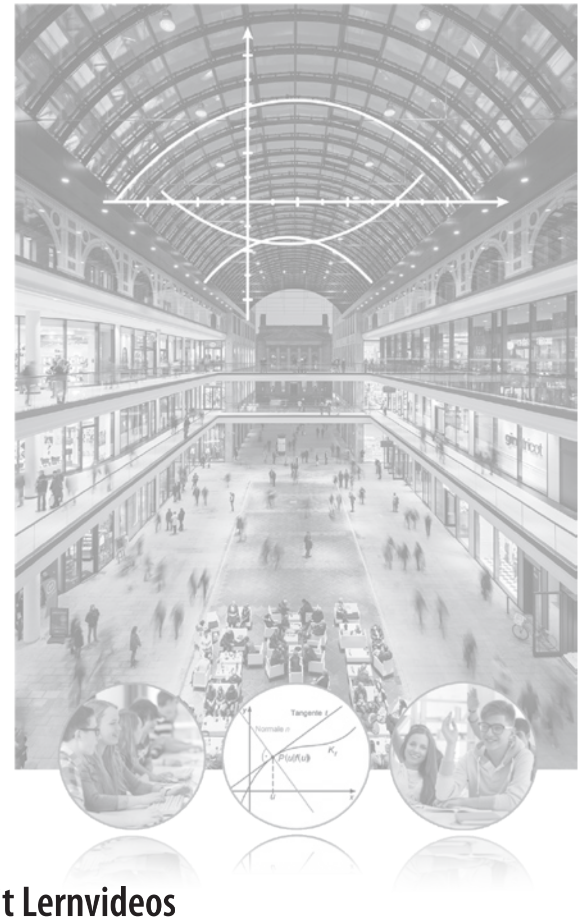
Ott
Rosner

Mathematik
Fachhochschulreife
im Berufskolleg 2025
Prüfungsvorbereitung
Baden-Württemberg

Ott
Rosner

Mathematik

Fachhochschulreife im Berufskolleg 2025 Prüfungsvorbereitung Baden-Württemberg



mit Lernvideos

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser

Roland Ott
Oberstudienrat

Stefan Rosner
Studienrat an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

* * * *

4. Auflage 2024

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0382-04
ISBN 978-3-8120-1141-9

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung dient zur Vorbereitung auf die **Prüfung zur Fachhochschulreife 2025** an Berufskollegs und ist auf die aktuelle Prüfungsordnung abgestimmt.

Dem neuen Prüfungsmodus wird durch eine Vielzahl von Aufgaben für Teil 1, der ohne Hilfsmittel bearbeitet werden muss, und für den Teil 2, bei welchem Hilfsmittel zugelassen sind, Rechnung getragen.

Viele Aufgabenstellungen werden anhand von **Videos** erläutert und ausführlich mit sinnvollen Bemerkungen eines erfahreren Kollegen gelöst.

Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.

Da die Aufgabensammlung allen Schülern/Schülerinnen bei der **selbstständigen** Vorbereitung auf das FHSR-Prüfung helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.

Die Lösungen zu den Originalprüfungsfragen wurden von den Autoren selbst erstellt. Sie basieren auf den offiziellen Vorgaben und bieten eine fachlich fundierte Hilfestellung zur Bearbeitung der Prüfungsaufgaben.

An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Prüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der Prüfung zur Fachhochschulreife in Mathematik

Zu Beginn: SchülerIn erhält beide Aufgabenteile, jedoch keine Hilfsmittel

Phase 1: Bearbeitung des hilfsmittelfreien Teils

Teil	Thema	Auswahl	Richtzeit	Punkte
1	Analysis	keine	ca. 60 min	30

Nach endgültiger Abgabe von Teil 1 erhält SchülerIn die Hilfsmittel

Phase 2: Bearbeitung der Teile mit Hilfsmitteln (WTR + Merkhilfe)

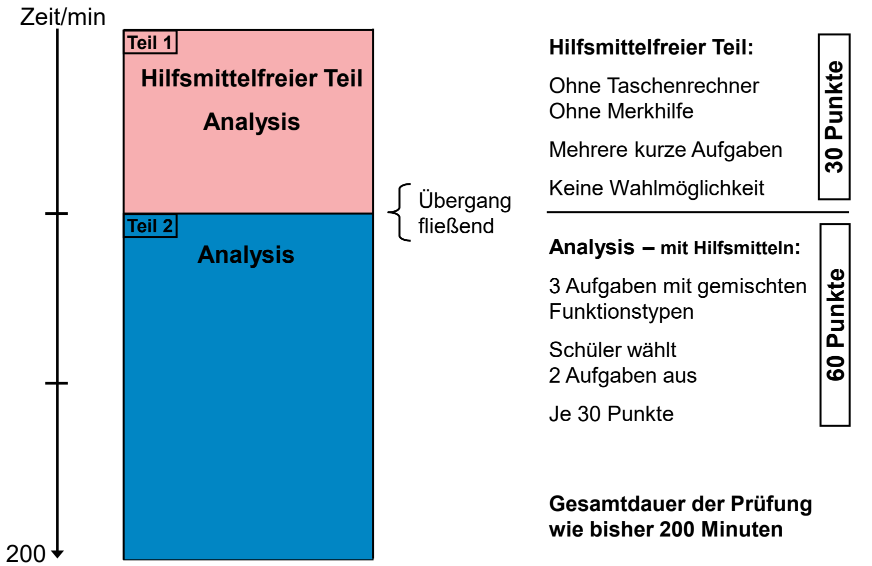
Teil	Thema	Auswahl	Richtzeit	Punkte
2	Analysis	SchülerIn wählt **zwei aus drei** Aufgaben	ca. 140 min	60

Hinweise

- Die Prüfung dauert insgesamt maximal 200 Minuten.

  Die maximal erreichbare Punktzahl beträgt 90 Punkte.

Prüfungsmodus – FHSR ab 2018



Neuer Lehrplan an den Berufskollegs

Vorgaben für die Prüfung zur Fachhochschulreife in Mathematik im Schuljahr 2024/2025

Zur Prüfung werden der **Fachlehrkraft** vorgelegt:

- eine Aufgabe zum hilfsmittelfreien Pflichtteil (je 30 Punkte) mit Aufgaben aus der Analysis
- ein hilfsmittelgestützter Prüfungsteil mit 3 Aufgaben aus der Analysis mit jeweils 30 Punkten (Schülerwahl 2 aus 3 wie bisher auch)

I Teil 1 der Fachhochschulreife-Prüfung ohne Hilfsmittel

1 Übungsaufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 21**

1.1 Lösen Sie die Gleichung: $-2x^3 + 6x = 2x$.

1.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 2 - \frac{1}{4}x^2$ in $x = 2$.

1.3 Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 1$ besitzt einen Wendepunkt. Bestimmen Sie die Koordinaten.

1.4 Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem
$$2x + 5y = 1$$
$$x - y = 3.$$

1.5 Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\,dx$.

1.6 Bestimmen Sie die Art und Lage der Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^2(x - 2)(x + 1)$.

1.7 Das Schaubild von f mit $f(x) = 2\sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$, wird um 3 nach links verschoben und um 1 nach unten verschoben. Wie lautet die Gleichung der entstandenen Kurve?

1.8 Bilden Sie die erste Ableitung von f mit $f(x) = e^{2x-3} - 2x + 1$.

1.9 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^4 + 3$ und $g(x) = 2x^2$. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Schaubilder von f und g.

Aufgabe 2 **Lösungen Seite 22/23**

2.1 Bestimmen Sie zwei Lösungen der Gleichung: $4\sin(2x) = 0$.

2.2 Welche Gerade schneidet das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \cos(\frac{1}{4}x) - 1$; $x \in \mathbb{R}$, in $x = 2\pi$ senkrecht?

2.3 Zeigen Sie: Das Schaubild K_f der Funktion f mit $f(x) = e^{-\frac{1}{3}x} - x + 1$ besitzt keinen Wendepunkt.
Ist K_f eine Linkskurve? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.4 Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem
$$x + 2y = 1$$
$$x - y = -2$$

2.5 Bestimmen Sie $u \neq 0$, so dass $\int_u^0 (x + 2)\,dx = 0$

2.6 Bestimmen Sie die Gleichung der nicht waagrechten Wendetangente an das Schaubild von f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$; $x \in \mathbb{R}$.

2.7 Wie entsteht das Schaubild von f mit $f(x) = 2\cos(3x) - 1$; $x \in \mathbb{R}$, aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = \cos(x)$.

2.8 Bestimmen Sie die Stammfunktion von f mit $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}x)$; $x \in \mathbb{R}$, deren Schaubild die y-Achse in 3 schneidet.

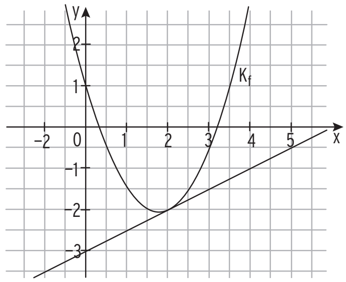
2.9 Zeigen Sie, die Gleichung $e^{2x} + e^x = 2$ hat genau eine Lösung.

2.10 Geben Sie die Nullstellen des Polynoms p mit $p(x) = x^3 - 100x$; $x \in \mathbb{R}$ an.

Erstellen Sie ohne weitere Rechnung eine Skizze des Schaubilds von p.

Aufgabe 3 **Lösungen Seite 23 - 25**

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.
Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm.



Aufgabe 4

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$ besitzt einen Wendepunkt. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

Aufgabe 5

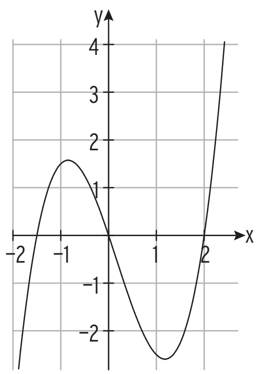
Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt H(1 | 1) ist der Hochpunkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 6

K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{x-3} - 2$.
Die Tangente an K an der Stelle x = 3 schneidet die Asymptote von K in S.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 7

Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx$.
Interpretieren Sie den Integralwert mithilfe geeigneter Flächenstücke.



Aufgabe 8

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

II Teil 2 der Fachhochschulreife-Prüfung mit Hilfsmittel

1 Auszug aus der Merkhilfe

1 Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen	$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$	Menge der ganzen Zahlen	$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle\| a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\right\}$	Menge der rationalen Zahlen	$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}_+ = \{x \| x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen	$\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$

2 Geometrie

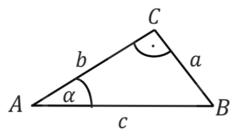
Ebene Figuren A: Flächeninhalt u: Umfang

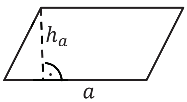
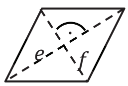
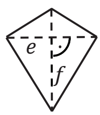
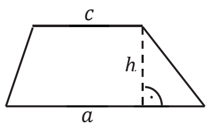
Dreieck $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

Rechtwinkliges Dreieck

Satz des Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$

$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$



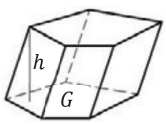
Parallelogramm	Raute	Drachen	Trapez
$A = a \cdot h_a$	$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$	$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$	$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$
			

Kreis $A = \pi \cdot r^2$ $u = 2 \cdot \pi \cdot r$

Körper V: Volumen O: Oberflächeninhalt M: Mantelflächeninhalt G: Grundflächeninhalt

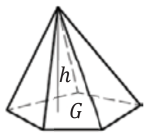
Prisma

$V = G \cdot h$



Pyramide

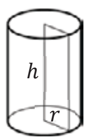
$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$



Gerader Kreiszylinder

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

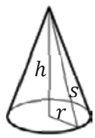
$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$



Gerader Kreiskegel

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$M = \pi \cdot r \cdot s$



Kugel $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

3 Terme

Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\quad$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Potenzen und Wurzeln

mit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$; $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$; $r, s \in \mathbb{R}$

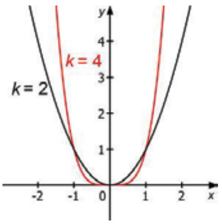
$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $\quad$ $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ $\quad$ $a^r \cdot b^r = (ab)^r$ $\quad$ $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad$ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\quad$ $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ $\quad$ $a^0 = 1$

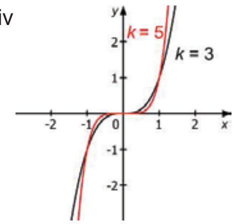
4 Funktionen und zugehörige Gleichungen

Potenzfunktion mit $f(x) = x^k$ mit $k \in \mathbb{Z}^*$

k gerade und positiv



k ungerade und positiv



Potenzgleichung mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ und $a \geq 0$

$x^n = a$	falls n gerade	$x_{1/2} = \pm\sqrt[n]{a}$
	falls n ungerade	$x = \sqrt[n]{a}$
$x^n = -a$	falls n ungerade	$x = -\sqrt[n]{a}$

Polynomfunktion

Polynomfunktion ersten Grades (Lineare Funktion)

$f(x) = mx + b$

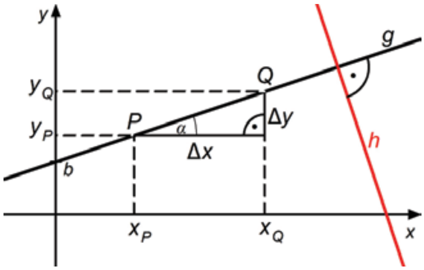
Das Schaubild ist eine Gerade mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt b.

Steigung $\quad m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$

Punkt-Steigungs-Form $\quad y = m(x - x_P) + y_P$

Steigungswinkel $\quad m = \tan(\alpha)$

Orthogonalität $\quad m_g \cdot m_h = -1 \Leftrightarrow g \perp h$



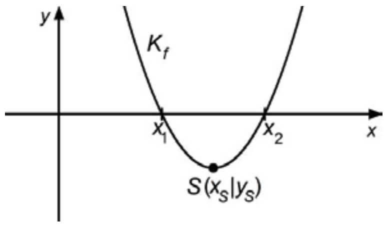
Polynomfunktion zweiten Grades (Quadratische Funktion)

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Das Schaubild ist eine Parabel mit Scheitel S.

Scheitelform $\quad y = a(x - x_S)^2 + y_S$



Quadratische Gleichung

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad$ falls $b^2 - 4ac \geq 0$

$x^2 + px + q = 0 \qquad x_{1/2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad$ falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$

Polynomfunktion dritten Grades

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ mit den Nullstellen x_1, x_2 und x_3

Polynomfunktion n-ten Grades

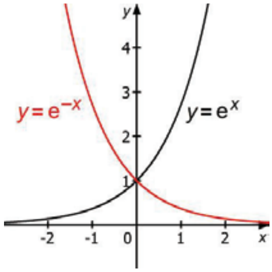
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}; a_n \neq 0$

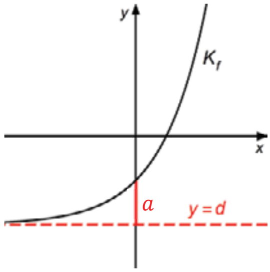
Exponentialfunktion

$f(x) = a \cdot q^x + d$ mit $a \neq 0; q > 0 \wedge q \neq 1$

$f(x) = a \cdot e^{bx} + d$ mit $a \neq 0; b \in \mathbb{R}^*$

Asymptote $y = d$



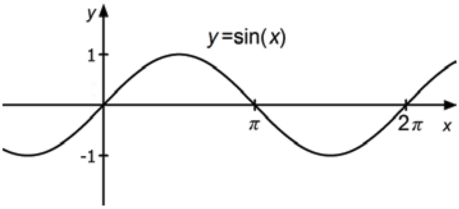


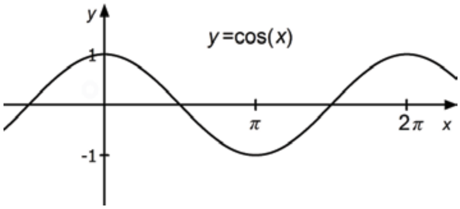
Exponentialgleichung mit $q, y \in \mathbb{R}_+^*$

$y = q^x \Leftrightarrow x = \log_q(y)$ $\qquad$ $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$

$q^x = e^{\ln(q) \cdot x}$ $\qquad$ $e^{\ln(y)} = y$ $\qquad$ $\ln(e^x) = x$

Trigonometrische Funktion

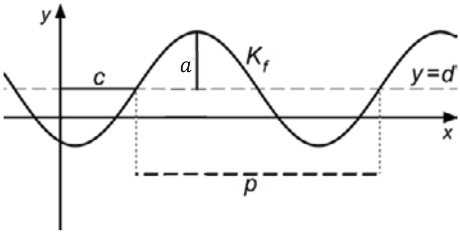




$f(x) = a \cdot \sin\big(b(x - c)\big) + d$ mit $a, b \neq 0$

Amplitude $\qquad |a|$

Periode $\qquad p = \dfrac{2\pi}{|b|}$



Transformationen

Das Schaubild von *g* entsteht aus dem Schaubild von f durch

Spiegelung	an der *x*-Achse	$g(x) = -f(x)$
	an der *y*-Achse	$g(x) = f(-x)$
Streckung	mit Faktor $\frac{1}{b}$ $(b > 0)$ in *x*-Richtung	$g(x) = f(b \cdot x)$
	mit Faktor a $(a > 0)$ in *y*-Richtung	$g(x) = a \cdot f(x)$
Verschiebung	um *c* in *x*-Richtung	$g(x) = f(x - c)$
	um *d* in *y*-Richtung	$g(x) = f(x) + d$

5 Analysis

Änderungsrate

Durchschnittliche / Mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_1; x_2]$ $\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Momentane / Lokale Änderungsrate an der Stelle x_0 $\qquad f'(x_0)$

Ableitungsregeln

Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$\Rightarrow$	$'(x) = u'(x) + v'(x)$
Faktorregel	$f(x) = a \cdot u(x)$	$\Rightarrow$	$f\,'(x) = a \cdot u'(x)$
Kettenregel	$f(x) = u\big(v(x)\big)$	$\Rightarrow$	$f\,'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$

Spezielle Ableitungen / Stammfunktionen mit $C \in \mathbb{R}$

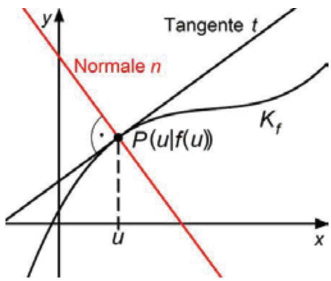
$f(x) = x^k$	$f\,'(x) = k \cdot x^{k-1}$	$F(x) = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} + C$	mit $k \neq -1$
$f(x) = e^{bx}$	$f\,'(x) = b \cdot e^{bx}$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot e^{bx} + C$	mit $b \in \mathbb{R}^*$

$f(x) = \sin(bx)$	$f\,'(x) = b \cdot \cos(bx)$	$F(x) = -\frac{1}{b} \cdot \cos(bx) + C$	mit $b \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos(bx)$	$f\,'(x) = -b \cdot \sin(bx)$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot \sin(bx) + C$	mit $b \in \mathbb{R}^*$

Tangente und Normale

Tangentensteigung $\qquad m_t = f\,'(u)$

Tangentengleichung $\qquad y = f\,'(u)(x - u) + f(u)$



Untersuchung von Funktionen und ihren Schaubildern

Symmetrie	$f(-x) = f(x)$	für alle x	$\Leftrightarrow$ K_f ist symmetrisch zur *y*-Achse
	$f(-x) = -f(x)$	für alle x	$\Leftrightarrow$ K_f ist symmetrisch zum Ursprung
Monotonie	$f\,'(x) \geq 0$	im Intervall J	$\Leftrightarrow$ f wächst monoton im Intervall J
	$f\,'(x) \leq 0$	im Intervall J	$\Leftrightarrow$ f fällt monoton im Intervall J
	$f\,'(x) > 0$	im Intervall J	$\Rightarrow$ f wächst streng monoton in J
	$f\,'(x) < 0$	im Intervall J	$\Rightarrow$ f fällt streng monoton in J
Krümmung	$f''(x) > 0$	im Intervall J	$\Rightarrow$ K_f ist im Intervall J linksgekrümmt
	$f''(x) < 0$	im Intervall J	$\Rightarrow$ K_f ist im Intervall J rechtsgekrümmt
Hochpunkt	$f\,'(x_0) = 0$ und VZW +/- von $f\,'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0) < 0$		$\Rightarrow$ K_f hat den Hochpunkt $H\big(x_0 \vert f(x_0)\big)$
Tiefpunkt	$f\,'(x_0) = 0$ und VZW -/+ von $f\,'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0) > 0$		$\Rightarrow$ K_f hat den Tiefpunkt $T\big(x_0 \vert f(x_0)\big)$
Wendepunkt	$f''(x_0) = 0$ und VZW von $f''(x)$ bei x_0 oder $f'''(x_0) \neq 0$		$\Rightarrow$ K_f hat den Wendepunkt $W\big(x_0 \vert f(x_0)\big)$

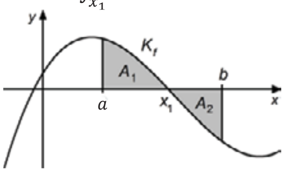
Berechnung bestimmter Integrale

$$\int_a^b f\,(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$ wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Flächenberechnung

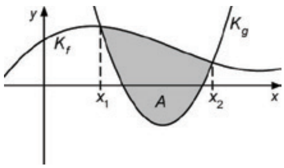
$$A_1 = \int_a^{x_1} f(x)\,dx$$

$$A_2 = -\int_{x_1}^{b} f(x)\,dx$$



$$A = \int_{x_1}^{x_2} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

falls $f(x) \geq g(x)$ für $x \in [x_1; x_2]$



Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht vollständig erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

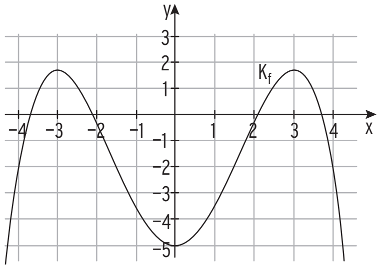
2 Musteraufgaben zum Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösungen Seite 63**

Punkte

1.1 Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist symmetrisch zur y-Achse. Es hat im Punkt $H(-1|\,3)$ eine waagrechte Tangente und schneidet die y-Achse bei $-4{,}5$.
Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, mit dem der Funktionsterm bestimmt werden kann. 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 5;\ x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild ist K_f.



1.2 Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrempunkte von K_f.
Zeigen Sie, eine der beiden Wendetangenten hat die Gleichung

$$y = 2\sqrt{3}\cdot x - 7{,}25.$$

Geben Sie die Gleichung der anderen Wendetangente an.
Zeichnen Sie die Wendetangenten in das Koordinatensystem ein. 8

1.3 K_f schneidet die x-Achse unter anderem in $x \approx 2{,}1$. K_f und die x-Achse begrenzen drei Teilflächen. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der größten Teilfläche. 6

Musteraufgaben zum Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Seite 2/2** **Punkte**

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = e^x - 4$; $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_g.

1.4 Die Schnittpunkte von K_g mit den Koordinatenachsen sind mehr als $d = \sqrt{10}$ voneinander entfernt. Überprüfen Sie die Behauptung.
Silke behauptet, dass eine Ursprungsgerade K_g in $x_1 = 1$ senkrecht schneidet.
Hat Silke Recht? Begründen Sie Ihre Antwort 6

1.5 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = a \cdot e^{-x} + b$ mit $a, b, x \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.
Geben Sie jeweils Werte für a und b an, so dass ...

(1) ... die Funktion h monoton steigt.

(2) ... das Schaubild von h durch genau zwei Quadranten verläuft.

(3) ... die Gerade $y = 2$ waagrechte Asymptote des Schaubildes von h ist.

Gibt es Werte von a und b, für die alle Bedingungen (1) bis (3) gleichzeitig erfüllt sind?
Geben Sie diese Werte gegebenenfalls an. 6

30

3 Lösungen der Musteraufgaben zum Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 54**

1.1 4. Grades, symmetrisch zur y-Achse: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$; $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

$H(-1|\,3)$: $f(-1) = 3$ $\quad a + b + c = 3$

waagrechte Tangente: $f'(-1) = 0$ $\quad -4a - 2b = 0$

$S_y(0|-4{,}5)$: $f(0) = -4{,}5$ $\quad c = -4{,}5$

Hinweis: **Funktionsterm:** $f(x) = -7{,}5x^4 + 15x^2 - 4{,}5$

K_f: $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 5$; $x \in \mathbb{R}$

1.2 **Koordinaten der Extrempunkte**

Ableitungen: $f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$; $f''(x) = -x^2 + 3$; $f'''(x) = -2x$

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad x(-\frac{1}{3}x^2 + 3) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $\quad x_1 = 0$; $x_{2|3} = \pm 3$

Mit $f''(0) = 3 > 0$ und $f(0) = -5$ ergibt sich der Tiefpunkt $T(0|-5)$.

Mit $f''(\pm 3) = -6$ und $f(\pm 3) = 1{,}75$ ergeben sich

die Hochpunkte $H_1(-3\,|\,1{,}75)$ $H_2(3\,|\,1{,}75)$ (Symmetrie)

Wendepunkte und **Wendetangente**

Bedingung: $f''(x) = 0$ $\quad -x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1|2} = \pm\sqrt{3}$

Mit $f'''(\sqrt{3}) \neq 0$ und $f(\sqrt{3}) = -1{,}25$ ergibt sich ein Wendepunkt: $W_1(\sqrt{3}\,|-1{,}25)$.

Mit $f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ erhält man:

$y = 2\sqrt{3} \cdot x - 7{,}25$ muss die Tangente sein

Punktprobe mit $W_1(\sqrt{3}\,|-1{,}25)$: $-1{,}25 = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 7{,}25$ wahre Aussage

Wendetangente in W_2: $y = -2\sqrt{3} \cdot x - 7{,}25$

Zeichnung: K_f und Wendetangenten

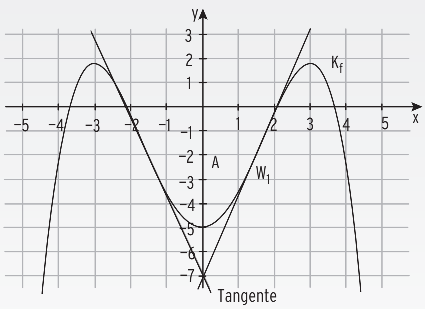
1.3 **Flächeninhalt der größten Teilfläche A**

Schnittstellen von K_f mit der x-Achse:
$x_{1|2} \approx \pm 2{,}1$; ($x_{3|4} \approx \pm 3{,}7$)

$$\int_0^{2,1} f(x)dx = \left[-\frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{2}x^3 - 5x\right]_0^{2,1} = -6{,}55$$

SWegen der Symmetrie und Fläche

unterhalb der x-Achse: $A = 2 \cdot 6{,}55 = 13{,}10$



Lösungen - Musteraufgaben zum Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Seite 2/2**

K_g: $g(x) = e^x - 4$; $g'(x) = e^x$; $x \in \mathbb{R}$

1.4 Schnittpunkt mit der y-Achse: $g(0) = -3$: $S_y(0 \mid -3)$ $(e^0 = 1)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $g(x) = 0$ für $x = \ln(4)$

$N(\ln(4) \mid 0)$

Abstand der beiden Punkte: $d = \sqrt{(-3)^2 + (\ln(4))^2} = \sqrt{9 + (\ln(4))^2}$ (Pythagoras)

$d = \sqrt{9 + (\ln(4))^2} > \sqrt{10}$ da $\ln(4) > \ln(e) = 1$; $e = 2{,}7...$

Bedingung für die Schnittstelle: $m = -\frac{1}{g'(1)} = -\frac{1}{e}$

Normale in $x = 1$ bzw. in $P(1 \mid e - 4)$: $y = -\frac{1}{e}x + b$

Einsetzen ergibt: $e - 4 = -\frac{1}{e} \cdot 1 + b \Rightarrow b = e - 4 + \frac{1}{e} \cdot 1 \neq 0$

Die Normale ist keine Ursprungsgerade.

1.5 $h(x) = a \cdot e^{-x} + b$

(1) ... die Funktion h monoton steigt.

$h'(x) \geq 0$, also $-a \cdot e^{-x} \geq 0$ für $a < 0$, b beliebig

(2) ... das Schaubild von h durch genau zwei Quadranten verläuft.

$a > 0$ und $b \geq 0$; das Schaubild von h verläuft im I. und II. Quadranten

oder $a < 0$ und $b \leq 0$; das Schaubild von h verläuft im III. und IV. Quadranten

oder das Schaubild von h verläuft durch den Ursprung, also $a = -b$

(3) ... die Gerade $y = 2$ waagrechte Asymptote des Schaubildes von h ist.

Die Asymptote hat die Gleichung $y = b$; also $b = 2$; a beliebig

Alle Bedingungen (1) bis (3) gleichzeitig erfüllt, wenn

- $b = 2$:
- die Funktion h monoton steigt: $a < 0$
- das Schaubild von h durch genau zwei Quadranten verläuft:

  Dies gelingt nur, wenn das Schaubild durch den Ursprung verläuft:

  $0 = a \cdot e^{-0} + b \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b$; also mit $b = 2$: $a = -2$

Lösungen - Musteraufgaben zum Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 2 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 56**

K_f: $f(x) = e^{0,5x} - 2x - 1$

2.1 **Extrempunkt**

Ableitungen: $f'(x) = 0,5\,e^{0,5x} - 2$; $f''(x) = 0,25\,e^{0,5x} > 0$

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad 0,5\,e^{0,5x} - 2 = 0$

$e^{0,5x} = 4$

Logarithmieren: $\quad 0,5x = \ln(4)$

$x = 2\ln(4) \approx 2,77$

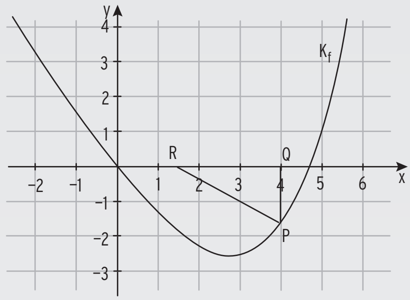
Mit $f''(x) > 0$ und $f(2\ln(4)) \approx -2,55$

erhält man den Tiefpunkt $T(2\ln(4) \mid 3 - 4\ln(4))$ oder $T(2,77 \mid -2,55)$

Gleichung der Asymptote

Für $x \to -\infty$: $y = -2x - 1 \quad (e^{0,5x} \to 0)$

Schaubild mit möglichem Dreieck aus 2.3



2.2 K_f verläuft durch den Ursprung.

Flächenberechnung

$$\int_0^2 f(x)dx = [2e^{0,5x} - x^2 - x]_0^2 = 2e^{0,5\cdot 2} - 4 - 2 - (2e^{0,5\cdot 0}) = 2e^1 - 8 \approx -2,56$$

Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse, also $A = -(2e^1 - 8) = -2e + 8$.

Auch: Die Fläche beträgt etwa 2,56.

2.3 Flächeninhalt in Abhängigkeit von u: $\quad A(u) = \frac{1}{2}(u-1)(-f(u))$; $1 < u \leq 4,5$

$A(u) = -\frac{1}{2}(u-1)\cdot(e^{0,5u} - 2u - 1)$

(Ausmultiplizieren ist nicht nötig.)

Flächeninhalt maximal

Funktionswerte von A: $\quad A(3) = 2,518$; $A(3,1) = 2,613$

Der maximale Flächeninhalt wird nicht in $u = 3$ angenommen.

Hinweis: Mit $A'(3) \neq 0$ kann man hier nicht argumentieren, da $A'(u)$ nicht machbar ist.

Lösungen - Musteraufgaben zum Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 2 **Seite 2/2**

$K_g: g(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{3}x$; $g'(x) = \cos(2x) - \frac{1}{3}$; $g''(x) = -2\sin(2x)$

2.4 Das Schaubild von g'' hat Nullstellen in $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$,...

Hinweis: $\sin(0) = \sin(\pi) = \sin(2\pi) = 0$

Wendepunkte: $W_1\,(0 \mid 0)$; $W_2\,(\frac{\pi}{2} \mid -\frac{\pi}{6})$; $W_3\,(-\frac{\pi}{2} \mid \frac{\pi}{6})$; $W_4\,(\pi \mid -\frac{\pi}{3})$

Hinweis: $\sin(2x_W) = 0$

K_f und K_g schneiden sich im Ursprung senkrecht, wenn

$f(0) = g(0) = 0$ und $f'(0) \cdot g'(0) = -1$

Probe ergibt: $f(0) = e^0 - 2 \cdot 0 - 1 = 0$; $g(0) = \frac{1}{2}\sin(0) - \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$

$f'(0) \cdot g'(0) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$

Die beiden Schaubilder schneiden sich in O senkrecht.

2.5 Ansatz: $h(x) = a\cos(bx) + c$

(Der Hochpunkt liegt auf der y-Achse, mit dem Kosinusansatz ist die Verschiebung in x-Richtung nicht nötig.)

$H(0 \mid \frac{2}{3})$: $h(0) = \frac{2}{3}$ $\qquad a + c = \frac{2}{3}$ (*)

Der Abstand der x-Koordinaten von benachbarten Extrempunkten beträgt eine halbe Periode, also $p = \pi$ und damit $b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Der Abstand der y-Koordinaten von benachbarten Extrempunkten ergibt die doppelte Amplitude, also $2a = \frac{2}{3} - (-\frac{4}{3}) = 2 \Rightarrow a = 1$

Aus (*) folgt $c = -\frac{1}{3}$

Alternativ: Verschiebung in y-Richtung: $c = \frac{y_H + y_T}{2} = -\frac{1}{3}$ (Mittellinie)

Möglicher Funktionsterm von h: $h(x) = \cos(2x) - \frac{1}{3}$

Zusammenhang zwischen g und h: $h(x) = g'(x)$

g hat an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ eine Wendestelle, wenn h in $x = \frac{\pi}{2}$ eine Extremstelle hat. Da K_g in $T(\frac{\pi}{2} \mid -\frac{4}{3})$ einen Tiefpunkt hat, ist diese Bedingung erfüllt.

Musteraufgabensatz 6

Lösung Seite 152 - 159

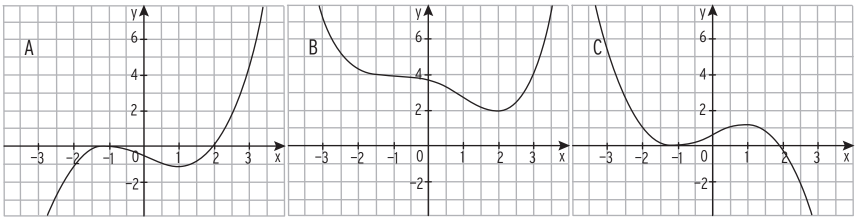
Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel **Punkte**

1.1 Geben Sie Lage und Art der Nullstellen der Funktion f mit
$f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2(x+\frac{4}{3})$; $x \in \mathbb{R}$ an. 3

1.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in $P(2|\, f(2))$ an das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{4}x) + x$; $x \in \mathbb{R}$. 4

1.3 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Schaubildes der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 6x^2 + 13$; $x \in \mathbb{R}$. 4

1.4 Gegeben sind die Abbildungen A, B und C. Sie zeigen die Schaubilder einer Funktion h, der Ableitungsfunktion h′ von h und einer weiteren Funktion k. Begründen Sie, welche Abbildung zum Schaubild von h, h′ und k gehört. 3



1.5 Das Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades hat den Hochpunkt $H(0\,|\,4)$, den Tiefpunkt $T(1\,|\,2)$ und an der Stelle -1 die Steigung 12.
Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, mit dessen Hilfe sich der Term dieser Funktion bestimmen lässt.
(Das Berechnen der Lösungen des LGS ist nicht erforderlich.) 5

1.6 Bestimmen Sie $u > 0$ so, dass $\int_0^u \frac{1}{2}x^4\,dx = 3{,}2$. 4

1.7 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3e^{-2x} - \frac{5}{2}$; $x \in \mathbb{R}$, ihr Schaubild ist K_f.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von K_f.
Skizzieren Sie K_f. 5

1.8 Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$, wird um den Faktor 5 in y-Richtung gestreckt und um 3 nach rechts verschoben.
Geben Sie den zugehörigen Funktionsterm an. 2

30

Musteraufgabensatz 6

Aufgabe 2 - Teil 2 mit Hilfsmittel **Punkte**

2.1 Das Schaubild einer Funktion 3. Grades berührt die x-Achse bei $x = -3$ und verläuft durch den Ursprung.
Weiterhin liegt der Punkt $A(1 \mid \frac{16}{3})$ auf dem Schaubild der Funktion.
Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion. 5

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x$; $x \in \mathbb{R}$, ihr Schaubild ist K_f.

2.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Hoch- und des Tiefpunktes von K_f.
Zeichnen Sie K_f in ein geeignetes Koordinatensystem 8

2.3 Berechnen Sie $\int_{-3}^{1} f(x)dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch. 5

Gegeben sind die Funktionen g und h mit $g(x) = -x^2 - 3$ und $h(x) = e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Die Schaubilder heißen K_g und K_h.

2.4 Skizzieren Sie die Schaubilder K_g und K_h 3

2.5 K_h soll in y-Richtung so verschoben werden, dass K_g den verschobenen Graphen auf der y-Achse schneidet.
Bestimmen Sie den neuen Funktionsterm. 2

2.6 Die Kurve K_g und die Gerade mit der Gleichung $y = -7$ begrenzen eine Fläche. In diese Fläche soll ein zur y-Achse symmetrisches Dreieck mit den Eckpunkten $S(0 \mid -7)$ und $P(u \mid g(u))$ mit $0 \leq u \leq 2$ einbeschrieben werden.
Skizzieren Sie diesen Sachverhalt für $u = 1$.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks für $u = \sqrt{\frac{4}{3}}$ maximal wird 7

30

Musteraufgabensatz 6

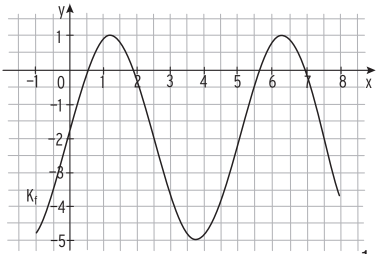
Aufgabe 3 - Teil 2 mit Hilfsmittel

Punkte

3.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(k \cdot x) + b$ für $x \in [-1; 8]$.

Ihr Schaubild K_f ist im folgenden Koordinatensystem dargestellt.

Ermitteln Sie passende Werte für a, k und b anhand der Abbildung. 4



3.2 Zusätzlich ist die Funktion g mit $g(x) = -3\cos(\frac{1}{2}x) + 2$ für $x \in [0; 4\pi]$ gegeben. Ihr Schaubild sei K_g.

Geben Sie die Koordinaten der Extrempunkte und der Wendepunkte von K_g an. 4

Bestimmen Sie für die nachfolgenden Problemstellungen jeweils einen passenden Funktionsterm:

3.3 Der Temperaturverlauf an einem Sommertag soll durch eine trigonometrische Funktion beschrieben werden. Um 14 Uhr erreicht die Temperatur den höchsten Wert von 28 °C. Die tiefste Temperatur des Tages betrug 8 °C um 2 Uhr. 3

3.4 Eine Saunakabine kühlt exponentiell ausgehend von einer Temperatur von 60 °C ab. Nach 10 Minuten hat die Kabine noch eine Temperatur von 40 °C. Die Umgebungstemperatur beträgt 4 °C 5

Nachfolgend ist die Funktion h gegeben durch $h(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} - 2$ für $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild sei K_h.

3.5 Weisen Sie nach, dass K_h keine Extrempunkte und keine Wendepunkte hat, und geben Sie die Gleichung der Asymptote von K_h an. 4

3.6 Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an K_h im Punkt $P(-2 \mid h(-2))$. 3

3.7 K_h und die Koordinatenachsen schließen eine Fläche ein.

Berechnen Sie deren Inhalt. 7

30

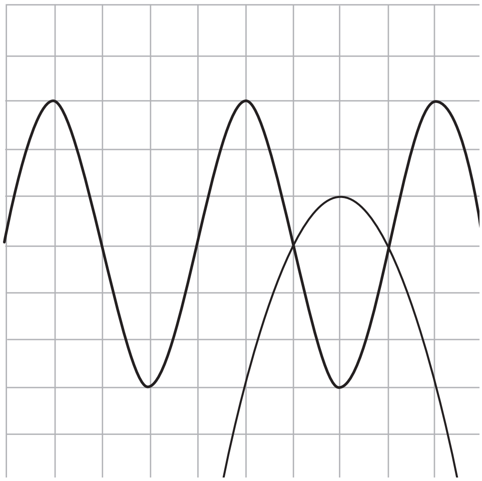
Musteraufgabensatz 6

Aufgabe 4 - Teil 2 mit Hilfsmittel Seite 1/2 Punkte

4.1 Gegeben ist das Schaubild K_f einer Funktion f und das Schaubild K_h einer Funktion h.

Der Term von f lautet $f(x) = 3\cos(\frac{\pi}{2}x)$; $x \in [-k; k]$.

Ergänzen Sie die x- und die y-Achse so, dass die vorgegebene Kurve K_f das Schaubild von f darstellt. 2



4.2 Ermitteln Sie die Periode, die Amplitude, die Nullstellen von f und den Wert von k.

Skalieren Sie dann obiges Koordinatensystem. 4

4.3 Beschreiben Sie, wie K_f aus dem Schaubild der Funktion g mit $g(x) = \cos(x)$ hervorgeht. 3

4.4 In welchen Kurvenpunkten von K_f beträgt die Steigung $-\frac{3}{2}\pi$? 3

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = -x^2 + 4x - 3$; $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_h.

4.5 Die Schaubilder von f und h schneiden sich an den Stellen x = 1 und x = 3 und schließen eine Fläche ein.

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. 5

Musteraufgabensatz 6

Aufgabe 4 - Teil 2 mit Hilfsmittel Seite 2/2 Punkte

Gegeben ist die Funktion j mit $j(x) = -4x^4 + 24x^3 - 44x^2 + 24x$; $x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild ist K_j.

4.6 Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an K_j an der Stelle $x = 2$.
Anton behauptet: „Es gibt keine Tangenten an K_j mit einer größeren Steigung als die Tangente an der Stelle $x = 2$".
Nehmen Sie zu dieser Behauptung Stellung. 5

4.7 Welche der folgenden Aussagen sind falsch, welche richtig und welche sind nur bedingt richtig?
Geben Sie für die falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an. Geben Sie für die bedingt richtigen Aussagen eine Bedingung an, unter welcher sie richtig sind.

a) Leitet man die Funktion f mit $f(x) = 2\cos(b \cdot x)$ mehrmals ab, wird die Amplitude der Schaubilder der Ableitungsfunktionen größer.
b) Die Funktionen f mit $f(x) = e^{k \cdot x}$; $x \in \mathbb{R}$, ist streng monoton wachsend.
c) Eine Polynomfunktion ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.
d) Eine Polynomfunktion 4. Grades, deren Schaubild symmetrisch zur y-Achse ist, hat auf der y-Achse eine Wendestelle. 8

30

Musteraufgabensätze zur Fachhochschulreife-Prüfung

Lösungen Musteraufgabensatz 1

Aufgaben Seite 77 - 81

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel **Seite 1/2**

1.1 $f(x) = -3 \cdot (x-2) \cdot x^2;\quad x \in \mathbb{R}$

Einfache Nullstelle in x = 2, Schaubild schneidet hier die x-Achse

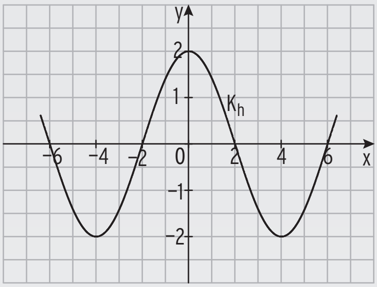
Doppelte Nullstelle in x = 0, Schaubild berührt hier die x-Achse

1.2 Vervollständigen Sie folgende Aussagen:

a) Eine Polynomfunktion 3. Grades hat mindestens 1 Nullstelle(n).

b) Eine Polynomfunktion 4. Grades hat höchstens 3 Extremstelle(n), denn ihre Ableitung ist vom Grad 3.

1.3 K_h: $h(x) = 2 \cdot \cos(\frac{\pi}{4}x)$ mit $x \in [-6; 6]$



Periode von h: $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$

Schnittpunkte von K_h mit der x-Achse:

$N_1(-6 \mid 0)$; $N_2(-2 \mid 0)$; $N_3(2 \mid 0)$;

$N_4(6 \mid 0)$

Extrempunkte:

$H(0 \mid 2)$; $T_1(-4 \mid -2)$; $T_2(4 \mid -2)$

Hinweis: Nur ein Schnittpunkt bzw. Extrempunkt ist verlangt.

1.4 K_f: $f(x) = x^3 - 3x$

Wendepunkt

Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$; $f'''(x) = 6$

Bedingung: $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x = 0$

Lösung: $x = 0$

Da $f'''(0) = 6 \neq 0$ liegt bei $x = 0$ ein Wendepunkt vor.

Aus $f(0) = 0$ folgt $W(0 \mid 0)$

Lösungen Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel Seite 2/2

1.5 Amplitude $a = 2$ ($y_H - y_T = 1 - (-3) = 4$)

Periode $p = 4\pi$; (halbe Periode: $x_H - x_T = 0 - (-2\pi) = 2\pi$)

Aus $p = \frac{2\pi}{b}$ folgt $b = 0{,}5$

Verschiebung von $y = a\cos(bx)$ um 1 nach unten $\Rightarrow c = -1$

($W(\pi \mid -1)$ liegt auf der „Mittellinie".)

1.6 a) $f(-2) < 0$ ist falsch, da $f(-2) = 0$; $(-2 \mid 0)$ ist Kurvenpunkt

b) $f'(-2) < 0$ ist wahr, da die Steigung von K_f bei $x = -2$ negativ ist;

K_f ist bei $x = -2$ fallend.

c) $f''(-2) < 0$ ist falsch, da K_f bei $x = -2$ linksgekrümmt ist, also ist

$f''(-2) > 0$.

1.7 $f(x) = -5x^3 + 1 - e^{2x}$

Ableitung mit der Kettenregel: $f'(x) = -15x^2 - 2e^{2x}$

1.8 $g(x) = 4 - 3e^{-2x}$

Fläche zwischen der Geraden mit der Gleichung $y = 4$, K_g und den Grenzen

$x = 0$ und $x = 1$:

$$A = \int_0^1 (4 - g(x))\,dx = \int_0^1 3e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{3}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{3}{2}e^{-2} + \frac{3}{2}$$

Alternative:

$$A_{Rechteck} = 4 \cdot 1 = 4$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 (4 - 3e^{-2x})\,dx = \left[4x + \frac{3}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = 4 + \frac{3}{2}e^{-2} - \frac{3}{2}$$

$$A = A_{Rechteck} - \left(4 + \frac{3}{2}e^{-2} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}e^{-2} + \frac{3}{2}$$

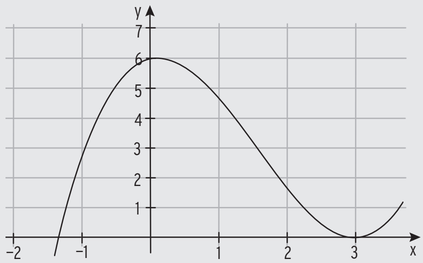
Lösungen Musteraufgabensatz 6

Aufgaben Seite 106 - 110

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel **Seite 1/2**

1.1 $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2(x+\frac{4}{3})$; $x \in \mathbb{R}$

Skizze: (nicht verlangt)



Lage und Art der Nullstellen von f:

$x_1 = 3$ ist eine doppelte Nullstelle, das Schaubild von f berührt die x-Achse

$x_2 = -\frac{4}{3}$ ist eine einfache Nullstelle, das Schaubild von f schneidet die x-Achse.

1.2 $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{4}x) + x$; $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{\pi}{8}\cos(\frac{\pi}{4}x) + 1$

Gleichung der Tangente in $P(2|\, f(2))$

$f(2)= \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}) + 2 = \frac{5}{2}$; $f'(2) = \frac{\pi}{8}\cos(\frac{\pi}{2}) + 1 = 1$ $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$; $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

Einsetzen in $y = mx + b$: $\frac{5}{2} = 1 \cdot 2 + b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

Die Tangente hat die Gleichung $y= x + \frac{1}{2}$.

1.3 $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 6x^2 + 13$; $x \in \mathbb{R}$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - 12x$; $f''(x) = 4x^2 - 12$; $f'''(x) = 8x$

Wendepunkte des Schaubildes von f

$f''(x) = 0$ $4x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{1|2} = \pm\sqrt{3}$

Mit $f'''(\pm\sqrt{3}) \neq 0$ und $f(\pm\sqrt{3}) = \frac{1}{3} \cdot 3^2 - 6(\pm\sqrt{3})^2 + 13 = 3 - 18 + 13 = -2$

Wendepunkte $W_{1|2}(\pm\sqrt{3} \mid -2)$

Hinweis: Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.

1.4 Das Schaubild in B hat bei $x = -1$ einen Sattelpunkt und bei $x = 2$ einen Tiefpunkt. Somit hat das Schaubild der Ableitung hiervon bei $x = -1$ eine doppelte Nullstelle und bei $x = 2$ eine einfache Nullstelle.

Dies trifft auf A und C zu.

Da das Schaubild in B für $x < 0$ fällt, kann nur A die Ableitung darstellen.

Damit: B zeigt das Schaubild von h, A das von h′ und C das von k.

Lösungen Musteraufgabensatz 6

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel Seite 2/2

1.5 Polynomfunktion 4. Grades: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

1. Ableitung: $f'(x) = 4a\,x^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Hochpunkt H(0 | 4):	$f(0) = 4$	$e = 4$
	$f'(0) = 0$	$d = 0$
Tiefpunkt T(1 | 2):	$f(1) = 2$	$a + b + c + d + e = 2$
	$f'(1) = 0$	$4a + 3b + 2c + d = 0$

an der Stelle − 1 die Steigung 12: $f'(-1) = 12$ $\quad -4a + 3b - 2c + d = 12$

1.6 $\int_0^u \frac{1}{2}x^4 dx = 3{,}2$ $\quad \int_0^u \frac{1}{2}x^4 dx = \left[\frac{1}{10}x^5\right]_0^u = \frac{1}{10}u^5$

Bedingung für u: $\quad \frac{1}{10}u^5 = 3{,}2 \Leftrightarrow u^5 = 32 \Leftrightarrow u = \sqrt[5]{32} = 2$

$\int_0^u \frac{1}{2}x^4 dx = 3{,}2$ für $u = 2$

Hinweis: $2^5 = 32$

1.7 $f(x) = 3\,e^{-2x} - \frac{5}{2}$; $x \in \mathbb{R}$ mit Schaubild K_f

Achsenschnittpunkte von K_f:

S_y: $f(0) = 3 \cdot e^0 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$; also $S_y(0 \mid \frac{1}{2})$

S_x: $f(x) = 0$ $\quad 3\,e^{-2x} - \frac{5}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow 3e^{-2x} = \frac{5}{2}$

$e^{-2x} = \frac{5}{6} \quad \Leftrightarrow$

$-2x = \ln(\frac{5}{6}) \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\ln(\frac{5}{6})$

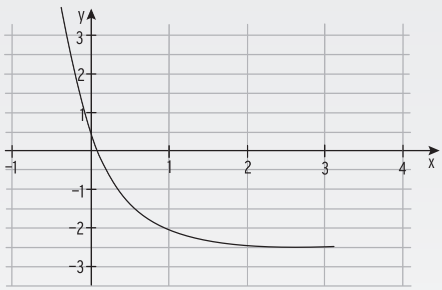
$S_x(-\frac{1}{2}\ln(\frac{5}{6}) \mid 0)$

oder auch $-2x = -0{,}18$

$x = 0{,}09$

$S_x(0{,}09 \mid 0)$

Skizze von K_f:



1.8 $f(x) = \sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$, wird

um den Faktor 5 in y-Richtung gestreckt $\quad f_1(x) = 5\sin(x)$

und

um 3 nach rechts verschoben: $\quad f_2(x) = f_1(x - 3) = 5\sin(x - 3)$

Funktionsterm: $g(x) = 5 \cdot \sin(x - 3)$

Lösungen Musteraufgabensatz 6

Aufgabe 2 - Teil 2 mit Hilfsmittel Seite 1/2

2.1 Funktion 3. Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

berührt die x-Achse bei $x = -3$:	$f(-3) = 0$	$-27a + 9b - 3c + d = 0$	(I)
	$f'(-3) = 0$	$27a - 6b + c = 0$	(II)
durch den Ursprung: $f(0) = 0$	$f(0) = 0$	$d = 0$	(III)
durch $A(1 \mid \frac{16}{3})$:	$f(1) = \frac{16}{3}$	$a + b + c + d = \frac{16}{3}$	(IV)

LGS in Matrixschreibweise: (d = 0 eingesetzt)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -27 & 9 & -3 & 0 \\ 27 & -6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 16/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -27 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 33 & 26 & 144 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -27 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 144 \end{array}\right)$$

Lösung des LGS: $c = 3$; $b = 2$; $a = \frac{1}{3}$ $(d = 0)$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x$

Mit dem **Produktansatz** ist die Aufgabe einfacher zu lösen: $f(x) = ax(x + 3)^2$

da $x = 0$ eine einfache und $x = 3$ eine doppelte Nullstellen von f sind.

Punktprobe mit $A(1 \mid \frac{16}{3})$: $\frac{16}{3} = a \cdot 1 \cdot (1 + 3)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

Funktionsterm der Funktion: $f(x) = \frac{1}{3}x(x + 3)^2$

2.2 Koordinaten des Hoch- und des Tiefpunktes

$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x$; $f'(x) = -x^2 - 4x - 3$; $f''(x) = -2x - 4$

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\qquad -x^2 - 4x - 3 = 0$

Lösung mit Formel: $\qquad x_1 = -3$; $x_2 = -1$

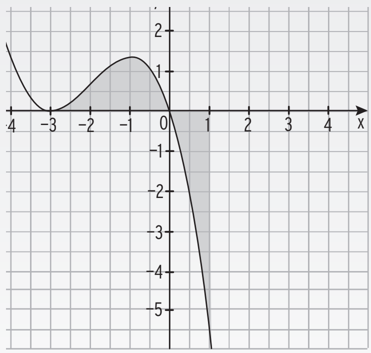
Mit $f''(-3) = 2 > 0$ und $f(-3) = 0$: TP $T(-3 \mid 0)$

Mit $f''(-1) = -2 < 0$ und $f(-1) = \frac{4}{3}$: HP $H(-1 \mid \frac{4}{3})$ Zeichnung von K_f :

2.3 $\int_{-3}^{1} f(x)dx = \left[-\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{1}$

$= -\frac{1}{12} - \frac{2}{3} - \frac{3}{2} - (-\frac{27}{4} + 18 - \frac{27}{2}) = 0$

Interpretation: Die Flächenstücke oberhalb und unterhalb der x-Achse sind gleich groß und heben sich im Integral somit auf.



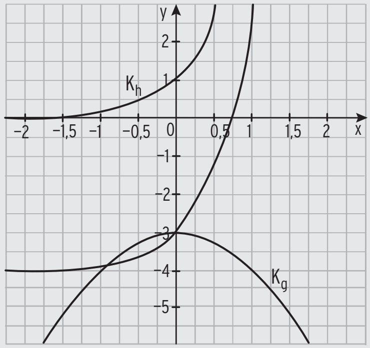
Lösungen Musteraufgabensatz 6

Aufgabe 2 - Teil 2 mit Hilfsmittel Seite 2/2

$g(x) = -x^2 - 3$ mit Schaubild K_g

$h(x) = e^{2x}$ mit Schaubild K_h.

2.4 Skizze von K_g und K_h

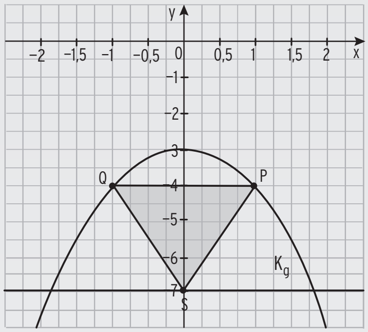


2.5 $h(0) = 1$; $g(0) = -3$

K_h muss um -4 in y-Richtung verschoben werden.

Neuer Funktionsterm: $h^*(x) = e^{2x} - 4$

2.6 Skizze für $u = 1$.



Flächeninhalt eines Dreiecks: $A = \frac{1}{2}a \cdot h_a$

Nebenbedingungen:

Grundseite: $a = 2u$

Höhe: $h_a = g(u) - (-7) = g(u) + 7$

Zielfunktion $A(u) = \frac{1}{2}a \cdot h_a$

$= \frac{1}{2} \cdot 2u \cdot (g(u) + 7)$

$A(u) = u \cdot (g(u) + 7) = u \cdot (-u^2 + 4) = -u^3 + 4u;\ 0 \leq u \leq 2$

$A'(u) = -3u^2 + 4;\ A''(u) = -6u$

$A'\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 0;\ A''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -6\sqrt{\frac{4}{3}} < 0$

Randwerte: $A(0) = 0$; $A(2) = 0$

Der Flächeninhalt dieses Dreiecks ist für $u = \sqrt{\frac{4}{3}}$ maximal.

Lösungen Musteraufgabensatz 6

Aufgabe 3 - Teil 2 mit Hilfsmittel Seite 1/2

3.1 Schaubild K_f : $f(x) = a \cdot \sin(k \cdot x) + b$ für $x \in [-1; 8]$.

Periodenlänge p = 5 mit $p = \frac{2\pi}{k}$

ergibt $k = \frac{2\pi}{5}$

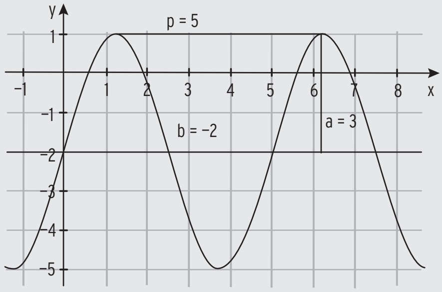
$y_{HP} = 1$; $y_{TP} = -5$ mit

ergibt die Ampltude a

$a = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{1-(-5)}{2} = 3$

und die Mittellinie b

$b = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{1+(-5)}{2} = -2$



3.2 K_g: $g(x) = -3\cos(\frac{1}{2}x) + 2$ für $\in [0; 4\pi]$

Amplitude: 3 Verschiebung in Richtung der y-Achse: um 2 nach oben

Periode: $p = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$

Das Schaubild eines negativen Kosinus weist auf der y-Achse einem TP auf:

$T_1(0 \mid -1)$ und damit auch $T_2(4\pi \mid -1)$. Nach der halben Periode muss ein Hochpunkt liegen: $H(2\pi \mid 5)$. Die Wendepunkte finden sich auf Höhe der Verschiebung in Richtung der y-Achse und liegen beim Kosinus nach einem Viertel und nach drei Viertel der Periodenlänge: $W_1(\pi \mid 2)$; $W_2(3\pi \mid 2)$

Passender Funktionsterm:

3.3 Trigonometrische Funktion ; z. B. x = 0 bei 14 Uhr ; Amplitude: $\frac{28-8}{2} = 10$

Verschiebung y-Achse: $\frac{28+8}{2} = 18$;

Periodenlänge 24 h also: $b = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$

Damit: z. B.: $f(x) = 10 \cdot \cos(\frac{\pi}{12}x) + 18$

oder: x = 0 bei 8 Uhr; Rest bleibt und ergibt $g(x) = 10 \cdot \sin(\frac{\pi}{12}x) + 18$

3.4 Exponentialfunktion mit Ansatz: $f(t) = a \cdot e^{k \cdot t} + b$

Umgebungstemperatur: 4 °C ; Asymptote: y = 4 = b

$f(0) = a \cdot e^{k \cdot 0} + b = 60$ mit b = 4 folgt daraus: a = 56

bzw. Vorfaktor a = Maximaltemperatur−Umgebungstemperatur= 60−4 = 56

Vorfaktor k im Exponent: $56 \cdot e^{k \cdot 10} + 4 = 40 \Rightarrow k = \frac{1}{10}\ln(\frac{9}{14}) \approx -0{,}044$

Funktionsterm: $f(t) = 56 \cdot e^{-0{,}044 \cdot t} + 4$

Lösungen Musteraufgabensatz 6

Aufgabe 3 - Teil 2 mit Hilfsmittel Seite 2/2

K_h: $h(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} - 2$ für $x \in \mathbb{R}$.

3.5 K_h hat keine Extrempunkte, da $h'(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

K_h hat keine Wendepunkte, da $h''(x) = \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Gleichung der Asymptote von K_h für $x \to \infty$: $y = -2$

da für $x \to \infty$ gilt: $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \to 0$

3.6 Tangente an K_h im Punkt $P(-2\,|h(-2))$

Ansatz: $y = mx + b$

Mit $h(-2) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(-2)} - 2 = \frac{1}{2}e - 2$ und $h'(-2) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(-2)} = -\frac{1}{4}e = m$

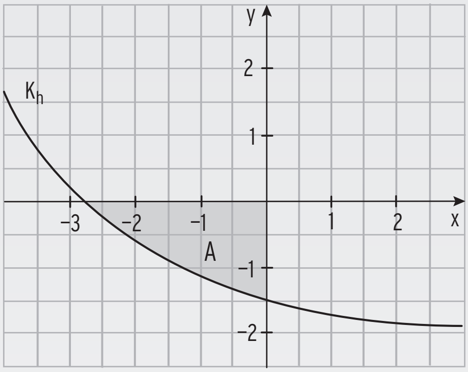
ergibt sich: $\frac{1}{2}e - 2 = -\frac{1}{4}e \cdot (-2) + b$

$b = -2$

Tangentengleichung: $y = -\frac{1}{4}e \cdot x - 2$

3.7 K_h und die Koordinatenachsen schließen eine Fläche ein.

Skizze (nicht verlangt)



Inhaltsberechnung:

Nullstelle von h: $h(x) = 0$

$0 = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} - 2 \Leftrightarrow x = -2\ln(4)$

Rechnung mit gerundeter Nullstelle

$x \approx -2{,}77$ auch zulässig.

$$\int_{-2\ln(4)}^{0} h(x)dx = \left[-e^{-\frac{1}{2}x} - 2x\right]_{-2\ln(4)}^{0}$$

$$= -e^{-\frac{1}{2}(0)} - (-e^{-\frac{1}{2}(-2\ln(4))} - 2 \cdot (-2\ln(4)))$$

$$= -1 + 4 - 4\ln(4) = 3 - 4\ln(4) < 0$$

Da A unterhalb der x-Achse liegt gilt: $A = 4\ln(4) - 3 \approx 2{,}55$

Hinweis: Das bestimmte Integral kann auch mit der Dezimalzahl als Untergrenze ermittelt werden).

$$\int_{-2{,}77}^{0} h(x)dx = \left[-e^{-\frac{1}{2}x} - 2x\right]_{-2{,}77}^{0} \approx 2{,}55$$

Lösungen Musteraufgabensatz 6

Aufgabe 4 - Teil 2 mit Hilfsmittel

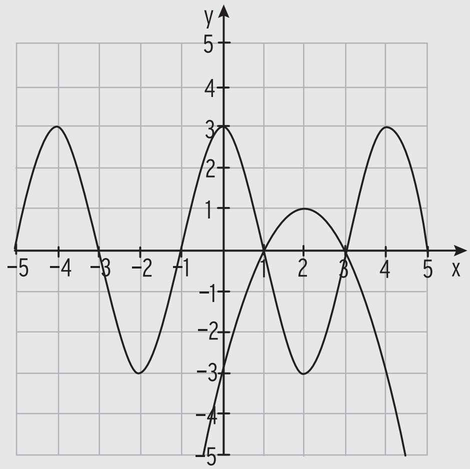
4.1 K_f: $f(x) = 3\cos(\frac{\pi}{2}x)$; $x \in [-k; k]$.

Achsen:

(incl. Skalierung für 4.2)

K_f verläuft auf diesem Definitionsbereich symmetrisch zur y-Achse.

Wählt man die gezeigte Einteilung, so liegt die Kurve im Bereich von $-5 \leq x \leq 5$.



4.2 Periode: $p = 4 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}$; Amplitude: $a = 3$

Nullstellen: $f(x) = 0$ liefert $x_1 = -5$; $x_2 = -3$; $x_3 = -1$; $x_4 = 1$; $x_5 = 3$; $x_6 = 5$

Damit ist $k = 5$.

Hinweis: $\cos(\frac{\pi}{2}x) = 0$ für $\frac{\pi}{2}x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

4.3 Das Schaubild von g wird mit dem Faktor 3 in y-Richtung gestreckt ($y = 3\cos(x)$) und dann mit dem Faktor $\frac{2}{\pi}$ in x-Richtung gestreckt.

4.4 $f'(x) = -\frac{3}{2}\pi \sin(\frac{\pi}{2}x)$

Bedingung: $f'(x) = -\frac{3}{2}\pi$ für $\sin(\frac{\pi}{2}x) = 1$

$\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2}; \frac{5}{2}\pi; -\frac{3}{2}\pi$ (Abstand jeweils 2π)

man erhält $x_1 = 1$; $x_2 = 5$; $x_3 = -3$

In $x = \frac{\pi}{2}; \frac{5}{2}\pi; -\frac{3}{2}\pi$ gilt stets $\cos(x) = 0$

oder $x_1 = 1$; $x_2 = 5$; $x_3 = -3$ gilt stets $\cos(\frac{\pi}{2}x) = 0$

Damit sind $P_1(-3 \mid 0)$, $P_2(1 \mid 0)$ und $P_3(5 \mid 0)$die gesuchten Kurvenpunkte.

Lösungen Musteraufgabensatz 6

Aufgabe 4 - Teil 2 mit Hilfsmittel

4.5 Man berechnet $\int_1^3 (h(x) - f(x))dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3 - 3\cos(\frac{\pi}{2}x))dx$

Mit Hilfe der Stammfunktion erhält man

$\left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x - \frac{6}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}x)\right]_1^3 = \frac{6}{\pi} - (-\frac{4}{3} - \frac{6}{\pi}) = \frac{12}{\pi} + \frac{4}{3} \approx 5{,}15$

Flächeninhalt A = 5,15

Hinweis: K_h ist das Schaubild der Funktion h in der gegebenen Zeichnung

4.6 $j'(x) = -16x^3 + 72x^2 - 88x + 24$; $j''(x) = -48x^2 + 144x - 88$

$j(2) = 0$ und $j'(2) = 8$

Punktprobe mit $(2 \mid 0)$ in $y = 8x + b$: $0 = 8 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -16$

Die Tangentengleichung lautet $y = 8x - 16$.

Größte Steigung mit der Bedingung: $(j'(x))' = j''(x) = 0$

$j''(x) = -48x^2 + 144x - 88 = 0$ hat zwei Lösungen: $D > 0$

Anton hat nicht recht: Da $j''(2) \neq 0$, ist x = 2 nicht die Stelle mit der

größten Steigung zwischen den beiden Extrempunkten.

Alternativ könnte man eine beliebige andere Stelle testen, z. B. $j'(0) = 24$.

4.7 a) Bedingt richtig für $b > 1$ oder $b < -1$

$f'(x) = -2b\sin(bx)$; $f''(x) = -2b^2\cos(bx)$; Amplitude von f': $2b > 2$ für $b > 1$

b) Bedingt richtig für $k > 0$

$f'(x) = k \cdot e^{kx} > 0$ für $k > 0$

($e^x \to 0$ für $x \to -\infty$, K_f ist also monoton steigend)

c) wahr

Verlauf vom III. in I. oder vom II. in IV. Quadrant

d) Falsch

$f(x) = x^4$; K_f hat einen Extrempunkt auf der y-Achse

IV Prüfungen zur Fachhochschulreife mit Lösungen

Prüfung zur Fachhochschulreife 2018

Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Punkte**

1.1 Gegeben ist folgende Wertetabelle einer Polynomfunktion f, ihrer ersten Ableitungsfunktion f′ und ihrer zweiten Ableitungsfunktion f″.

Das Schaubild von f ist K_f.

x	− 2	− 1	0	1	2	3	4
f(x)	30	22	2	− 24	− 50	− 70	− 78
f′(x)	0	− 15	− 24	− 27	− 24	− 15	0
f″(x)	− 18	− 12	− 6	0	6	12	18

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse, eines Hoch- und eines Tiefpunktes von K_f an.

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an K_f im Punkt $P(-1 \mid f(-1))$. 6

1.2 Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = -\frac{1}{24}x^2 \cdot (x - 5) \cdot (x + 3);\ x \in \mathbb{R}$.

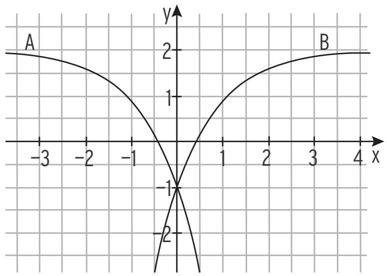
Geben Sie Art und Lage der Nullstellen an und skizzieren Sie davon ausgehend das Schaubild von g. 5

1.3 Lösen Sie die Gleichung $e^{2x} - 3e^x = 0$. 4

1.4 Gegeben ist die Funktion h mit

$h(x) = a \cdot e^{-x} + b;\ x \in \mathbb{R};\ \ a, b \neq 0$.

Begründen Sie, welches der Schaubilder A bzw. B zur Funktion h gehört.



Bestimmen Sie a und b. 5

1.5 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)dx$. 4

1.6 Geben Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$ an. 3

1.7 Die Funktion g erfüllt folgende Bedingungen:

$g'(3) = 2$ $g''(3) = 0$ $g'''(3) \neq 0$

Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen? 3

30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2018

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2** **Punkte**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f.

2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte von K_f mit der x-Achse und die Extrempunkte von K_f.
Zeichnen Sie K_f für $-1 \leq x \leq 3{,}5$. 9

2.2 Berechnen Sie $\int_0^3 -f(x)dx$.
Markieren Sie die Fläche, deren Inhalt mit diesem Ausdruck berechnet wird, in Ihrem Schaubild aus Aufgabe 2.1. 5

2.3 Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen falsch oder wahr sind:
a) Jede Polynomfunktion vierten Grades besitzt eine Nullstelle.
b) Jede Nullstelle einer Funktion ist Extremstelle ihrer Stammfunktion.
c) Das Schaubild jeder Polynomfunktion dritten Grades besitzt sowohl einen Hoch- als auch einen Tiefpunkt. 6

Die Einwohnerzahl eines Landes wächst entsprechend der Funktion g mit
$g(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{R}$; $a, b \neq 0$.
Dabei ist t die Zeit in Jahren, t = 0 ist das Jahr 2016 und g(t) gibt die Einwohnerzahl des Landes in Millionen zum Zeitpunkt t an.
Im Jahr 2016 lebten 120 Millionen Menschen in dem Land, im Jahr 2018 sind es 126 Millionen Menschen.

2.4 Bestimmen Sie die Werte für a und b. 3

Im Folgenden sei a = 120 und b = 0,025.

2.5 Bestimmen Sie die Bevölkerungszahl im Jahr 2033.
In welchem Jahr war unter diesen Vorgaben die Bevölkerungszahl halb so groß wie im Jahr 2016? 4

2.6 Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die Einwohnerzahl jährlich zunimmt. 3

30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2018

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 3** **Punkte**

Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$f(x) = -2 \cdot e^{-0{,}5x} + 3$, $g(x) = -2 \cdot \sin(0{,}5 \cdot x) + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f ist K_f, das Schaubild von g ist K_g.

3.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von K_f.
Zeigen Sie, dass K_f keine Extrempunkte und keine Wendepunkte besitzt.
Zeichnen Sie K_f für $-2 \leq x \leq 6$. 9

3.2 Begründen Sie, dass K_f und K_g unendlich viele Schnittpunkte haben.
Das Schaubild K_f wird so verschoben, dass es keine gemeinsamen Punkte mit K_g hat.
Geben Sie einen passenden Funktionsterm an.
Kann K_f so verschoben werden, dass es K_g in einem Tiefpunkt berührt?
Begründen Sie. 6

3.3 Zeigen Sie, dass der Punkt $W(2\pi\,|3)$ Wendepunkt von K_g ist.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in W. 7

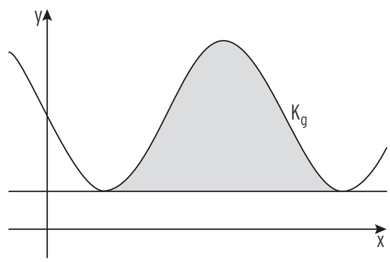
3.4 Johanna soll den Inhalt der in der Zeichnung schraffierten Fläche berechnen. Nur einer der Ansätze a) bis c) liefert das richtige Ergebnis.

Nennen Sie je ein Argument, warum die anderen beiden Ansätze falsch sind.

a) $A = \int_{\pi}^{5\pi} (-2 \cdot \sin(0{,}5x) + 3)dx$

b) $A = \int_{\pi}^{5\pi} (-2 \cdot \sin(0{,}5x) + 2)dx$

c) $A = \int_{\pi}^{3\pi} (-2 \cdot \sin(0{,}5x) + 3 - 1)dx$



Berechnen Sie den gesuchten Flächeninhalt. 8

30

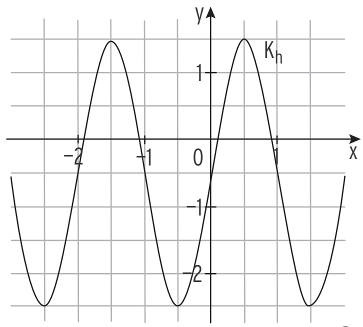
Prüfung zur Fachhochschulreife 2018

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 4** **Punkte**

4.1 Gegeben ist das Schaubild K_h einer trigonometrischen Funktion h.

Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.



a) $h(-2{,}25) < 0$

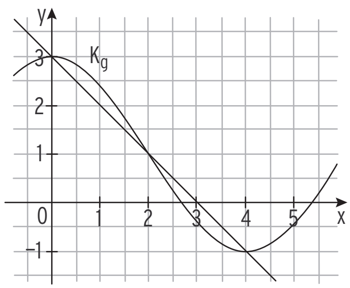
b) $h'(-2{,}25) < 0$

c) $h''(-2{,}25) < 0$

d) $\int_{-2{,}25}^{0} h(x)dx < 0$ 8

4.2 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer trigonometrischen Funktion g mit dem Hochpunkt H(0 | 3) und dem Tiefpunkt T(4 | − 1).

Geben Sie einen möglichen Funktionsterm von g an.



Die Gerade mit der Gleichung y = − x + 3 verläuft durch die Punkte H und T.

Begründen Sie, dass Folgendes gilt: $\int_{0}^{4} (g(x) - (-x + 3))dx = 0.$ 6

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_f.

4.3 Untersuchen Sie K_f auf Symmetrie.

Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte von K_f und der x-Achse. Zeichnen Sie K_f für $-2{,}5 \leq x \leq 2{,}5$.

Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_f. 3

4.4 Ermitteln Sie die Gleichung der Stammfunktion von f, deren Schaubild durch den Punkt P(1 | 1) geht. 3

30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2018 – Lösung

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1**

1.1 Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0 \mid 2)$

Hochpunkt: $H(-2 \mid 30)$ Bedingungen: $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) = -18 < 0$

Tiefpunkt: $T(4 \mid -78)$ Bedingungen: $f'(4) = 0$ und $f''(4) = 18 > 0$

Ansatz für die Tangente: $y = mx + b$

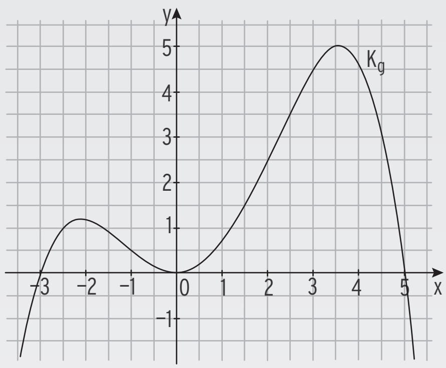
$f'(-1) = -15 = m$; Punktprobe mit $(-1 \mid 22)$: $22 = -15 \cdot (-1) + b \;\Rightarrow\; b = 7$

Gleichung der Tangente: $y = -15x + 7$

1.2 Der Funktionsterm von g ist mit $g(x) = -\frac{1}{24}x^2 \cdot (x-5) \cdot (x+3)$ im Nullstellenansatz gegeben. Die Art und Lage der Nullstellen kann hieraus abgelesen werden: Doppelte Nullstelle in $x = 0$; Einfache Nullstellen in $x = 5$ und $x = -3$.

Skizze:

Hinweis: Aus dem negativen Wert des Leitkoeffizienten $-\frac{1}{24}$ ergibt sich ein Verlauf des Schaubildes vom III. in den IV. Quadranten.



1.3 Gleichung: $e^{2x} - 3e^x = 0$

Ausklammern: $e^x \cdot (e^x - 3) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $e^x \neq 0$ $e^x - 3 = 0$

$e^x = 3$

Logarithmieren führt zur Lösung: $x = \ln(3)$

Prüfung zur Fachhochschulreife 2018 – Lösung

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1**

1.4 Da die Funktion h vom Typ „e^{-x}" ist, nähert sich das Schaubild für $x \to \infty$ seiner Asymptote an. Somit gehört Schaubild B zu h.

Die Gleichung der Asymptote lautet y = 2, somit gilt b = 2.

Das Schaubild verläuft durch $S_y(0 \mid -1)$. Einsetzen der Koordinaten in $h(x) = a \cdot e^{-x} + 2$ führt auf den Wert von a: $-1 = a \cdot e^0 + 2$

$e^0 = 1$ $\quad -1 = a \cdot 1 + 2$

$-3 = a$

1.5 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \tfrac{\pi}{4}) - \frac{1}{2} \cdot \sin(0)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin(\tfrac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} \cdot \sin(0)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{2}$$

1.6 Nullstellen von f: $f(x) = 0$ $\quad 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x = 0$

Ausklammern: $3x(x^2 - 9) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $3x = 0$ oder $x^2 - 9 = 0$

Nullstellen: $x = 0$ oder $x = \pm 3$

1.7 $g'(3) = 2$ Die Steigung der Tangente an das Schaubild von g an der Stelle x = 3 ist 2.

$g''(3) = 0;\ g'''(3) \neq 0$ Das Schaubild der Funktion g hat einen Wendepunkt an der Stelle x = 3.

Prüfung zur Fachhochschulreife 2024 – Lösungen

Teil 2 mit Hilfsmittel

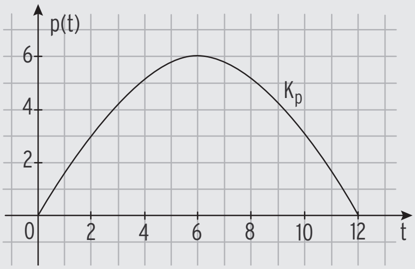
www.mvurl.de/aw9r

Aufgabe 3

3.1 $p(t) = 6 \cdot \sin(\frac{\pi}{12}t)$

Skizze: Periode $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$

Amplitude $a = 6$.



Maximum: $t = 6$ (Stunden)

somit um 13 Uhr.

Die höchste Leistung beträgt 6 (kW).

3.2 Bedingung: $p(t) = 3{,}5 \;\Leftrightarrow\; 6 \cdot \sin(\frac{\pi}{12}t) = 3{,}5 \;\Leftrightarrow\; \sin(\frac{\pi}{12}t) = \frac{7}{12}$

mit $\sin^{-1}$ erhält man: $\frac{\pi}{12}t = \sin^{-1}\left(\frac{7}{12}\right)$

Lösung: $t_1 = \frac{12}{\pi} \cdot \sin^{-1}\left(\frac{7}{12}\right) \approx 2{,}38$

Aus Symmetrie folgt: $t_2 = 12 - t_1 \approx 9{,}62$

Hierbei entspricht $t_1 \approx 2{,}38$ der Uhrzeit 9:23 Uhr (Hinweis: $0{,}38 \cdot 60 \approx 23$)

bzw. $t_2 \approx 9{,}62$ der Uhrzeit 16:37 Uhr. (Hinweis: $0{,}62 \cdot 60 \approx 37$)

Der Wäschetrockner kann von 9:23 Uhr bis 16:37 Uhr betrieben werden.

Bei 3 Stunden Laufzeit ergibt sich 13:37 Uhr als spätester Zeitpunkt.

3.3 $\int_2^{10} \left(6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)\right) dt = \left[-\frac{72}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)\right]_2^{10}$

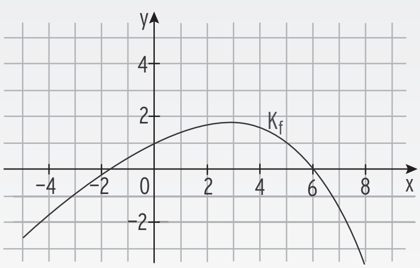
$= -\frac{72}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot 10\right) - \left(-\frac{72}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot 2\right)\right) \approx 39{,}7$

Hinweis: $t = 2$ entspricht 9 Uhr und $t = 10$ entspricht der Uhrzeit 17 Uhr.

Interpretation: Es wird zwischen 9 Uhr und 17 Uhr eine Energie von 39,7 kWh erzeugt.

3.4 $f(x) = -2 \cdot e^{0{,}25x} + x + 3$

Zeichnung:



(schiefe) Asymptote: $y = x + 3$

Prüfung zur Fachhochschulreife 2024 – Lösungen

Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 3

3.5 $f(x) = -2 \cdot e^{0,25x} + x + 3$

Ableitungen: $f'(x) = -0,5 \cdot e^{0,25x} + 1$; $f''(x) = -0,125 \cdot e^{0,25x}$

Bedingung für Extrempunkt: $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -0,5 \cdot e^{0,25x} + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{0,25x} = 2$

Logarithmieren: $0,25x = \ln(2) \;\Rightarrow\; x = 4\ln(2) \approx 2,77$

Mit $f''(4\ln(2)) < 0$ und $f(4\ln(2)) = -4 + 4\ln(2) + 3 = 4\ln(2) - 1 \approx 1,77$

erhält man den Hochpunkt $H(4\ln(2) \mid 4\ln(2) - 1)$.

Der Hochpunkt liegt auf der x-Achse, wenn der y-Wert 0 ist.

Damit der Extrempunkt auf der x-Achse liegt muss K_f um

$(4\ln(2) - 1) \approx 1,77$ nach unten verschoben werden.

3.6 Ansatz der Tangentengleichung: $y = mx + c$

$f(0) = -2 \cdot e^0 + 0 + 3 = -2 \cdot 1 + 3 = 1$

also Berührpunkt $B(0 \mid 1)$

$f'(0) = -0,5 \cdot e^0 + 1 = -0,5 \cdot 1 + 1 = 0,5$

also Steigung der Tangente $m = 0,5$

Tangentengleichung: $y = 0,5x + 1$

Prüfung zur Fachhochschulreife 2024 – Lösungen

Teil 2 mit Hilfsmittel

www.mvurl.de/dceb

Aufgabe 4

4.1 Schnittpunkte mit der x-Achse:

Bedingung: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x^2 = 0$ oder $\frac{1}{4}x - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}$

Lösungen (Nullstellen): $x_{1,2} = 0$ und $x_3 = 3$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_{1,2}(0 \mid 0)$; $N_3(3 \mid 0)$

Hoch- und Tiefpunkte:

Ableitungen: $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$; $f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

Bedingung: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = 0$

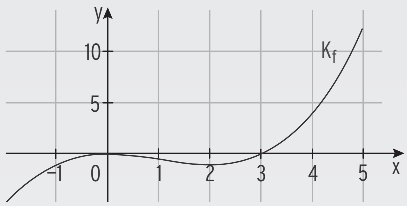
Satz vom Nullprodukt: $x = 0$ oder $\frac{3}{4}x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = \frac{3}{2}$

Lösungen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$

Mit $f''(0) = -\frac{3}{2} < 0$ und $f(0) = 0$ erhält man den Hochpunkt $H(0 \mid 0)$.

Mit $f''(2) = \frac{3}{2} > 0$ und $f(2) = -1$ erhält man den Tiefpunkt $T(2 \mid -1)$.

Zeichnung:



4.2 Nachweis Berührpunkt $R(-1 \mid -1)$:

R liegt auf K_f und auf g: $f(-1) = g(-1)$

$$\frac{1}{4} \cdot (-1)^3 - \frac{3}{4} \cdot (-1)^2 = \frac{9}{4} \cdot (-1) + \frac{5}{4} \Leftrightarrow -1 = -1$$

K_f und g haben in R die gleiche Steigung: $f'(-1) = g'(-1)$

$$\frac{3}{4} \cdot (-1)^2 - \frac{3}{2} \cdot (-1) = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

Nachweis Schnittpunkt $S(5 \mid 12{,}5)$:

$f(5) = g(5) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot 5^3 - \frac{3}{4} \cdot 5^2 = \frac{9}{4} \cdot 5 + \frac{5}{4} \Leftrightarrow 12{,}5 = 12{,}5$

Da $f'(5) = \frac{45}{4} \neq g'(5) = \frac{9}{4}$ ist, berühren sich K_f und g im Punkt S nicht, sondern schneiden sich tatsächlich.

Prüfung zur Fachhochschulreife 2024 – Lösungen

Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 4

4.2 Berechnung Flächeninhalt:

$$\int_{-1}^{5}\left(\frac{9}{4}x+\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2\right)\right)dx = \left[\frac{9}{8}x^2+\frac{5}{4}x-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^3\right]_{-1}^{5} = \frac{425}{16}-\left(-\frac{7}{16}\right) = 27$$

A = 27 FE

4.3 Bedingung: $f'(x) = -2$ $\qquad \frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x=-2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x+2=0$

Lösungsformel: $\qquad x_{1,2} = \dfrac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-6}}{\frac{3}{2}}$

Gleichung hat keine Lösung für $x \in \mathbb{R}$. (Wert unter der Wurzel ist negativ.)

Somit existieren keine Punkte mit Steigung −2.

Berechnung der kleinstmöglichen Steigung (als Minimum von f′):

Hinweis: Die kleinstmögliche Steigung liegt im Wendepunkt.

Bedingung: $f''(x) = 0$ $\qquad \frac{3}{2}x-\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x=\frac{3}{2} \Rightarrow x=1$

Mit $f'''(1) \neq 0$ liegt im Wendepunkt die kleinstmögliche Steigung von

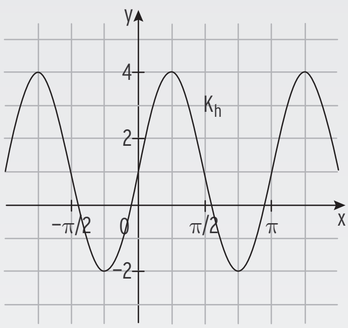
$f'(1) = -\frac{3}{4}$ vor.

4.4 Schaubild mit Skalierung

„Mittellinie“: $y = 1$

Amplitude: 3

Periodenlänge: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$



4.5 Wendepunkte liegen auf der Mittellinie im Abstand eine halben Periode.

z.B.: W(0 | 1)

Weiterer Wendepunkte für $x \leq 0$ durch

Subtraktion einer halben oder ganzen Periode: $W_1\left(-\frac{\pi}{2} \mid 1\right)$ oder $W_2(-\pi \mid 1)$

4.6 $h(x) = 3\sin(2x) + 1$ $\quad$ mit Periode $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ und Amplitude 3

$h'(x) = 3 \cdot 2 \cdot \cos(2x) = 6 \cdot \cos(2x)$

(1) Richtig; Periodenlänge von h′ beträgt ebenfalls $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

$h''(x) = -12 \cdot \sin(2x)$

(2) Falsch; Die Amplitude von h″ beträgt 12.