„Sie müssen das Buch so schreiben, dass alles drin ist, aber man es trotzdem versteht!“
(Aufforderung einer Schülerin)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf die **schriftliche und mündliche Abiturprüfung** in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- Ihr gewonnenes Wissen anhand von Basisübungen mit ausführlichen Lösungen schnell und prüfungsbezogen zu vertiefen.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.
- eine gute Note in der Abiturprüfung zu erreichen.

Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.
- den Notendurchschnitt Ihrer Klasse in der Abiturprüfung zu optimieren.

Konzept

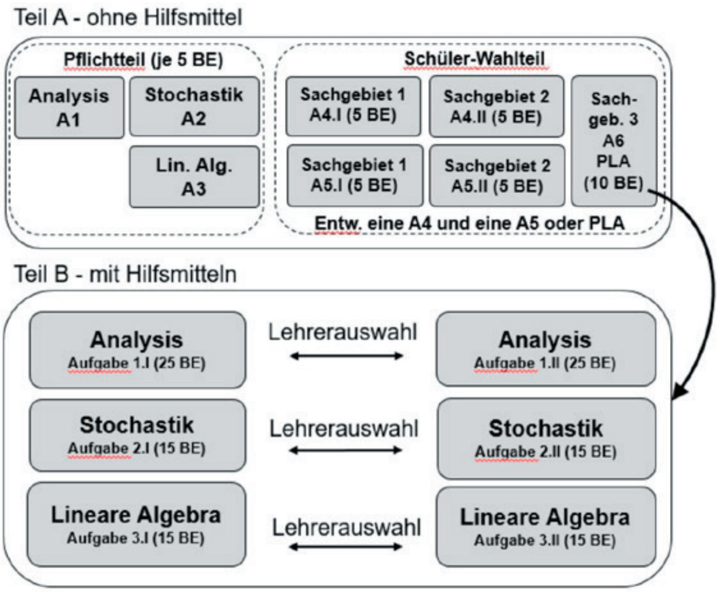
Der Kern des Buches besteht aus eingängigen **Stoffzusammenfassungen zu allen Lehrplanthemen** des **grundlegenden Anforderungsniveaus** am beruflichen Gymnasium in Baden-Württemberg.
Die Zusammenfassungen sind so konzipiert, dass alle mathematischen Inhalte direkt aufgenommen und kognitiv verarbeitet werden können.

Die über **100 Videos** im Buch bieten einen weiteren Lernzugang, welcher in Kombination mit dem Buch bei vielen Schülerinnen und Schülern nachweisbar zu besseren Lernergebnissen führt.

Das Ende des Buches besteht aus kurzen, elementaren **Basisübungen** zu allen Themen. Diese werden **ausführlich gelöst**.

Ablauf der Abiturprüfung

Arbeitszeit: 255 Minuten (maximal 100 Minuten für Teil A)
Bewertungseinheiten: 80 gesamt



* Sachgebiete sind Analysis, Stochastik und Vektorgeometrie — Quelle: IBBW Baden-Württemberg

Erläuterungen

- **Pflichtteil (Teil A, ohne Hilfsmittel)**: Die vorgelegten 3 Aufgaben (zu allen Themen des Lehrplans) müssen bearbeitet werden.
- **Schüler-Wahlteil (Teil A, ohne Hilfsmittel)**
  Beispiel: In Aufgabengruppe 1 (A4) liegt jeweils eine Aufgabe zur Analysis (Sachgebiet 1) und eine Aufgabe zur Stochastik (Sachgebiet 2) vor. In der Aufgabengruppe 2 (A5) entsprechend. Zusätzlich liegt die Aufgabe 6 zum Problemlösen (PLA) zur Vektorgeometrie vor. Die Schüler*in wählt dann **entweder aus jeder der beiden Aufgabengruppen genau eine Aufgabe** aus **oder wählt (nur) die Aufgabe 6 zum Problemlösen** aus. In diesem Fall gibt die Schüler*in **vor** der Bearbeitung der Problemlöseaufgabe den Teil A ab und erhält dann zur Bearbeitung der Problemlöseaufgabe die **Hilfsmittel (Taschenrechner und Merkhilfe)**.
- **Teil B, mit Hilfsmittel:** Vor der Prüfung wählt die Lehrer*in aus je zwei Aufgaben zur Analysis, Stochastik und Vektorgeometrie jeweils eine Aufgabe aus.

Faustformel zur Zeitplanung: Aus 255 min für 80 BE ergeben sich **3,19 min pro BE**.

Hinweis: Zur weiteren Erläuterung sei auf das nachfolgende **Video** verwisesen.

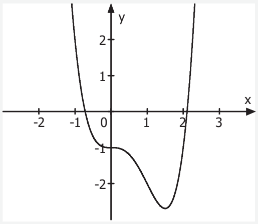
www.mvurl.de/uicu

Funktionstypen

Ganzrationale Funktion

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$

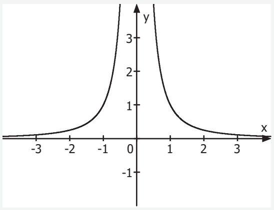
(S. 12)



Potenzfunktionen

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

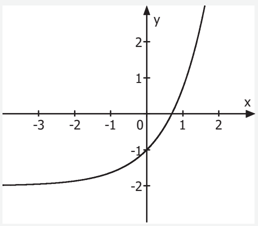
(S. 16)



Exponentialfunktion

$f(x) = e^x - 2$

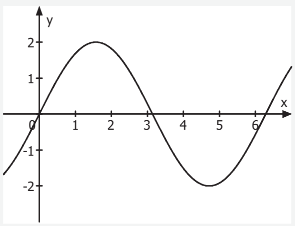
(S. 18)



Trignonometrische Funktion

$f(x) = 2 \cdot \sin(x)$

(S. 20)

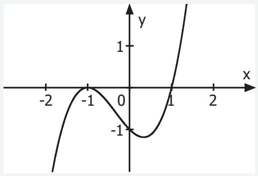


Analysis
Funktionen

Nullstellenansatz

$f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-1)$

(S. 14)

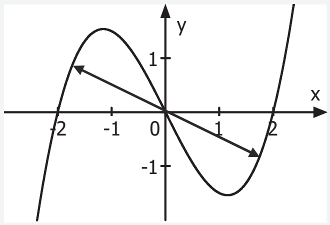


Symmetrie

…zur y-Achse

…zum Ursprung

(S. 24)

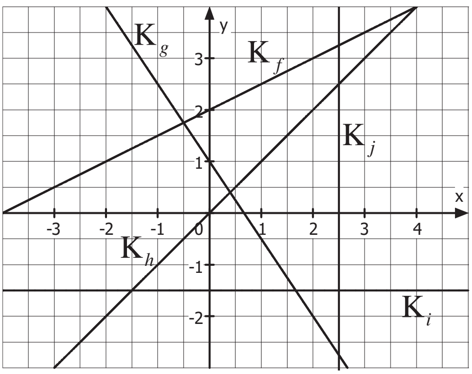
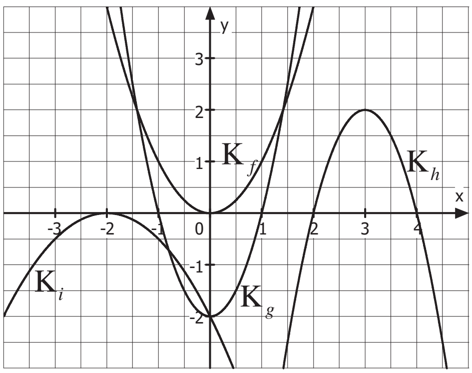


Spiegeln, Strecken
und Verschieben

(S. 22)

1 Funktionen

1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

1. Grades (Geraden)	2. Grades (Parabeln)
Hauptform : $\boldsymbol{y = mx + b}$	**Allg.:** $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$
Vorgehen zum Einzeichnen: $y = \frac{hoch\,/\,runter}{rechts} \cdot x +$ *y-Achsen-abschnitt*	Scheitelpunkt-Ansatz: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s \mid y_s)$
Steigung aus 2 Punkten: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$a > 0$: nach oben geöffnet bzw. Verlauf von II nach I
Steigungswinkel aus Steigung bestimmen: $m = \tan(\alpha)$	$a < 0$: nach unten geöffnet bzw. Verlauf von III nach IV
Parallele Geraden: $m_1 = m_2$ (gleiche Steigung)	Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 \mid c)$
Senkrechte (orthogonale) Geraden: Steigungen sind negative Kehrwerte voneinander: $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ bzw. $m_1 \cdot m_2 = -1$	Bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^2 + c$ (nur gerade Hochzahlen)
1. Winkelhalbierende: $y = x$ $(m = 1)$ 2. Winkelhalbierende: $y = -x$ $(m = -1)$	
	
K_f: $y = \frac{1}{2}x + 2$ K_g: $y = -\frac{3}{2}x + 1$ K_h: $y = x$ (1. Winkelhalbierende) K_i: $y = -1{,}5$ K_j: $x = 2{,}5$	K_f: $f(x) = x^2$ K_g: $g(x) = 2x^2 - 2$ K_h: $h(x) = -2(x-3)^2 + 2$ K_i: $i(x) = -0{,}5x^2 - 2x - 2$

www.mvurl.de/fdub

<table>
<tr><th>3. Grades</th><th>4. Grades</th></tr>
<tr>
<td>

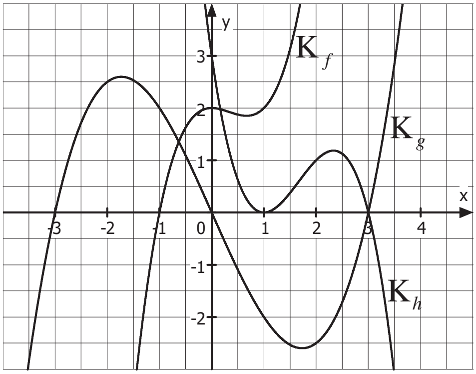
Allg.: $\boldsymbol{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$

$a > 0$: Verlauf von III nach I

$a < 0$: Verlauf von II nach IV

Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 \mid d)$

Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung:
$f(x) = ax^3 + cx$ (nur ungerade Hochzahlen)



K_f: $f(x) = x^3 - x^2 + 2$

K_g: $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x$

K_h: $h(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$

</td>
<td>

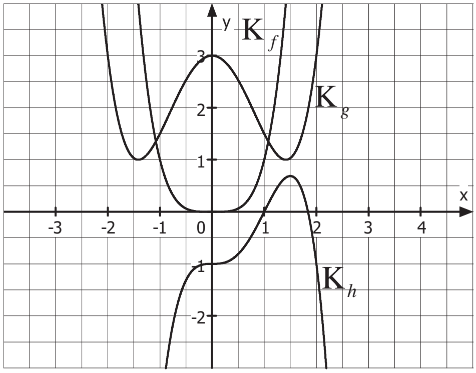
Allg.: $\boldsymbol{f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$

$a > 0$: Verlauf von II nach I

$a < 0$: Verlauf von III nach IV

Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 \mid e)$

Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse:
$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (nur gerade Hochzahlen)



K_f: $f(x) = x^4$

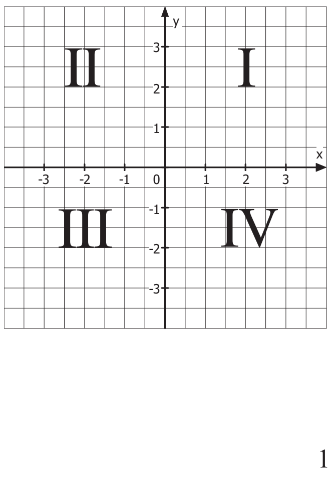
K_g: $g(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2 + 3$

K_h: $h(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$

</td>
</tr>
</table>

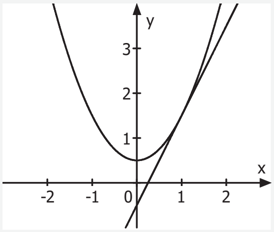
Tipp (für alle ganzrationalen Funktionen)
$\boldsymbol{a > 0}$: Verlauf von ... nach **I** („endet **oben**“)
$\boldsymbol{a < 0}$: Verlauf von ... nach **IV** („endet **unten**“)

Die Quadranten



Tangente

(S. 44)



Ableitungsregeln
$f(x) =$
$f'(x) =$

(S. 40)

Monotonie

(S. 46)

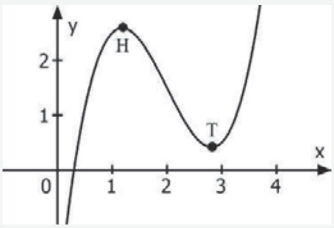
Differenzialrechnung

Krümmung

(S. 47)

Hochpunkte
und
Tiefpunkte

(S. 48)



Extremwertaufgaben
(S. 58)

Ermittlung von Funktionsgleichungen
Eine Funktion 4. Grades hat den Hochpunkt H(3|4), den Tiefpunkt ...
Wie lautet ihr Funktionsterm?
(S. 54)

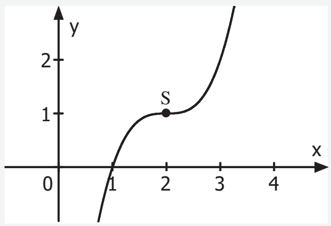
Graphisches Ableiten

N E W
  N E W
    N E W

(S. 52)

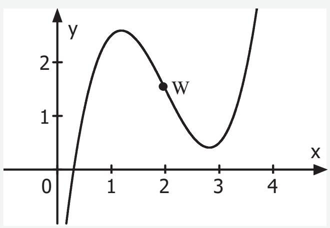
Sattelpunkte

(S. 50)



Wendepunkte

(S. 49)



3 Differentialrechnung

3.1 Ableitungsregeln

<table>
<tr><th>Nr.</th><th>Beispiel</th><th>Vorgehen</th></tr>
<tr><td colspan="3">Elementarregeln</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$f(x) = x^5$
$f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4$

$f(x) = x^2$
$f'(x) = 2x^1 = 2x$

$f(x) = x$
$f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$</td><td rowspan="2">$f(x) = x^{Exponent}$
$f'(x) = Exponent \cdot x^{Exponent-1}$
(Potenzregel)

Vor dem Ableiten
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$
$f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$f(x) = e^x$
$f'(x) = e^x$</td><td>Abschreiben</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$f(x) = \sin(x)$
$f'(x) = \cos(x)$</td><td rowspan="2">$$\begin{tikzcd} & \sin \arrow[dr] & \\ -\cos \arrow[ur] & & \cos \arrow[dl] \\ & -\sin \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$
(Im Uhrzeigersinn!)</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$f(x) = \cos(x)$
$f'(x) = -\sin(x)$</td></tr>
</table>

http://mvurl.de/wswq

Nr.	Beispiel	Vorgehen
Vorgehensregeln		
6	$f(x) = \mathbf{3} \cdot x^2$ $f'(x) = \mathbf{3} \cdot 2x = 6x$	*„Zahlen" mit $\cdot$ oder $:$ „bleiben"* (Faktorregel)
7	$f(x) = x^2 + \mathbf{2}$ $f'(x) = 2x$	*„Zahlen" mit $+$ oder $-$ „verschwinden"*
8	$f(x) = x^2 - 4x$ $f'(x) = 2x - 4$	*$+$ und $-$ Zeichen unterteilen die Funktion in Teilfunktionen, welche einzeln abgeleitet werden* (Summenregel)

Produktregel		
9	$f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$ $f'(x) = \underbrace{u'(x)}_{\text{Ableiten}} \cdot \underbrace{v(x)}_{\text{Abschreiben}} + \underbrace{u(x)}_{\text{Abschreiben}} \cdot \underbrace{v'(x)}_{\text{Ableiten}}$

Aber: Die Produktregel nur dann anwenden, wenn zwei Faktoren, die **beide *x*** enthalten, miteinander **multipliziert** werden.

$f(x) = 3x + \sin(x)$
$f'(x) = 3 + \cos(x)$
(Keine Produktregel, da keine Multiplikation)

$f(x) = 3 \cdot \sin(x)$
$f'(x) = 3 \cdot \cos(x)$
(Produktregel unnötig, Faktor 3 enthält kein x)

$f(x) = 3x \cdot \sin(x)$
$f'(x) = 3 \cdot \sin(x) + 3x \cdot \cos(x)$
(Produktregel)

1 Lineare Gleichungssysteme

Lösungsvorgehen (an Beispielen)

Beispiel 1

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3&=5\\ -2x_1+3x_3&=-1\\ 2x_1+2x_2-2x_3&=2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&1&1&5\\ -2&0&3&-1\\ 2&2&-2&2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \mathrm{I}+\mathrm{II}\\ \mathrm{II}+\mathrm{III}\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&1&1&5\\ 0&1&4&4\\ 0&2&1&1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 2\cdot\mathrm{II}-\mathrm{III}\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&1&1&5\\ 0&1&4&4\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{7}&\mathbf{7} \end{array}\right)$$

LGS hat
eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} \mathrm{III}:\ 7x_3&=7\\ x_3&=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{in II}:\ x_2+4\cdot 1&=4\\ x_2&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{in I}:\ 2x_1+0+1&=5\\ x_1&=2 \end{aligned}$$

Lösungsvektor: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

Beispiel 2

$$\begin{aligned} 2x_1-2x_2+x_3&=-2\\ x_1-x_3&=1\\ -x_1-2x_2+4x_3&=0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&-2&1&-2\\ 1&0&-1&1\\ -1&-2&4&0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \mathrm{I}-2\cdot\mathrm{II}\\ \mathrm{II}+\mathrm{III}\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&-2&1&-2\\ 0&-2&3&-4\\ 0&-2&3&1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{II}-\mathrm{III}\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&-2&1&-2\\ 0&-2&3&-4\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{-5} \end{array}\right)$$

LGS hat
keine Lösung

da $\mathrm{III}: 0=-5$
(Widerspruch)

Beispiel 3

$$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+4x_3&=1\\ -2x_1+2x_2-2x_3&=2\\ x_1-x_2+x_3&=-1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&-3&4&1\\ -2&2&-2&2\\ 1&-1&1&-1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \mathrm{I}+\mathrm{II}\\ \mathrm{I}-2\cdot\mathrm{III}\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&-3&4&1\\ 0&-1&2&3\\ 0&-1&2&3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{II}-\mathrm{III}\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&-3&4&1\\ 0&-1&2&3\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0} \end{array}\right)$$

LGS hat
unendlich viele Lösungen

Setzen von $x_3=t\ \ (t\in\mathbb{R})$

in II:

$$\begin{aligned} -x_2+2t&=3\\ -x_2&=-2t+3\\ x_2&=2t-3 \end{aligned}$$

in I:

$$\begin{aligned} 2x_1-3\cdot(2t-3)+4t&=1\\ 2x_1-6t+9+4t&=1\\ 2x_1&=2t-8\\ x_1&=t-4 \end{aligned}$$

Lösungsvektor:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}t-4\\2t-3\\t\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$$

Hinweis: Sobald bei zwei Gleichungen in der ersten Spalte eine Null steht, sollte nur noch mit diesen beiden Gleichungen gerechnet werden. Grund: Wenn die andere Gleichung mit einbezogen wird, verschwindet eine Null aus der ersten Spalte wieder.

www.mvurl.de/jyy5

Übersicht (vereinfacht)

Gegebenes LGS: $\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right)$

Umformungen :
- Zeile mit Zahl multiplizieren bzw. durch Zahl dividieren (außer 0)
- Vielfache von Zeilen addieren oder subtrahieren
- Zeilentausch
- Spaltentausch

LGS in Dreiecksform: $\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \end{array}\right)$

Letzte Zeile entscheidet über Lösbarkeit

$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \neq \mathbf{0} & \bullet \end{array}\right)$

LGS hat **eindeutige Lösung**

$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \neq \mathbf{0} \end{array}\right)$

LGS hat **keine Lösung**

$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$

LGS hat **unendlich viele Lösungen**

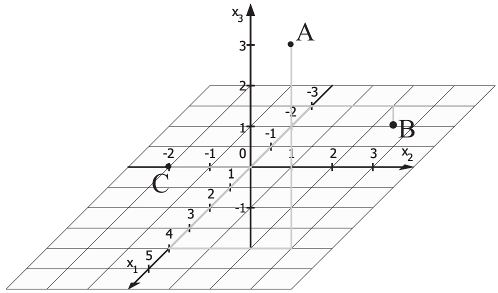
2 Vorwissen (Punkte, Vektoren, Rechenoperationen)

2.1 Punkte (im $\mathbb{R}^3$)

Beispiel: $A(4|3|5)$

Vom **Ursprung** geht man
4 Einheiten nach vorne, 3 nach rechts und 5 Einheiten nach oben.

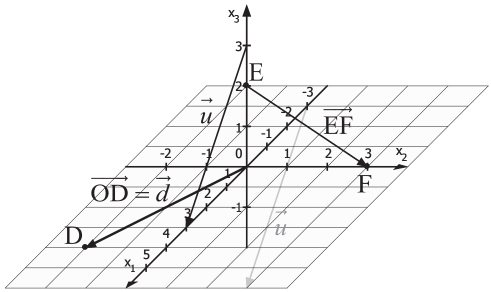
$B(-3|2|-0{,}5)$; $C(0|-2|0)$



2.2 Vektoren (im $\mathbb{R}^3$)

Beispiel: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Von einem beliebigen **Anfangspunkt** geht man
3 Einheiten nach vorne und
3 Einheiten nach unten.



Bemerkungen

- **Ortsvektor** eines Punktes: Zeigt vom Ursprung auf den Punkt (also auf einen „Ort“).

Beispiel: $D(4|-2|0)$ und $\overrightarrow{OD} = \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- **Verbindungsvektor** zwischen 2 Punkten:

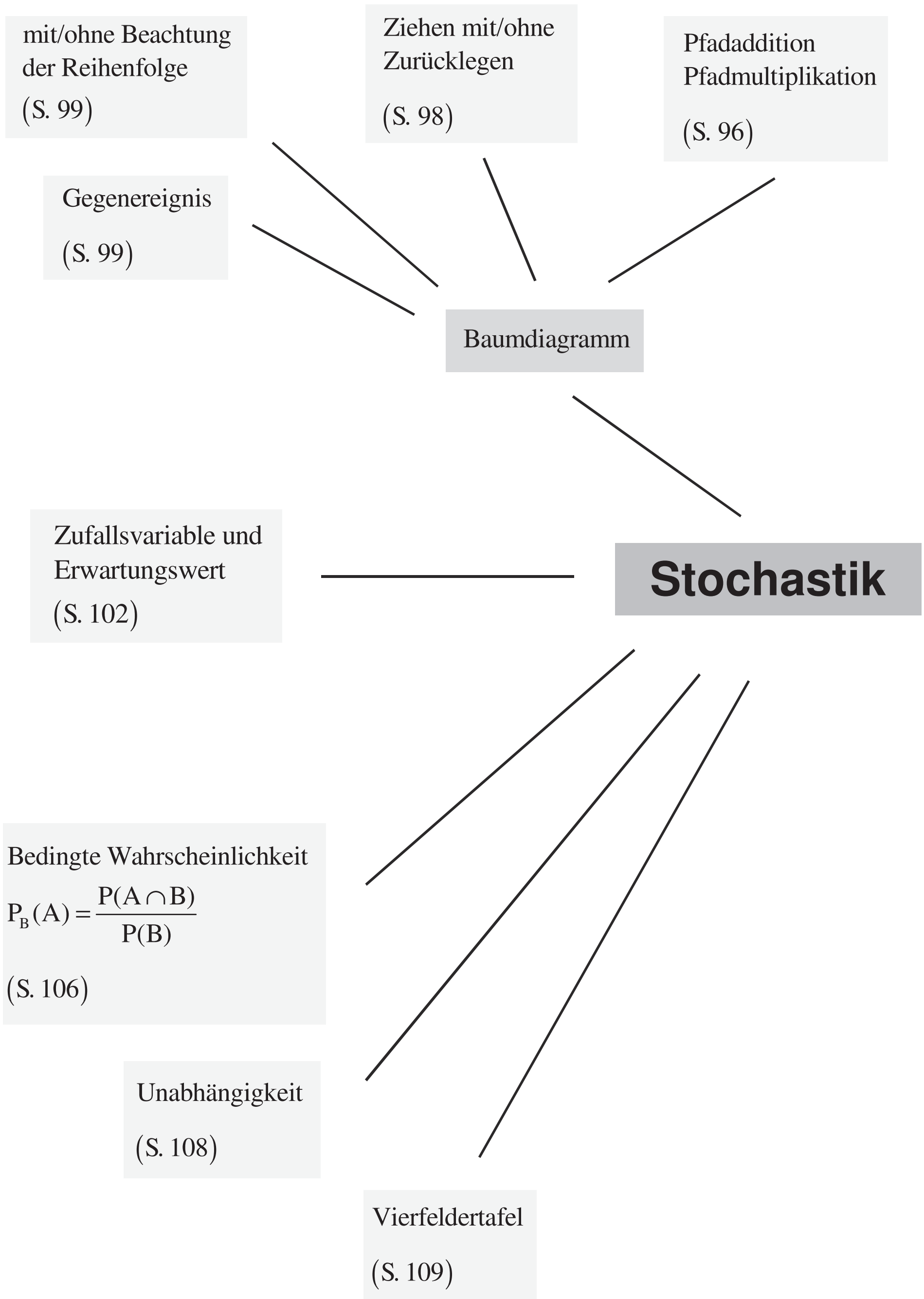
Beispiel: $E(0|0|2)$ und $F(0|3|0) \rightarrow \overrightarrow{EF} = \vec{f} - \vec{e} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 3-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

„Verbindungsvektor = Endpunkt – Startpunkt“

- **Spezielle Vektoren**

Nullvektor $\vec{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; Einheitsvektoren: $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

www.mvurl.de/d7o3


mit/ohne Beachtung der Reihenfolge
(S. 99)
Ziehen mit/ohne Zurücklegen
(S. 98)
Pfadaddition
Pfadmultiplikation
(S. 96)
Gegenereignis
(S. 99)
Baumdiagramm
Zufallsvariable und Erwartungswert
(S. 102)
Stochastik
Bedingte Wahrscheinlichkeit
$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
(S. 106)
Unabhängigkeit
(S. 108)
Vierfeldertafel
(S. 109)

Binomialverteilung

Erwartungswert und
Standardabweichung
(S. 124)

Aufgabentypen
(S. 120–123)

Binomialverteilung und
kumulierte Binomialverteilung
(S. 118)

Bernoulliformel (S. 116)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

1 Baumdiagramme und Pfadregeln

1.1 Einführung

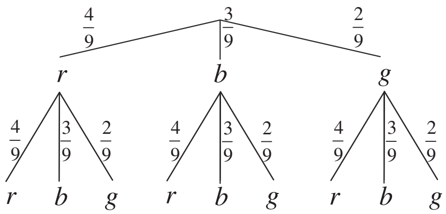
Beispiel 1: In einer Urne befinden sich 4 rote, 3 blaue und 2 grüne Kugeln. Es werden nacheinander 2 Kugeln entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird 2-mal die gleiche Farbe gezogen? Entnommene Kugeln werden hierbei …

a) … wieder zurückgelegt.
(Ziehen mit Zurücklegen)

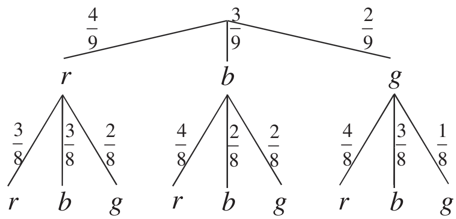
b) … nicht wieder zurückgelegt.
(Ziehen ohne Zurücklegen)

1. Schritt: Baumdiagramm anlegen

a)



b)



Hinweise

- Zu Beginn befinden sich 9 Kugeln in der Urne, von denen 4 rot sind. Dies führt zu einer Wahrscheinlichkeit von 4/9 für rot. (P = günstige/mögliche)
- Summe der Wahrscheinlichkeiten an jeder Verzweigung: 100 %
- **Ziehen ohne Zurücklegen:** Wahrscheinlichkeiten ändern sich hier von Stufe zu Stufe, abhängig davon: **Wie viele** Kugeln schon gezogen wurden (Änderung im **Nenner**) und **welche** Kugeln in den Vorstufen gezogen wurden (Änderung im **Zähler**).

2. Schritt: Ereignis definieren, welches alle gefragten Ergebnisse enthält

$$\mathrm{E} = \{rr; bb; gg\}$$

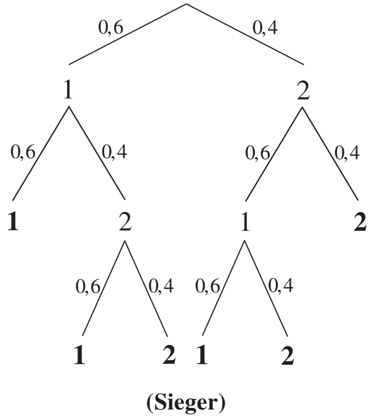
3. Schritt: Wahrscheinlichkeit des Ereignisses berechnen

$$\mathrm{P(E)} = \mathrm{P}(rr) + \mathrm{P}(bb) + \mathrm{P}(gg)$$
$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{29}{81} \approx 0{,}358$$

$$\mathrm{P(E)} = \mathrm{P}(rr) + \mathrm{P}(bb) + \mathrm{P}(gg)$$
$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{18} \approx 0{,}278$$

- **Pfadaddition:** Ergebniswahrscheinlichkeiten aller zugehörigen Ergebnisse addieren.
- **Pfadmultiplikation:** Ergebniswahrscheinlichkeiten durch Multiplikation „entlang ihres Ergebnispfades“.

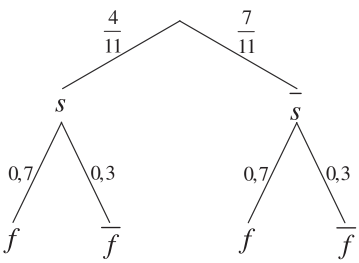
Beispiel 2: Beim Rundlauf (Mäxle) im Tischtennis stehen sich im Finale zwei Spieler gegenüber. Spieler 1 entscheidet mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % einen Ballwechsel für sich. Wer zuerst 2 Ballwechsel gewonnen hat, ist Sieger.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Spieler 1 insgesamt?



$$E = \{11; 121; 211\}$$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(11) + P(121) + P(211) \\ &= 0,6 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \\ &= 0,648 = 64,8\ \% \end{aligned}$$

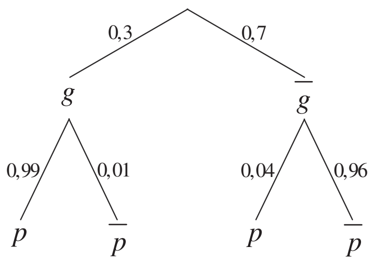
Beispiel 3: In einem Paket befinden sich 11 Smartphones. 4 davon sind vom Hersteller Samsung (*s*). Für 70 % der Handys eines jeden Herstellers wird eine Flatrate (*f*) gebucht. Ein Smartphone wird blind entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es nicht von Samsung und ohne Flatrate.



$$E = \{\overline{s}\,\overline{f}\}$$

$$P(E) = P(\overline{s}\,\overline{f}) = \frac{7}{11} \cdot 0,3 \approx 0,191 = 19,1\%$$

Beispiel 4: 30 % der 100 m-Läufer sind bei einem Wettkampf gedopt (*g*). Ein Dopingtest entlarvt gedopte Sportler mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 %. Jedoch erhält auch ein nicht gedopter Sportler mit einer Wahrscheinlichkeit von 4 % ein positives Dopingtestergebnis (*p*). Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein zufällig ausgewählter Läufer positiv getestet?



$$E = \{gp; \overline{g}p\}$$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(gp) + P(\overline{g}p) \\ &= 0,3 \cdot 0,99 + 0,7 \cdot 0,04 = 0,325 = 32,5\% \end{aligned}$$

4.4 Die JOKER-Liste für schwierige Aufgabentypen

In den Abiturprüfungen zeichnen sich **anspruchsvolle Aufgaben** zur Binomialverteilung oft dadurch aus, dass eben nicht „nur“, bei gegeben Werten für *n*, *p* und *k* nach der Wahrscheinlichkeit P gefragt wird, sondern, dass **„rückwärts“** aus gegebenen Werten von P auf *n*, *p* oder *k* geschlossen werden muss, indem verschiedene Werte **am WTR ausprobiert** werden.
Zudem sind die Aufgaben oft in Anwendungen„eingekleidet“.

Die nachfolgende **Joker-Liste** soll Ihnen bei diesen Aufgaben helfen, indem sie Ihnen Struktur gibt und den Fokus auf die wesentlichen Werte lenkt.

Beispiel

a) Ein Glücksrad hat 18 gleich große Felder. Einige davon sind rot eingefärbt.
Das Glücksrad wird 40 Mal gedreht. Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau 16 Mal die Farbe Rot kommt, beträgt etwa 12,6 %. Wie viele Felder sind rot eingefärbt?

Joker - Liste

☒ BV oder ☐ kum. BV

über Gegenereignis ☐ ja ☒ nein

$n=40$	oder	☐ gesucht
$p=$ **?**	oder	☒ gesucht
$k=16$	oder	☐ gesucht
$\mathrm{P}\approx 0{,}126$	oder	☐ gesucht

Vorgehen

X : Anzahl der Treffer

verschiedene Werte von p probieren, bis $\mathrm{P}\approx 0{,}126$ gilt.

$p=\frac{7}{18}$: $\mathrm{P}(X=16)\approx 0{,}126$

A: Es sind 7 Felder rot eingefärbt.

b) Ein Basketballspieler trifft einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %.
Er wirft 30 Mal. Bei welcher Trefferanzahl überschreitet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er höchstens diese Trefferanzahl erreicht, zum ersten Mal 95 %?

Joker - Liste

☐ BV oder ☒ kum. BV

über Gegenereignis ☐ ja ☒ nein

$n=30$	oder	☐ gesucht
$p=0{,}75$	oder	☐ gesucht
$k=$ **?**	oder	☒ gesucht
$\mathrm{P}>0{,}95$	oder	☐ gesucht

Vorgehen

k erhöhen, bis 95 % überschritten wird.

$\mathrm{P}(X\leq 24)\approx 0{,}797<0{,}95$

$\mathrm{P}(X\leq 25)\approx 0{,}902<0{,}95$

$\mathrm{P}(X\leq 26)\approx 0{,}963>0{,}95$

A: Bei mindestens 26 Treffern.

www.mvurl.de/8g8z

c) Ein Flugzeug hat 100 Plätze. Es werden jedoch mehr als 100 Tickets verkauft, da durchschnittlich nur 90 % der buchenden Personen auch zum Flug erscheinen.
Wie viele Tickets dürfen höchstens verkauft werden, sodass die vorhandenen Plätze mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % ausreichen?

Joker - Liste		
☐ BV	oder	☒ kum. BV
über Gegenereignis		☐ ja / ☒ nein
$n=$ **?**	oder	☒ gesucht
$p=0{,}9$	oder	☐ gesucht
$k=100$	oder	☐ gesucht
$\mathrm{P}>0{,}95$	oder	☐ gesucht

Vorgehen

X: Anzahl der Fluggäste

n erhöhen, bis 95 % unterschritten wird.

$n=106 \quad \mathrm{P}(X \leq 100) \approx 0{,}960 > 0{,}95$

$n=107 \quad \mathrm{P}(X \leq 100) \approx 0{,}919 < 0{,}95$

A: Es dürfen höchstens 106 Tickets verkauft werden.

d) An einer Umfrage nimmt erfahrungsgemäß nur jede fünfte angesprochene Person teil. Ermitteln Sie die Anzahl der Personen, die mindestens angesprochen werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95%, mindestens 1000 Personen zu bekommen, die an der Umfrage teilnehmen. (Abiturprüfung 2022)

Bedingung:
$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \geq 1000) &\geq 0{,}95 \qquad (X\text{: Anzahl der Teilnehmer}) \\ 1-\mathrm{P}(X \leq 999) &\geq 0{,}95 \\ 0{,}05 &\geq \mathrm{P}(X \leq 999) \end{aligned}$$

Joker - Liste		
☐ BV	oder	☒ kum. BV
über Gegenereignis		☒ ja / ☐ nein
$n=$ **?**	oder	☒ gesucht
$p=\frac{1}{5}$	oder	☐ gesucht
$k=999$	oder	☐ gesucht
$\mathrm{P}\leq 0{,}05$	oder	☐ gesucht

Vorgehen

n erhöhen, bis 0,05 unterschritten wird

$n = 5234: \ \mathrm{P}(X \leq 999) \approx 0{,}0505 \geq 0{,}05$

$n = 5235: \ \mathrm{P}(X \leq 999) \approx 0{,}0498 \leq 0{,}05$

A: Es müssen mindestens 5235 Personen angesprochen werden.

Aufgabe 46: Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S.

a) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix};\quad h:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ mit $r,s\in\mathbb{R}$

b) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix};\quad h:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$ mit $r,s\in\mathbb{R}$

2.4 Ebenen

Aufgabe 47: Gegeben ist die Ebene E mit $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ mit $r,s\in\mathbb{R}$.

Untersuchen Sie, ob der Punkt $A(1|1|1)$ in E liegt.

Aufgabe 48: Gegeben sind Punkte $A(1|2|4)$, $B(0|2|-2)$ und $C(1|3|4)$, welche in der Ebene E liegen. Bestimmen Sie eine mögliche Ebenengleichung.

Aufgabe 49: Gegeben ist die Gerade g mit $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ mit $r\in\mathbb{R}$.

Geben Sie die Parametergleichung einer zu g senkrechten Ebene an.

Aufgabe 50: Gegeben ist die Ebene E mit $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ mit $r,s\in\mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Spurpunkte.

b) Berechnen Sie die Gleichungen der Spurgeraden.

2.5 Schnittwinkel

Aufgabe 51: Berechnen Sie den Schnittwinkel.

a) Zwischen $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\8\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ (mit $r,s\in\mathbb{R}$).

b) Zwischen $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}$ (mit $r\in\mathbb{R}$) und x_1x_3-Ebene.

2.6 Abstandsberechnungen

Aufgabe 52 : Welchen Abstand haben die Punkte $A(-2|0|1)$ und $B(1|-3|5)$ voneinander?

Aufgabe 53 : Welchen Abstand hat der Punkt $A(-2|0|1)$ von den Koordinatenebenen?

Aufgabe 54 : Berechnen Sie den Abstand.

a) Zwischen $Q(0|2|-1)$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

b) Begründen Sie, dass der in a) errechnete Abstand auch dem Abstand zwischen g und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ entspricht.

2.7 Modellieren mit Vektoren

Aufgabe 55 : Ein U-Boot bewegt sich nach der Bahngleichung

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 36 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -3{,}75 \end{pmatrix}$ (t in Stunden, sonstige Angaben in km).

Die x_1x_2-Ebene stellt die Wasseroberfläche des Meeres dar.

a) Befindet sich das U-Boot auf einer Steig- oder Sinkfahrt?

b) Welche Geschwindigkeit hat es?

c) Nach wie vielen Stunden hat das U-Boot eine Tiefe von $9{,}5\,\text{km}$?

3 Basisübungen zur Stochastik

3.1 Baumdiagramm und Pfadregeln

Aufgabe 56: In einer Urne befinden sich 3 blaue, 4 rote und 5 grüne Kugeln.
Es werden 3 Kugeln nacheinander gezogen. Gezogene Kugeln werden zurückgelegt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

a) Man erhält 3 Kugeln der gleichen Farbe.

b) Man erhält genau eine rote Kugel.

c) Man erhält 3 Kugeln mit verschiedenen Farben.

d) Man erhält zuerst eine grüne Kugel und dann 2 blaue Kugeln.

e) Man erhält mindestens eine grüne Kugel.

Aufgabe 57: In einem Stapel aus 13 Karten befinden sich 4 Asse, 2 Könige, 4 Damen und 3 Buben. Ein Spieler hebt zwei Karten ab.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

a) Der Spieler erhält kein Ass.

b) Der Spieler erhält höchstens ein Ass.

c) Der Spieler erhält genau einen König.

d) Der Spieler erhält ein Ass und einen Bube.

Aufgabe 58: In einer Urne befinden sich 10 blaue, 10 rote und 10 grüne Kugeln.
Wie viele Kugeln muss man mindestens (mit zurücklegen) entnehmen, sodass die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine blaue Kugel zu ziehen, mindestens 98 % beträgt?

3.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Vierfeldertafel

Aufgabe 59: An einer Schule sind 24 % der Autos alt. 18 % der Autos sind schmutzig.
65 % der Autos sind weder alt noch schmutzig.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewähltes Auto alt und schmutzig?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewähltes Auto alt oder schmutzig?

c) Man sieht ein altes Auto. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es schmutzig?

d) Sind die beiden Eigenschaften „alt“ und „schmutzig“ voneinander abhängig oder unabhängig?

Aufgabe 60: An einer Schule wurden im Laufe des Schuljahres 46 % der Schüler vom Hausmeister ermahnt. 20 % der ermahnten Schüler verhalten sich ordentlich. Insgesamt verhalten sich 53 % der Schüler ordentlich.

a) Geben Sie ein vollständig ausgefülltes Baumdiagramm an.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Schüler unordentlich und wurde noch nicht vom Hausmeister ermahnt?

c) Man trifft auf einen ordentlichen Schüler. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde er schon vom Hausmeister ermahnt?

3.3 Zufallsvariable, Erwartungswert und Standardabweichung

Aufgabe 61: Eine Klasse bietet bei der Weihnachtsfeier ein Glücksspiel an. Hierbei wird ein Würfel ein Mal geworfen. Falls eine 1 oder 3 geworfen wird, bekommt der Spieler 2 € ausbezahlt. Bei einer 6 bekommt er 5 € ausbezahlt. Ansonsten bekommt er 1 € ausbezahlt. Wie hoch sollte die Klasse den Eintrittspreis für das Spiel festlegen, sodass sie pro Spiel durchschnittlich 0,50 € Gewinn macht?

3.4 Binomialverteilung

Aufgabe 62: Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Bernoulliformel.

a) Eine Maschine produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 78 % fehlerfreie Chips. Es werden 17 Chips überprüft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 11 fehlerfrei?

b) Emir verwandelt einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er von 15 Freiwürfen genau 13?

c) Ein Glücksrad hat 3 gleich große Felder mit den Farben gelb, grün und blau. Das Glücksrad wird 8 Mal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint 3 Mal die Farbe blau?

Aufgabe 63: Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = 0{,}4$.
Bestimmen Sie mithilfe des WTR.

a) $P(X = 18) =$ ______________________________

b) $P(X < 9) =$ ______________________________

c) $P(X \geq 15) =$ ______________________________

d) $P(X > 11) =$ ______________________________

e) $P(9 \leq X \leq 13) =$ ______________________________

Aufgabe 64: Dan trifft einen Elfmeter mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Er schießt 20 Elfmeter. Für welche Anzahl an Treffern beträgt die Wahrscheinlichkeit etwa 16,86 %?

Aufgabe 65: Dan trifft einen Elfmeter mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Wie viele Elfmeter darf er höchstens schießen, sodass die Wahrscheinlichkeit, höchstens 10 zu treffen, mehr als 50 % beträgt?