Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik am BSW Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG behält sich eine Nutzung ihrer Inhalte für kommerzielles Text- und Data Mining (TDM) im Sinne von § 44 b UrhG ausdrücklich vor. Für den Erwerb einer entsprechenden Nutzungserlaubnis wenden Sie sich bitte an copyright@merkur-verlag.de.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte in zumutbarem Umfang untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.
Stand: Februar 2021

Umschlag: © frhuynh – Fotolia.com

* * * * * * * * * *

8. Auflage 2021
© 1995 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0206-08
ISBN 978-3-8120-0206-6

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band „Mathematisches Grundgerüst – Ein Mathematikbuch für die Eingangsklasse“ ist ein Lehrbuch für alle beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg, die zum Abitur führen. Das Lehrbuch richtet sich exakt nach dem neuen Bildungsplan für die gymnasiale Oberstufe, Mathematik, in Baden-Württemberg, der zum 01.08.2021 in Kraft tritt.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam sowohl die im Lehrplan geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen K1 bis K6 (modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

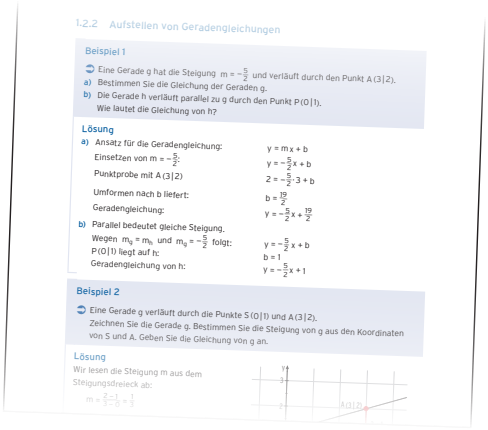
Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die im Bildungsplan aufgeführten Kompetenzen und Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.



1.2.2 Aufstellen von Geradengleichungen

Beispiel 1

Eine Gerade g hat die Steigung $m = -\frac{5}{2}$ und verläuft durch den Punkt A(3|2).

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g.

b) Die Gerade h verläuft parallel zu g durch den Punkt P(0|1). Wie lautet die Gleichung von h?

Lösung

a) Ansatz für die Geradengleichung: $y = mx + b$

Einsetzen von $m = -\frac{5}{2}$: $y = -\frac{5}{2}x + b$

Punktprobe mit A(3|2) $2 = -\frac{5}{2} \cdot 3 + b$

Umformen nach b liefert: $b = \frac{19}{2}$

Geradengleichung: $y = -\frac{5}{2}x + \frac{19}{2}$

b) Parallel bedeutet gleiche Steigung.

Wegen $m_g = m_h$ und $m_g = -\frac{5}{2}$ folgt: $y = -\frac{5}{2}x + b$

P(0|1) liegt auf h: $b = 1$

Geradengleichung von h: $y = -\frac{5}{2}x + 1$

Beispiel 2

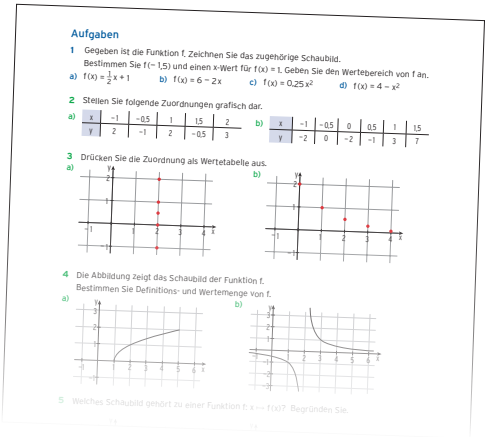
Eine Gerade g verläuft durch die Punkte S(0|1) und A(3|2). Zeichnen Sie die Gerade g. Bestimmen Sie die Steigung von g aus den Koordinaten von S und A. Geben Sie die Gleichung von g an.

Lösung

Wir lesen die Steigung m aus dem Steigungsdreieck ab:

$m = \frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3}$

Jede Lerneinheit schließt mit einer ausreichenden Anzahl von **Aufgaben** ab. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Aufgaben aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.
Eine Differenzierung der Aufgaben ist durch Farben gegeben:
grün: Lösung ohne Hilfsmittel
blau: keine Vorgabe zur Lösung


Aufgaben

1 Gegeben ist die Funktion f. Zeichnen Sie das zugehörige Schaubild. Bestimmen Sie f(−1,5) und einen x-Wert für f(x) = 1. Geben Sie den Wertebereich von f an.
a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ b) $f(x) = 6 - 2x$ c) $f(x) = 0{,}25x^2$ d) $f(x) = 4 - x^2$

2 Stellen Sie folgende Zuordnungen grafisch dar.
a)

x	−1	−0,5	1	1,5	2
y	2	−1	2	−0,5	3

b)

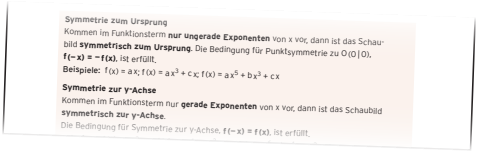
x	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5
y	−2	0	−2	−1	3	7

3 Drücken Sie die Zuordnung als Wertetabelle aus.
a) b)

4 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f. Bestimmen Sie Definitions- und Wertemenge von f.
a) b)

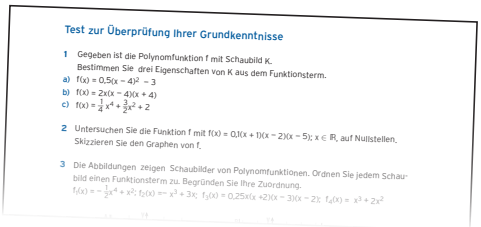
5 Welches Schaubild gehört zu einer Funktion f: x ⟼ f(x)? Begründen Sie.

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.


Symmetrie zum Ursprung
Kommen im Funktionsterm **nur ungerade Exponenten** von x vor, dann ist das Schaubild **symmetrisch zum Ursprung**. Die Bedingung für Punktsymmetrie zu O(0|0), **f(−x) = −f(x)**, ist erfüllt.
Beispiele: f(x) = ax; f(x) = $ax^3 + cx$; f(x) = $ax^5 + bx^3 + cx$

Symmetrie zur y-Achse
Kommen im Funktionsterm nur **gerade Exponenten** von x vor, dann ist das Schaubild **symmetrisch zur y-Achse**.
Die Bedingung für Symmetrie zur y-Achse, **f(−x) = f(x)**, ist erfüllt.

Die Aufgaben **„Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse“** sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Sie werden im Anhang ausführlich gelöst.

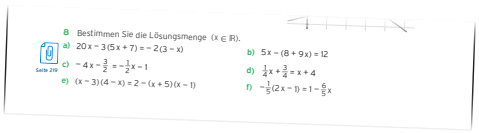

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Gegeben ist die Polynomfunktion f mit Schaubild K. Bestimmen Sie drei Eigenschaften von K aus dem Funktionsterm.
a) $f(x) = 0{,}5(x - 4)^2 - 3$
b) $f(x) = 2x(x - 4)(x + 4)$
c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2$

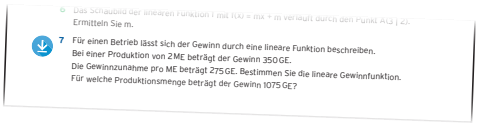
2 Untersuchen Sie die Funktion f mit f(x) = 0,1(x + 1)(x − 2)(x − 5); x ∈ ℝ, auf Nullstellen. Skizzieren Sie den Graphen von f.

3 Die Abbildungen zeigen Schaubilder von Polynomfunktionen. Ordnen Sie jedem Schaubild einen Funktionsterm zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.
$f_1(x) = -\frac{1}{2}x^4 + x^2$; $f_2(x) = x^3 + 3x$; $f_3(x) = 0{,}25x(x+2)(x-3)(x-2)$; $f_4(x) = x^3 + 2x^2$

Die **Heftklammer** im Lehrbuch mit Seitenangabe weist auf einen entsprechenden Abschnitt im Kapitel Grundwissen hin.

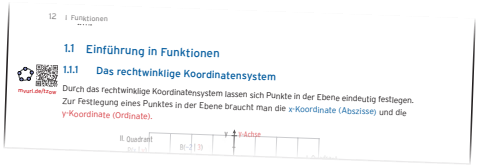

8 Bestimmen Sie die Lösungsmenge (x ∈ ℝ).
Seite 210
a) $20x - 3(5x + 7) = -2(3 - x)$
b) $5x - (8 + 9x) = 12$
c) $-4x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x - 1$
d) $\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} = x + 4$
e) $(x - 3)(4 - x) = 2 - (x + 5)(x - 1)$
f) $-\frac{1}{5}(2x - 1) = 1 - \frac{6}{5}x$

Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese im Downloadbereich zum Buch auf unserer Webseite https://www. merkur-verlag.de.


6 Das Schaubild der linearen Funktion f mit f(x) = mx + m verläuft durch den Punkt A(3 | 2). Ermitteln Sie m.

7 Für einen Betrieb lässt sich der Gewinn durch eine lineare Funktion beschreiben. Bei einer Produktion von 2 ME beträgt der Gewinn 350 GE. Die Gewinnzunahme pro ME beträgt 275 GE. Bestimmen Sie die lineare Gewinnfunktion. Für welche Produktionsmenge beträgt der Gewinn 1075 GE?

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Im Buch wird **Geogebra** in vielfältiger Weise, zur Erarbeitung von mathematischen Inhalten und zur Lösung von Aufgaben eingesetzt.


12 | Funktionen

1.1 Einführung in Funktionen

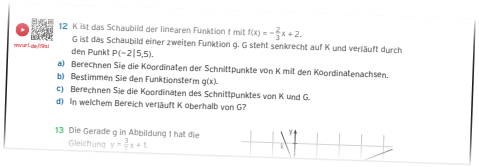
1.1.1 Das rechtwinklige Koordinatensystem

mvurl.de/fzzw

Durch das rechtwinklige Koordinatensystem lassen sich Punkte in der Ebene eindeutig festlegen. Zur Festlegung eines Punktes in der Ebene braucht man die x-Koordinate (Abszisse) und die y-Koordinate (Ordinate).

II. Quadrant
A(−1 | 2)
B(−2 | 3)
y-Achse

Videos dienen der Veranschaulichung von Problemen und Erläuterung von Lösungswegen. Sie unterstützen die Lernenden beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge.


mvurl.de/f9tu

12 K ist das Schaubild der linearen Funktion f mit $f(x) = -\frac{5}{3}x + 2$.
G ist das Schaubild einer zweiten Funktion g. G steht senkrecht auf K und verläuft durch den Punkt P(−2|5,5).
a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen.
b) Bestimmen Sie den Funktionsterm g(x).
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von K und G.
d) In welchem Bereich verläuft K oberhalb von G?

13 Die Gerade g in Abbildung 1 hat die Gleichung $y = \frac{3}{2}x + 1$.

Inhaltsverzeichnis

I Funktionen 10

1 Vertiefung der Mathematik aus der Sekundarstufe 1 ... 10
1.1 Einführung in Funktionen ... 12
1.1.1 Das rechtwinklige Koordinatensystem ... 12
1.1.2 Definition einer Funktion ... 14
1.2 Lineare Funktionen ... 21
1.2.1 Definition einer linearen Funktion ... 21
1.2.2 Aufstellen von Geradengleichungen ... 25
1.2.3 Schnittpunkte ... 28
1.2.4 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben ... 36
2 Potenzfunktionen ... 42
2.1 Definition und Eigenschaften ... 44
2.1.1 Potenzfunktionen mit natürlicher Hochzahl ... 44
2.1.2 Potenzfunktionen mit negativer ganzer Hochzahl ... 45
2.1.3 Potenzfunktion f mit $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ ... 46
2.2 Transformationen ... 47
2.3 Potenzgleichungen ... 54
2.4 Anwendungen von Potenzfunktionen ... 59
3 Polynomfunktionen ... 62
3.1 Definition einer Polynomfunktion ... 64
3.2 Polynomfunktionen und ihre Eigenschaften ... 68
3.2.1 Globales Verhalten ... 68
3.2.2 Symmetrie ... 71
3.3 Polynomgleichungen und geometrische Interpretation ... 75
3.3.1 Lösung von Polynomgleichungen ... 75
3.3.2 Gemeinsame Punkte von Graphen mit der x-Achse ... 81
3.3.3 Gemeinsame Punkte von zwei Graphen ... 91
3.4 Aufstellen von Funktionstermen ... 101
3.5 Polynomfunktionen in Anwendungen ... 109
3.5.1 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben ... 109
3.5.2 Optimierungsprobleme ... 115
4 Exponentialfunktionen ... 120
4.1 Einführungsbeispiele ... 122
4.2 Definition einer Exponentialfunktion ... 124
4.3 Die Euler'sche Zahl e ... 126
4.4 Exponentialfunktionen zur Basis e ... 127
4.5 Transformationen ... 128
4.6 Schaubilder von Exponentialfunktionen ... 131
4.7 Aufstellen von Funktionstermen ... 136
4.8 Exponentialgleichungen und geometrische Interpretation ... 138
4.8.1 Der Logarithmus ... 138
4.8.2 Exponentialgleichungen ... 140
4.8.3 Bestimmung von gemeinsamen Punkten ... 145
4.9 Wachstumsprozesse ... 150
4.9.1 Lineares Wachstum (Zu- und Abnahme) ... 150
4.9.2 Exponentielles Wachstum ... 151
4.9.3 Beschränktes Wachstum ... 158

5 Änderungsrate und grafisches Differenzieren . . . 162
5.1 Änderungsrate . . . 164
5.2 Grafisches Differenzieren . . . 169
5.3 Ableitungsregeln . . . 175

II Vektorielle Geometrie 180

1 Raumanschauung und Koordinatisierung . . . 180
1.1 Punkte . . . 182
1.2 Vektoren . . . 187
1.3 Rechnen mit Vektoren . . . 189
1.3.1 Addition und Subtraktion . . . 189
1.3.2 Skalare Multiplikation . . . 192
2 Maße und Längen . . . 198
2.1 Betrag eines Vektors . . . 198
2.2 Skalarprodukt . . . 200
2.3 Flächenberechnungen . . . 205

Grundwissen 210

1 Zahlenmengen . . . 210
2 Algebraische Begriffe und Vorübungen . . . 212
2.1 Begriffe . . . 212
2.2 Rechnen mit Summen und Differenzen . . . 212
2.3 Rechnen mit Brüchen . . . 214
2.4 Vereinfachung durch Ausklammern . . . 215
2.5 Rechnen mit Potenzen . . . 216
3 Gleichungen und Gleichungssysteme . . . 219
3.1 Lineare Gleichungen . . . 219
3.2 Lineare Gleichungssysteme . . . 221
3.3 Quadratische Gleichungen . . . 223

Anhang 227

1 Exkurs: Probleme lösen . . . 227
2 Lösungen der Tests . . . 232
3 Lösungen der Aufgaben im Kapitel Grundwissen . . . 243
4 Einführung in Geogebra, Geogebra- und Videolisten . . . 246
Mathematische Zeichen . . . 252
Stichwortverzeichnis . . . 253
Abbildungsverzeichnis . . . 255