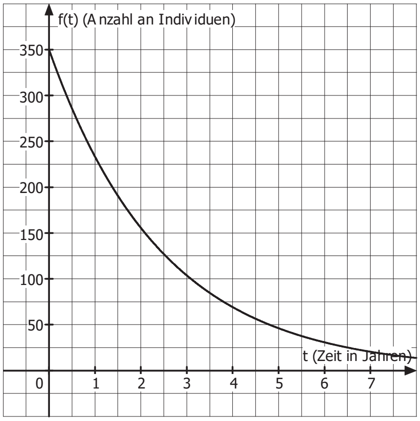
e) Welche Gasmenge fließt während der Abflusszeit insgesamt ab?

f) Es gilt: $\int_2^7 \left(f(t)\right)dt \approx 4,15$. Interpretieren Sie.

g) Zum Zeitpunkt $t=3$ befinden sich 50 l im Gasspeicher. Bestimmen Sie hiermit die Gleichung der Funktion, die zu jedem Zeitpunkt den aktuellen Gasbestand im Speicher angibt.

Aufgabe 39

Die Population einer vom Aussterben bedrohten Spezies besteht aus 350 Individuen und verringert sich jährlich um ein Drittel. Im Schaubild ist die Entwicklung dargestellt.



a) Begründen Sie, dass hier exponentieller Zerfall vorliegt.

b) Geben Sie die Gleichung der Funktion f mit $f(t)$ an, welche zu jedem Zeitpunkt die noch vorhandene Anzahl an Individuen angibt.

c) Geben Sie die Funktionsgleichung $f(t)$ in der Form mit (der eulerschen Zahl) e als Basis an.

d) Berechnen Sie die Halbwertszeit.

e) Wann ist nur noch 10 % des Anfangsbestandes der Population vorhanden?

f) Berechnen Sie die höchste momentane Zerfallsgeschwindigkeit der Population.

2 Basisübungen zur Vektorgeometrie

2.1 Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 40

Lösen Sie die Linearen Gleichungssysteme.

a)
$$\begin{aligned} x_1+4x_2+6x_3&=1\\ 2x_1+3x_2+7x_3&=1\\ 3x_1+2x_2+8x_3&=2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+4x_3&=8\\ 3x_1+4x_2-5x_3&=-4\\ 4x_1-6x_2+3x_3&=1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -4+3x_2-x_3&=-x_1\\ 2x_1-7&=-x_2-x_3\\ 2x_1-4x_2+4x_3&=6 \end{aligned}$$

2.2 Vorwissen (Punkte, Vektoren, Rechenoperationen)

Aufgabe 41: Gegeben sind die Punkte A(1| 2| −3) und B(0| −2| 2).

a) Berechnen Sie den Vektor $\overrightarrow{AB}$.

b) Berechnen Sie dessen Länge.

Aufgabe 42: Prüfen Sie, ob die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-1\\4\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$

2.3 Geraden

Aufgabe 43: Gegeben ist die Gerade g mit $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ mit $r\in\mathbb{R}$.

Untersuchen Sie, ob die Punkte auf g liegen.

a) $A(2\,|-3\,|\,4)$

b) $B(0\,|\,3\,|\,3)$

Aufgabe 44: Gegeben sind Punkte A(−1 | 2 | 0) und B(2 | 1 | − 2). Die Punkte liegen auf der Geraden g. Bestimmen Sie eine mögliche Geradengleichung von g.

Aufgabe 45: Die Gerade h schneidet die Gerade g mit $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ (mit $r\in\mathbb{R}$) in deren Stützpunkt senkrecht.

Ermitteln Sie eine mögliche Geradengleichung der Geraden h.

Aufgabe 46: Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$

2.4 Ebenen

Aufgabe 47: Gegeben ist die Ebene E mit E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

Untersuchen Sie, ob der Punkt $A(1|1|1)$ in E liegt.

Aufgabe 48: Gegeben sind Punkte A(1|2|4), B(0 | 2 |− 2) und C(1|3|4), welche in der Ebene E liegen. Bestimmen Sie eine mögliche Ebenengleichung.

Aufgabe 49: Gegeben ist die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

Geben Sie die Parametergleichung einer zu g senkrechten Ebene an.

Aufgabe 50: Gegeben ist die Ebene E mit E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Spurpunkte.

b) Berechnen Sie die Gleichungen der Spurgeraden.

2.5 Schnittwinkel

Aufgabe 51: Berechnen Sie den Schnittwinkel.

a) Zwischen $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (mit $r, s \in \mathbb{R}$).

b) Zwischen $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ (mit $r \in \mathbb{R}$) und x_1x_3-Ebene.

2.6 Abstandsberechnungen

Aufgabe 52 : Welchen Abstand haben die Punkte A(−2| 0|1) und B(1| −3| 5) voneinander?

Aufgabe 53 : Welchen Abstand hat der Punkt A(−2| 0|1) von den Koordinatenebenen?

Aufgabe 54 : Berechnen Sie den Abstand.

a) Zwischen $Q(0\,|\,2\,|-1)$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

b) Begründen Sie, dass der in a) errechnete Abstand auch dem Abstand zwischen g und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ entspricht.

2.7 Modellieren mit Vektoren

Aufgabe 55 : Ein U-Boot bewegt sich nach der Bahngleichung

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 36 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -3{,}75 \end{pmatrix}$ (t in Stunden, sonstige Angaben in km).

Die x_1x_2-Ebene stellt die Wasseroberfläche des Meeres dar.

a) Befindet sich das U-Boot auf einer Steig- oder Sinkfahrt?

b) Welche Geschwindigkeit hat es?

c) Nach wie vielen Stunden hat das U-Boot eine Tiefe von $9{,}5\,\text{km}$?

3 Basisübungen zur Stochastik

3.1 Baumdiagramm und Pfadregeln

Aufgabe 56: In einer Urne befinden sich 3 blaue, 4 rote und 5 grüne Kugeln.
Es werden 3 Kugeln nacheinander gezogen. Gezogene Kugeln werden zurückgelegt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

a) Man erhält 3 Kugeln der gleichen Farbe.

b) Man erhält genau eine rote Kugel.

c) Man erhält 3 Kugeln mit verschiedenen Farben.

d) Man erhält zuerst eine grüne Kugel und dann 2 blaue Kugeln.

e) Man erhält mindestens eine grüne Kugel.

Aufgabe 57: In einem Stapel aus 13 Karten befinden sich 4 Asse, 2 Könige, 4 Damen und 3 Buben. Ein Spieler hebt zwei Karten ab.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

a) Der Spieler erhält kein Ass.

b) Der Spieler erhält höchstens ein Ass.

c) Der Spieler erhält genau einen König.

d) Der Spieler erhält ein Ass und einen Bube.

Aufgabe 58: In einer Urne befinden sich 10 blaue, 10 rote und 10 grüne Kugeln.
Wie viele Kugeln muss man mindestens (mit zurücklegen) entnehmen, sodass die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine blaue Kugel zu ziehen, mindestens 98 % beträgt?

3.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Vierfeldertafel

Aufgabe 59: An einer Schule sind 24 % der Autos alt. 18 % der Autos sind schmutzig.
65 % der Autos sind weder alt noch schmutzig.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewähltes Auto alt und schmutzig?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewähltes Auto alt oder schmutzig?

c) Man sieht ein altes Auto. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es schmutzig?

d) Sind die beiden Eigenschaften „alt" und „schmutzig" voneinander abhängig oder unabhängig?

Aufgabe 60: An einer Schule wurden im Laufe des Schuljahres 46 % der Schüler vom Hausmeister ermahnt. 20 % der ermahnten Schüler verhalten sich ordentlich. Insgesamt verhalten sich 53 % der Schüler ordentlich.

a) Geben Sie ein vollständig ausgefülltes Baumdiagramm an.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Schüler unordentlich und wurde noch nicht vom Hausmeister ermahnt?

c) Man trifft auf einen ordentlichen Schüler. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde er schon vom Hausmeister ermahnt?

3.3 Zufallsvariable, Erwartungswert und Standardabweichung

Aufgabe 61: Eine Klasse bietet bei der Weihnachtsfeier ein Glücksspiel an. Hierbei wird ein Würfel ein Mal geworfen. Falls eine 1 oder 3 geworfen wird, bekommt der Spieler 2 € ausbezahlt. Bei einer 6 bekommt er 5 € ausbezahlt. Ansonsten bekommt er 1 € ausbezahlt. Wie hoch sollte die Klasse den Eintrittspreis für das Spiel festlegen, sodass sie pro Spiel durchschnittlich 0,50 € Gewinn macht?

3.4 Binomialverteilung

Aufgabe 62: Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Bernoulliformel.

a) Eine Maschine produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 78 % fehlerfreie Chips. Es werden 17 Chips überprüft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 11 fehlerfrei?

b) Emir verwandelt einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er von 15 Freiwürfen genau 13?

c) Ein Glücksrad hat 3 gleich große Felder mit den Farben gelb, grün und blau. Das Glücksrad wird 8 Mal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint 3 Mal die Farbe blau?

Aufgabe 63: Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = 0{,}4$.
Bestimmen Sie mithilfe des WTR.

a) $P(X = 18) =$ ____

b) $P(X < 9) =$ ____

c) $P(X \geq 15) =$ ____

d) $P(X > 11) =$ ____

e) $P(9 \leq X \leq 13) =$ ____

Aufgabe 64: Dan trifft einen Elfmeter mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Er schießt 20 Elfmeter. Für welche Anzahl an Treffern beträgt die Wahrscheinlichkeit etwa 16,86 %?

Aufgabe 65: Dan trifft einen Elfmeter mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Wie viele Elfmeter darf er höchstens schießen, sodass die Wahrscheinlichkeit, höchstens 10 zu treffen, mehr als 50 % beträgt?

4 Basisübungen zum Problemlösen

Aufgabe 66: Jakob und Lovis können sich nicht einigen und wollen deshalb eine Münze werfen. Leider ist die Münze verbogen.
Wie können sie mithilfe der verbogenen Münze ein faires Glückspiel mit gleichen Gewinnchancen für beide durchführen?

Aufgabe 67: Jonas hat eine 4 kg schwere Wassermelone, deren Masse zu 99 % aus Wasser besteht. Unvorsichtigerweise lässt sie sie zu lange in der Sonne liegen, bis die Melone nur noch zu 98 % aus Wasser besteht.
Wie schwer ist die Melone dann noch?

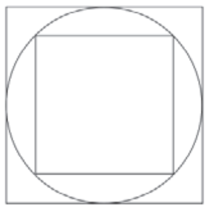
Aufgabe 68: Mara legt Blättchen nach nebenstehendem Muster. Die ersten drei Muster hat sie schon gelegt.

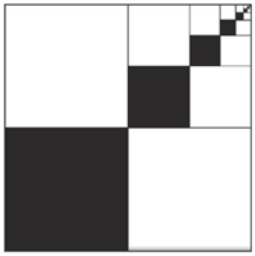
Ab welchem Muster benötigt Mara mehr als 1000 Blättchen? Begründen Sie.

Aufgabe 69: Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten A(3 | 3 | 3), B(3 | 5 | 3), C(9 | 5 | 3). Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D, sodass das Volumen der Pyramide ABCD gleich 10 ist.

Aufgabe 70: Daniel startet seine Wanderung um 8 Uhr im Tal. Er kommt um 18 Uhr auf der Berghütte an und übernachtet dort. Am nächsten Morgen beginnt er seinen Rückweg um 8 Uhr und erreicht um 18 Uhr das Tal.
Hierbei wandert Daniel nicht unbedingt mit konstanter Geschwindigkeit.
Beweisen Sie, dass es eine Uhrzeit zwischen 8 Uhr und 18 Uhr gibt, zu welcher sich Daniel an beiden Tagen an der exakt gleichen Stelle seiner Wanderung befindet.

Aufgabe 71: In ein Quadrat ist ein Kreis einbeschrieben. Der Kreis stellt wiederum den Umkreis eines kleineren Quadrates dar.
In welchem Verhältnis stehen die die Flächeninhalte der beiden Quadrate zueinander?





Aufgabe 72: Ein Quadrat wird in immer kleinere Quadrate zerlegt: Das Ausgangsquadrat wird geviertelt. Das Viertelquadrat links unten wird schwarz eingefärbt. Das Quadrat rechts oben wird wieder geviertelt usw.. Auf diese Weise entstehen unendlich viele schwarze Quadrate, die immer kleiner werden. Wie groß ist der prozentuale Anteil der schwarz gefärbten Fläche am Ausgangsquadrat?

VI Ausführliche Lösungen

Lösungen Analysis

1 Funktionen

Aufgabe 1

Lösungsweg 1
1. Steigung bestimmen:
$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-(-2)}{-1-3}=\frac{6}{-4}=-1,5$$

2. Punkt $(P_1(3|-2))$ und Steigung in $y=mx+b$ einsetzen:
$$\begin{aligned} y&=mx+b\\ -2&=-1,5\cdot 3+b\\ -2&=-4,5+b\\ 2,5&=b \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Gesuchte Gerade: $y=-1,5x+2,5$

Lösungsweg 2
Beide Punkte in $y=mx+b$ einsetzen. Man erhält 2 lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten.
Dieses Lineare Gleichungssystem lösen:

$P_1(3|-2)$: $-2=m\cdot 3+b \Leftrightarrow 3m+b=-2$ (1)
$P_2(-1|4)$: $4=m\cdot(-1)+b \Leftrightarrow -m+b=4$ (2)

Gleichung (1) − (2): $3m-(-m)+b-b=-2-4 \Leftrightarrow$
$4m=-6 \Leftrightarrow m=-1,5$
Einsetzen in Gleichung (2): $-(-1,5)+b=4 \Leftrightarrow$
$b=2,5$

$\Rightarrow$ Gesuchte Gerade: $y=-1,5x+2,5$

Aufgabe 2

a) $m_1=-2$;
Bedingung für parallel: $m_1=m_2$
$y=-2x+1$ (b beliebig)

b) $m_1=-1$;
Bedingung für parallel: $m_1=m_2$
$y=-x+1$ (b beliebig)

c) $m_1=-2$;
Bedingung für senkrecht: $m_2=\frac{-1}{m_1}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}x+1$ (b beliebig)

d) $m=\tan(60°)=\sqrt{3}$; $y=\sqrt{3}x$

e) $y=-4$;

f) $x=2$

Aufgabe 3

$f(x)=-x^3-2x+2$; Grad 3; $S_y(0|2)$;
von II nach IV; weder noch

$f(x)=2x^3+x$; Grad 3; $S_y(0|0)$;
von III nach I; symm. zum Ursprung

$f(x)=-x^4-2x^2-1$; Grad 4; $S_y(0|-1)$;
von III nach IV; symm. zur y-Achse

$f(x)=0,5x\cdot(x^3-2)=0,5x^4-x$; Grad 4;
$S_y(0|0)$; von II nach I; weder noch

$$\begin{aligned} f(x)&=(1-x^2)\cdot(x^2+1)\\ &=x^2+1-x^4-x^2=-x^4+1 \end{aligned}$$
Grad 4; $S_y(0|1)$; von III nach IV;
symm. zur y-Achse

Aufgabe 4

Hinweis: Prüfen Sie Grad, Schnittpunkt mit y-Achse, Verlauf und Symmetrie.

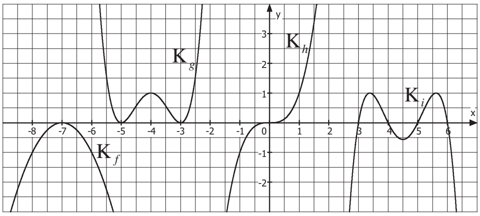
a) A: $f_5(x)$ C: $f_9(x)$
B: $f_6(x)$ D: $f_7(x)$

b) A: $f_4(x)$ C: $f_8(x)$
B: $f_1(x)$ D: $f_7(x)$

Aufgabe 5

K_f: $f(x)=5\cdot(x+6)\cdot(x+5)\cdot(x+4)$
K_g: $f(x)=-2\cdot(x+2)\cdot x^3$
K_h: $f(x)=3\cdot(x-2)\cdot(x-4)^2$
K_i: $f(x)=-(x-7)^4$

Aufgabe 6



Aufgabe 7

C : $f_1(x) = \sqrt{x}$

D : $f_2(x) = \dfrac{1}{x^3}$

B : $f_3(x) = x^4$

A : $f_4(x) = x^{-2}$

Aufgabe 8

a) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -2e^x - 1$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = e^x$ durch Spiegelung an der x-Achse, durch Streckung um den Faktor 2 in y-Richtung und durch Verschiebung um 1 nach unten.

b) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = e^{-(x-2)}$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = e^x$ durch Spiegelung an der y-Achse und Verschiebung um 2 nach rechts.

c) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -e^{-x} + 2$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = e^x$ durch Spiegelung an der x-Achse, durch Spiegelung an der y-Achse und Verschiebung um 2 nach oben.

Aufgabe 9

	Asymptote	für $x \to +\infty$	für $x \to -\infty$
a)	$y = -2$	☐	☒
b)	$y = 1$	☒	☐
c)	$y = -2x - 1$	☒	☐
d)	$y = -x + 1$	☐	☒
e)	$y = x - 1$	☒	☐

Aufgabe 10

a) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -4\sin(x) + 1$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = \sin(x)$ durch Spiegelung an der x-Achse, durch Streckung um den Faktor 4 in y-Richtung und durch Verschiebung um 1 nach oben.

b) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = \sin(2(x+4))$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = \sin(x)$ durch Streckung um den Faktor $\dfrac{1}{2}$ in x-Richtung (Periodenlänge $= \dfrac{2\pi}{2} = \pi$) und durch Verschiebung um 4 nach links.

c) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2{,}5\cos(x-2) - 2$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = \cos(x)$ durch Streckung um den Faktor 2,5 in y-Richtung, durch Verschiebung um 2 nach rechts und durch Verschiebung um 2 nach unten.

Aufgabe 11

Mit $f(x) = a \cdot \sin\big(b \cdot (x-c)\big) + d$:

a) • $d = -1$ Mittellinie auf Höhe -1

$\left(\text{oder mit } \dfrac{1+(-3)}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1\right)$

• $a = 2$ (max. Abstand von 2 zur Mittellinie) $\left(\text{oder mit } \dfrac{1-(-3)}{2} = \dfrac{4}{2} = 2\right)$

• $c = 0$ keine Verschiebung bei sin

• $b = \dfrac{2\pi}{p} = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$

$\Rightarrow f(x) = 2 \cdot \sin\big(2x\big) \; -1$

Alternativ: $f(x) = 2 \cdot \cos\big(2 \cdot (x - 0{,}79)\big) - 1$

b) • $d = 1,5$ Mittellinie auf Höhe 1,5

$\left(\text{oder mit } \frac{2,5+0,5}{2} = \frac{3}{2} = 1,5\right)$

• $a = 1$ (max. Abstand von 1 zur Mittellinie) $\left(\text{oder mit } \frac{2,5-0,5}{2} = \frac{2}{2} = 1\right)$

• $c = -0,5$ Verschiebung um 0,5 nach links

• $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$\Rightarrow f(x) = \sin(\pi \cdot (x+0,5)) + 1,5$

Alternativ: $f(x) = \sin(\pi \cdot (x-1,5)) + 1,5$

Alternativ: $f(x) = \cos(\pi \cdot x) + 1,5$

c)

Mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x-c)) + d$:

• $d = 0$ Mittellinie auf Höhe 0

$\left(\text{oder mit } \frac{1,5+(-1,5)}{2} = \frac{0}{2} = 0\right)$

• $a = 1,5$ (max. Abstand von 1,5 zur Mittellinie) $\left(\text{oder mit } \frac{1,5-(-1,5)}{2} = \frac{3}{2} = 1,5\right)$

• $c = -1$ Verschiebung um 1 nach links

• $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

Es kann nicht verlangt werden, dass die exakte Periodenlänge von 2π ($\approx 6{,}28$) abgelesen wird. Auch eine abgelesene Periodenlänge von bspw. 6,1 mit einem zugehörigen b-Wert von $b = \frac{2\pi}{6,1} = 1,03$ ist „richtig".

$\Rightarrow f(x) = 1,5 \cdot \sin(x+1)$

Alternativ: $f(x) = 1,5 \cdot \cos(x-0,57)$

2 Gleichungen

Aufgabe 12

a)
$$\begin{aligned} -x^4+1 &= 4-4x^4 && \mid +4x^4 \;\; -1 \\ 3x^4 &= 3 && \mid :3 \\ x^4 &= 1 && \mid \sqrt[4]{} \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$
(Typ 1; 4. Grad)

b)
$$\begin{aligned} x^3-2x^2 &= x^2 && \mid -x^2 \\ x^3-3x^2 &= 0 \\ x^2 \cdot (x-3) &= 0 \end{aligned}$$
S. v. Nullpr.

$x^2 = 0 \quad \mid \sqrt{} \qquad x-3=0 \quad \mid +3$

$x_{1/2} = 0 \qquad\qquad x_3 = 3$

(Typ 2; 3. Grad)

c)
$$\begin{aligned} 6e^x-3 &= 1-4e^x && \mid +4e^x+3 \\ 10e^x &= 4 && \mid :10 \\ e^x &= \frac{2}{5} && \mid \ln \\ x &= \ln\left(\frac{2}{5}\right) \\ x &\approx -0,92 \end{aligned}$$
(Typ1; Exponentialgleichung)

d)
$$\begin{aligned} 1-e^{4x+3} &= -4 && \mid -1 \\ -e^{4x+3} &= -5 && \mid \cdot(-1) \\ e^{4x+3} &= 5 && \mid \ln \\ 4x+3 &= \ln(5) && \mid -3 \\ 4x &= \ln(5)-3 && \mid :4 \\ x &= \frac{\ln(5)-3}{4} \\ x &\approx -0,35 \end{aligned}$$
(Typ 1; Exponentialgleichung)

e)
$$\begin{aligned} 2x(x^2-1) &= 0,5-2x \\ 2x^3-2x &= 0,5-2x && \mid +2x \\ 2x^3 &= 0,5 && \mid :2 \\ x^3 &= 0,25 && \mid \sqrt[3]{} \\ x &= \sqrt[3]{0,25} \\ x &\approx 0,63 \end{aligned}$$
(Typ 1; 3. Grad)

f)
$$\begin{aligned} 2e^{2x}-e^x &= 2e^x && \mid -2e^x \\ 2e^{2x}-3e^x &= 0 \\ e^x \cdot (2e^x-3) &= 0 \end{aligned}$$
S. v. Nullpr.

$e^x = 0 \quad \mid \ln \qquad 2e^x-3=0 \quad \mid +3$

keine Lösung $\qquad 2e^x = 3 \quad \mid :2$

$e^x = 1,5 \quad \mid \ln$

$x = \ln(1,5)$

$x \approx 0,405$

(Typ 2; Exponentialgleichung)

g)
$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x^4-2 &= x^4 && \mid -x^4+2 \\ \frac{1}{2}x^4 &= 2 && \mid :\frac{1}{2} \\ x^4 &= 4 && \mid \sqrt[4]{} \\ x_1 &= \sqrt[4]{4} \approx 1,41 \\ x_2 &= -\sqrt[4]{4} \approx -1,41 \end{aligned}$$
(Typ 1; 4. Grad)

h)
$$\begin{aligned} \sin(x) &= 0,2 && \mid \sin^{-1} \\ x &= \sin^{-1}(0,2) \end{aligned}$$
$x_1 \approx 0,2$ (nicht in Merkhilfe, nur durch WTR)

$x_2 = \pi - x_1 \approx \pi - 0,2 = 2,94$

weitere Lösungen:

$x = 0,2 \pm 1\cdot 2\pi; \quad x = 0,2 \pm 2\cdot 2\pi; \quad ...$

und

$x = 2,94 \pm 1\cdot 2\pi; \quad x = 2,94 \pm 2\cdot 2\pi; \quad ...$

(Typ 1; Sinusgleichung)

MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

BADEN-WÜRTTEMBERG

ABITURPRÜFUNG 2025

Hauptprüfung	AUFGABEN FÜR DAS FACH
2.2.2	Mathematik (gAN)

Arbeitszeit	255 Minuten
Hilfsmittel	Deutsches Rechtschreibenachschlagewerk **Zusätzlich in Teil B sowie für die Problemlöseaufgabe (PLA):** Eingeführter wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne Handbuch) Mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung Eingeführte Merkhilfe Die zusätzlich zugelassenen Hilfsmittel bekommt der Prüfling genau dann, wenn Teil A unwiderruflich abgegeben wurde. Dies muss spätestens 100 Minuten nach Beginn der Prüfung geschehen.
	Teil A Analysis, Stochastik, Lineare Algebra Pflichtteil: Aufgaben 1 bis 3 Wahlteil: Aufgabe 4 (2 Aufgaben) Aufgabe 5 (2 Aufgaben) Aufgabe 6 (PLA)
	Teil B Analysis (1 Aufgabe) Stochastik (1 Aufgabe) Lineare Algebra (1 Aufgabe)
Bemerkungen	In Teil A sind **alle Aufgaben 1 bis 3** zu bearbeiten. Ebenso in Teil A wählen die Schülerinnen und Schüler **entweder je eine Aufgabe 4 und eine Aufgabe 5** aus den Sachgebieten 1 und 2 **oder** die **Aufgabe 6** (PLA) aus dem verbleibenden Sachgebiet. In Teil B wählen die Lehrkräfte in jedem Sachgebiet eine der beiden vorliegenden Aufgaben aus, **alle vorgelegten Aufgaben** sind von den Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.

Checkliste schriftliche Abiturprüfung

- Kreuzen Sie die erledigten Aufgaben im entsprechenden Kästchen ☐ an.
- Teil A: Tragen Sie bei Bearbeitung von einer der zwei Aufgaben 4 und einer der zwei Aufgaben 5 die von Ihnen getroffene Auswahl (jeweils I oder II) ein. Falls Sie stattdessen Aufgabe 6 bearbeiten, kreuzen Sie diese an.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe einen neuen Bogen.

Teil A – ohne Hilfsmittel

Pflichtteil: Sie müssen alle drei Aufgaben bearbeiten.

☐ Aufgabe 1 (5 BE)

☐ Aufgabe 2 (5 BE)

☐ Aufgabe 3 (5 BE)

Wahlteil: Sie wählen eine Aufgabe 4 und eine Aufgabe 5 **oder** nur die Aufgabe 6 (Problemlöseaufgabe).

☐ Aufgabe 4 Auswahl ___ (5 BE)

☐ Aufgabe 5 Auswahl ___ (5 BE)

Abgabe nach maximal 100 Min.

☐ Aufgabe 6 (10 BE)

Übernahme in Teil B – mit Hilfsmitteln

Teil B – mit Hilfsmitteln

Sie müssen alle drei Aufgaben bearbeiten.

☐ Aufgabe 1 (35 BE)

☐ Aufgabe 2 (20 BE)

☐ Aufgabe 3 (20 BE)

Teil A (ohne Hilfsmittel) Aufgabe 1 Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + 3x^2,\ x \in$ IR.
K ist der Graph der Funktion.

Berechnen Sie 5

- die Koordinaten des Hoch- und des Tiefpunkts von K und
- die Steigung von K im Wendepunkt.

5

Teil A (ohne Hilfsmittel) Aufgabe 2 Stochastik

In einer Urne befinden sich drei rote und zwei gelbe Kugeln sowie eine blaue Kugel. Aus dieser Urne werden nacheinander zufällig zwei Kugeln gezogen, ohne sie zurückzulegen, und ihre Farben werden jeweils notiert.

a Stellen Sie die Situation durch ein geeignetes beschriftetes Baumdiagramm dar. 3

b Formulieren Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit $1 - \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} - \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}$ berechnen lässt. 2

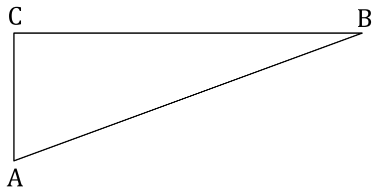
5

Teil A (ohne Hilfsmittel) **Aufgabe 3** **Lineare Algebra**

Die Punkte $A(5 \mid -1 \mid 2)$, $B(9 \mid 2 \mid 12)$ und $C(3 \mid -2 \mid 4)$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks ABC.

a Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel besitzt. 2

b Die abgebildete Skizze stellt das Dreieck ABC dar. 3



Nun wird ein Punkt P hinzugefügt, sodass dieser zusammen mit A, B und C die Eckpunkte eines Parallelogramms bildet.

- Übernehmen Sie die Skizze auf Ihr Lösungsblatt und erweitern Sie diese um einen möglichen Punkt P.
- Bestimmen Sie mögliche Koordinaten des Punktes P so, dass das Parallelogramm kein Rechteck ist.

5

Teil A (ohne Hilfsmittel) **Aufgabe 4 – Auswahl 1** **Stochastik**

Bei einem Glücksspiel wird ein Pfeil auf die in Abbildung 1 dargestellte Scheibe geworfen. Es wird angenommen, dass jeder Pfeil die Scheibe trifft. Die Skalierung gibt den Radius der einzelnen Kreise (in Längeneinheiten) an.

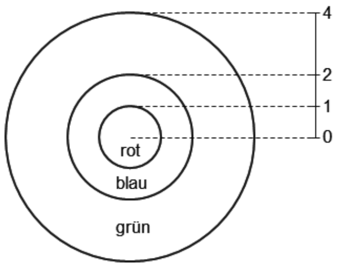


Abb. 1

Man trifft die unterschiedlich gefärbten Bereiche auf der Scheibe mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten:

rot	blau	grün
$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{4}$

a Für das Glücksspiel gelten folgende Regeln: 2

- Ein Spieler bezahlt einen Einsatz von *a* Euro.
- Je nach getroffener Farbe erhält der Spieler folgende Auszahlung:

Getroffene Farbe	Auszahlung
rot	6 Euro
blau	2 Euro
grün	1 Euro

Berechnen Sie den maximalen Einsatz *a*, sodass der Spieler auf lange Sicht keinen Verlust macht.

b Der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r beträgt $\pi \cdot r^2$. 3
Zeigen Sie, dass die oben gegebenen Wahrscheinlichkeiten dem Flächenanteil des jeweiligen Bereichs an der gesamten Kreisfläche entsprechen.

5