Ott | Rosner

Abiturprüfung in Mathematik
Analysis, Stochastik
Wahlgebiet: Matrizen, Prozesse

Berufliches Gymnasium
Baden-Württemberg

2023

mit Lernvideos

Schülergerechte Lösungen

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

* * * * *

Umschlag Bild: © frhuynh - Fotolia.com

2. Auflage 2022

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0385-02-DS

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung dient zur Vorbereitung auf das **Abitur 2023** an beruflichen Gymnasien und ist auf die aktuelle Prüfungsordnung abgestimmt.

Für die Abiturprüfung 2023 gelten Vorgabendie den Ablauf und die prüfungsrelevanten Stoffgebiete betreffen.
Weitere Erläuterungen finden Sie auf den Seiten 5 und 6 und in einem ausführlichen Video.

Die Aufgaben sind nach den Prüfungsgebieten Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra gegliedert, was den Schülerinnen und Schülern ein gezieltes Üben ermöglicht.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.
Dem neuen Abiturmodus wird durch eine Vielzahl von Aufgaben für Teil 1, der ohne Hilfsmittel bearbeitet werden muss, und für die Teile 2 – 4, bei denen Hilfsmittel zugelassen sind, Rechnung getragen.
Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist unterschiedlich, um den beruflichen Gymnasien aller Richtungen gerecht zu werden.
Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Da die Aufgabensammlung allen Schülerinnen und Schülern bei der **selbstständigen** Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind von den Autoren zu allen Aufgaben ausführliche und schülergerechte Lösungen erstellt worden. An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Zur Unterstützung des Lernerfolges sind **alle Hauptprüfungen ab 2016/2017** in einigen **Lernvideos** aufgearbeitet.
In der Sprache der Abiturientinnen und Abiturienten werden alle Aufgabenteile ausführlich gelöst.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der Abiturprüfung 2023 in Mathematik 5

I Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung 7

1 Übungsaufgaben 7
1.1 Analysis Übungsaufgaben 7
1.2 Stochastik Übungsaufgaben 13
1.3 Prozesse und Matrizen Übungsaufgaben 17
Lösungen Übungsaufgaben 22

2 Aufgabensätze Teil 1 ohne Hilfsmittel 39
Lösungen 2 Aufgabensätze Teil 1 ohne Hilfsmittel 52

II Teil der Abiturprüfung mit Hilfsmittel 64
Übungsaufgaben 64
Teil 2 Analysis – Anwendungsorientierte Analysis 64
Teil 3 Stochastik 78
Teil 4 Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse 86
Lösungen Übungsaufgaben 95

III Musteraufgabensatz zur Abiturprüfung 122
Aufgabensatz 1 123
Lösungen Aufgabensatz 1 132

IV Abiturprüfungen am beruflichen Gymnasium 144
Hauptprüfung 2016/2017 144
Lösungen Hauptprüfung 2016/2017 153
Hauptprüfung 2017/2018 161
Lösungen Hauptprüfung 2017/2018 170
Hauptprüfung 2018/2019 182
Lösungen Hauptprüfung 2018/2019 191
Hauptprüfung 2019/2020 204
Lösungen Hauptprüfung 2019/2020 213
Hauptprüfung 2020/2021 225
Lösungen Hauptprüfung 2020/2021 237
Hauptprüfung 2021/2022 250
Lösungen Hauptprüfung 2021/2022 261

Ablauf der Abiturprüfung 2023 in Mathematik

www.mvurl.de/oxfg

Zu Beginn: SchülerIn erhält alle Aufgabenteile (1 bis 4), jedoch keine Hilfsmittel

Phase 1: Bearbeitung des hilfsmittelfreien Teils

Teil	Thema	Auswahl	Zeitrichtwert	Punkte
1	Analysis (50%) Stochastik (25%) Wahlgebiet: Vektorgeometrie/Matrizen (25%)	keine	90 min	30

Nach endgültiger Abgabe von Teil 1 erhält SchülerIn die Hilfsmittel

- SchülerIn erhält **eine Aufgabe** aus der Stochastik und **eine** aus dem Wahlgebiet. Die Lehrkraft wählt diese aus jeweils zwei Aufgaben aus.

Phase 2: Bearbeitung der Teile mit Hilfsmitteln (Taschenrechner + Merkhilfe)

Teil	Thema	Auswahl	Zeitrichtwert	Punkte
2	Analysis (ca. 67%)	keine	120 min	30
	Anwendungsorientierte Analysis (ca. 33%)	SchülerIn wählt **eine aus drei** Aufgaben		
3	**Entweder** Stochastik **oder**	SchülerIn wählt **eine aus zwei** vorgelegten Aufgaben	60 min	15
4	Vektorgeometrie/Matrizen			

Hinweise

- Die Prüfung dauert insgesamt maximal 270 Minuten.
  Die maximal erreichbare Punktzahl beträgt 75 Punkte.
- SchülerIn erhält **zwei Aufgaben entweder** aus der Stochastik oder aus dem Wahlgebiet (Vektorgeometrie oder Prozesse/Matrizen) vorgelegt. Die Auswahl (Stochastik oder Wahlgebiet) trifft die Lehrkraft

Aufgabenerstellung für die Abiturprüfung 2023 am Beruflichen Gymnasium

Prüfungsrelevante Stoffgebiete:

Schwerpunktmäßig beziehen sich die Aufgaben jeweils auf eine der entsprechenden Lehrplaneinheiten des Bildungsplans, in allen Aufgaben können aber auch Inhalte aus den anderen vier genannten LPE vorkommen:

Teil 1: Analysis
Stochastik
Lineare Algebra: Vektorgeometrie bzw. mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Teil 2: Analysis
Anwendungsorientierte Analysis

Teil 3: Stochastik

Teil 4: Lineare Algebra: Vektorgeometrie bzw. mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Prüfungsmodalitäten: Siehe Seite 5

Hinweise zu Teil 1:

Der Lehrkraft werden jeweils zwei Aufgaben aus der Stochastik und aus dem Wahlgebiet (entweder Vektorgeometrie oder Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen) vorgelegt. Die Lehrkraft wählt jeweils eine Aufgabe aus der Stochastik und eine Aufgabe aus dem Wahlgebiet aus.

Hinweise zu Teil 3 bzw. Teil 4:

Der Lehrkraft werden zwei Aufgaben aus der Stochastik und zwei Aufgaben aus dem Wahlgebiet (entweder Vektorgeometrie oder Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen) vorgelegt. Die Lehrkraft wählt entweder beide Aufgaben aus der Stochastik oder beide Aufgaben aus dem Wahlgebiet aus. Den Schülerinnen und Schüler werden diese zwei Aufgaben vorgelegt, davon wählen sie eine Aufgabe aus.
Für das Sachgebiet Analysis ist keine veränderte Auswahl vorgesehen.

Allgemeiner Hinweis:

Die Schülerinnen und Schüler erhalten alle Aufgabenteile zu Beginn der Prüfung. Dabei ist Teil 1 in einer Mappe und die Teile 2, und entweder Teil 3 oder Teil 4 in einer zweiten Mappe den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung zu stellen. Die zugelassenen Hilfsmittel für die Aufgabenteile 2, 3 und 4 werden genau dann ausgegeben, wenn Teil 1 in Form der Schülerlösung und des Aufgabenteils unwiderruflich abgegeben wurden.

I Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

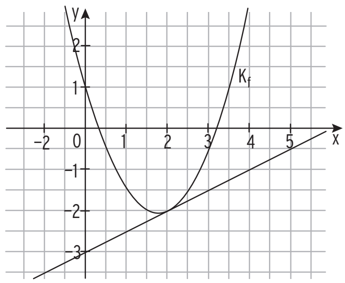
1 Übungsaufgaben

1.1 Analysis Übungsaufgaben

Lösungen Seite 22 - 24

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.
Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm.



Aufgabe 2

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$ besitzt einen Wendepunkt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

Aufgabe 3

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt $H(1 \mid 1)$ ist der Hochpunkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 4

K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{x-3} - 2$.
Die Tangente an K an der Stelle $x = 3$ schneidet die Asymptote von K in S.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx$.
Interpretieren Sie den Integralwert mithilfe geeigneter Flächenstücke.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Aufgabe 7 **Lösungen Seite 24/25**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4e^{2x} - 2$.

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(0{,}5) = -1$.

Aufgabe 8

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 1$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt S(0|1) begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Aufgabe 9

Die täglichen Heizkosten eines Hauses werden durch k(t) dargestellt.

Dabei ist t die Zeit in Tagen seit dem 1. Januar des Jahres.

Was bedeutet $\int_0^{90} k(t)dt$ bzw. $\frac{1}{90}\int_0^{90} k(t)dt$?

Aufgabe 10

Die Entwicklung der Gesamtkosten der Produktion von Fahrrädern kann durch die Funktion K mit $K(x) = 0{,}5x^3 - 8x^2 + 45x + 70$ mit $D_K = [0; 13]$ beschrieben werden.
Berechnen Sie das Minimum der variablen Stückkosten und interpretieren Sie ihr Ergebnis.

Aufgabe 11

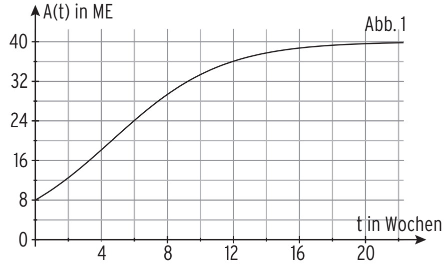
Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$.

Aufgabe 12

Abb. 1 zeigt den Gesamtabsatz eines Produktes in den ersten 20 Wochen nach Einführung.

a) Erläutern Sie, wie sich der Gesamtabsatz langfristig entwickeln wird.

b) Bestimmen Sie in etwa den Zeitpunkt, an dem die momentane Änderungsrate maximal ist. Kennzeichnen Sie diesen Zeitpunkt in der Abbildung.



Aufgabe 13 **Lösungen Seite 25/26**

Wenn das Medikament durch Tropfinfusion zugeführt wird, lässt sich die Wirkstoffmenge im Blut beschreiben durch die Funktion g mit

$$g(t) = 80 \cdot (1 - e^{-0{,}05t});\ t \geq 0$$

(t in Minuten seit Infusionsbeginn, g(t) in mg).

Welche Wirkstoffmenge wird sich langfristig im Blut befinden?

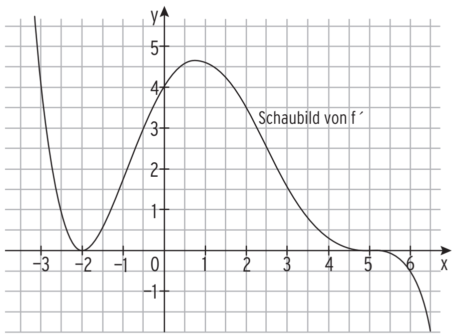
Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge im Blut ständig zunimmt.

Zu welchem Zeitpunkt beträgt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut $1\,\frac{\text{mg}}{\text{min}}$?

Aufgabe 14

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f. Geben Sie für jeden der folgenden Sätze an, ob er richtig, falsch oder nicht entscheidbar ist. Begründen Sie jeweils ihre Antwort.

1. Das Schaubild von f hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.
2. Das Schaubild von f hat für $-3 \leq x \leq 6$ genau zwei Wendepunkte.
3. Das Schaubild von f verläuft im Schnittpunkt mit der y-Achse steiler als die erste Winkelhalbierende
4. $f(0) > f(5)$



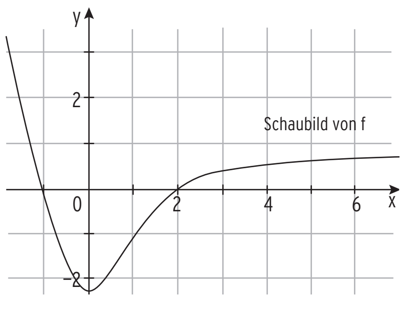
Aufgabe 15

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f. F ist eine Stammfunktion von f.

a) Welche Aussagen über F ergeben sich daraus im Bereich $-2 < x < 7$ hinsichtlich Extremstellen, Wendestellen, Nullstellen? Begründen Sie Ihre Antworten.

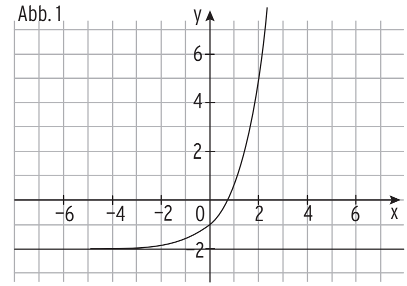
b) Begründen Sie, dass $F(6) - F(2) > 1$ gilt.

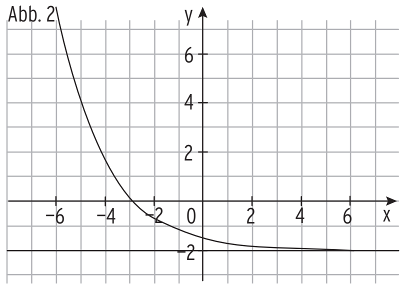
c) Bestimmen Sie näherungsweise: $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

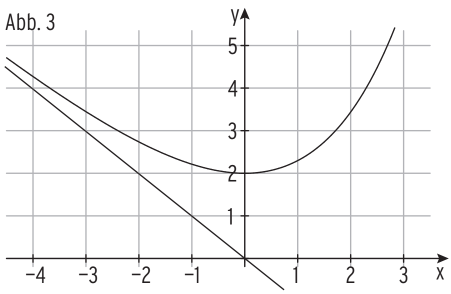


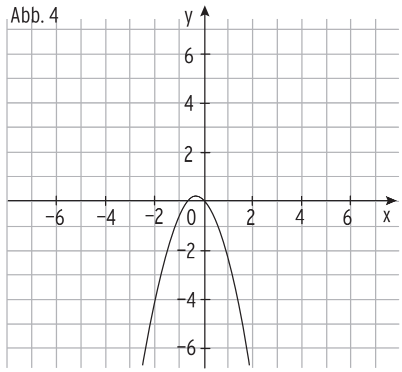
Aufgabe 16 **Lösungen Seite 26/27**

Gegeben sind die Schaubilder von vier Funktionen, jeweils mit sämtlichen Asymptoten.









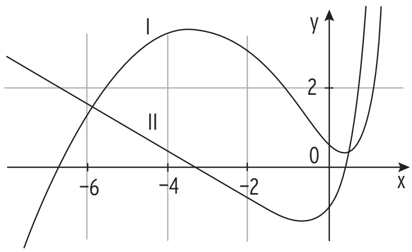
Drei dieser vier Schaubilder werden beschrieben durch die Funktionen f, g und h mit $f(x) = ae^{0,5x} - x$, $g(x) = -2 + be^{-0,5x}$, $h(x) = cx^2 - x$

a) Ordnen Sie den Funktionen f, g und h das jeweils passende Schaubild zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

b) Bestimmen Sie die Werte für a, b und c.

Aufgabe 17

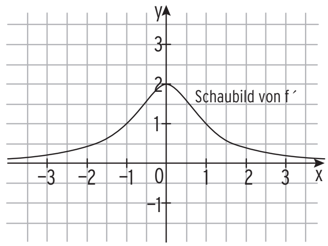
Die Abbildung zeigt die Graphen einer Funktion und der zugehörigen Ableitungsfunktion. Entscheiden Sie, welcher der Graphen I und II die Ableitungsfunktion darstellt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



Aufgabe 18 **Lösungen Seite 27**

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f. Welcher der folgenden Aussagen über die Funktion f sind wahr, falsch oder unentscheidbar ?

Begründen Sie Ihre Antworten.



1. f ist streng monoton wachsend für $-3 < x < 3$.
2. Das Schaubild von f hat mindestens einen Wendpunkt.
3. Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.
4. Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in [-3;3]$.

Aufgabe 19

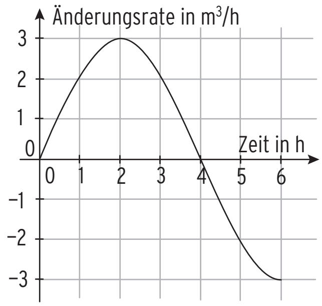
Eine nicht lineare Funktion h hat keine Nullstelle. Der Graph von h nähert sich für $x \to -\infty$ asymptotisch der Geraden mit der Gleichung $y = -3$.

Geben Sie einen möglichen Funktionsterm von h an und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen.

Aufgabe 20

Abbildung 1 stellt für einen Wassertank die Zufluss- bzw. Abflussrate (in $\frac{m^3}{h}$) von Wasser für einen Beobachtungszeitraum von sechs Stunden dar. Zu Beginn der Beobachtung enthält der Tank $2\ m^3$ Wasser.

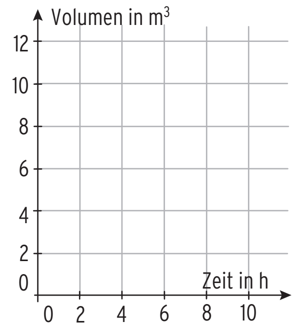
Abb. 1



a) Bestimmen Sie das Volumen des Wassers, das sich zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn im Tank befindet.

b) Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen, der die Entwicklung des Volumens des Wassers im Tank in Abhängigkeit von der Zeit darstellt.

Abb. 2

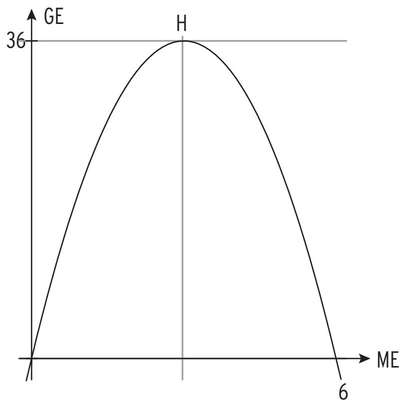


Aufgabe 21

Lösungen Seite 28/29

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm für die Erlösfunktion unter der Voraussetzung, dass es sich um eine ganzrationale Funktion 2. Grades handelt

b) Ergänzen Sie den Graphen der 1. Ableitung in das Koordinatensystem. Beschreiben Sie den Verlauf des Ableitungsgraphen mathematisch und ökonomisch.



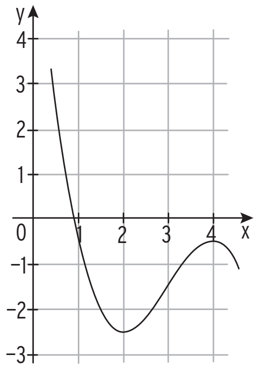
Aufgabe 22

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit

$f(x) = -0{,}5 \cdot x^3 + 4{,}5 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 7{,}5;\ x \in \mathbb{R}$.

1 Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Gleichung $0 = -0{,}5 \cdot x^3 + 4{,}5 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 7{,}5$ nur genau eine Lösung hat.

2 Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f.



Aufgabe 23

Das Rechteck ABCD mit A(− 2 | 0), B(2| 0), C(2 | 2) und D(− 2| 2) wird durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1;\ x \in \mathbb{R}$, in zwei Teilflächen zerlegt. Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.

Aufgabe 24

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = e^{4x}$ und $g(x) = e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass sich die Schaubilder der Funktionen f und g genau einmal schneiden.

Aufgabe 25

Bestimmen Sie die Stammfunktion von g mit $g(x) = 2e^{-4x} + 4x - 3;\ x \in \mathbb{R}$, deren Schaubild die y-Achse bei 6 schneidet.

1.2 Stochastik Übungsaufgaben

Lösungen Seite 29/30

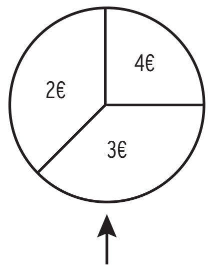
Aufgabe 1

a) Ein Fußballspieler verwandelt erfahrungsgemäß 80 % aller Strafstöße.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er von vier Strafstößen
- nur den letzten?
- mindestens einen?

b) Für ein Ereignis C gilt: $P(C) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}8^b \cdot a^2$
Geben Sie geeignete Werte für a, b und k an.
Beschreiben Sie das Ereignis C in Worten.

Aufgabe 2

Bei einem Glücksspiel wird das abgebildete Glücksrad benutzt. Als Einsatz bezahlt man 3 €. Das Glücksrad wird einmal gedreht. Man erhält den Betrag ausbezahlt, dessen Sektor über dem Pfeil zu stehen kommt. Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Gewinn des Spielers.



Aufgabe 3

Eine Urne enthält 5 rote, 3 weiße und 2 gelbe Kugeln.

a) Es werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man keine gelbe Kugel?

b) Nun werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden Kugeln die gleiche Farbe?

Aufgabe 4

Bei einer Lotterie führen 5 % der Lose zu einem Gewinn. Nils kauft 14 Lose.
Geben Sie jeweils eine Aufgabenstellung an, deren Lösung auf die folgende Weise berechnet wird.

a) $P(A) = \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

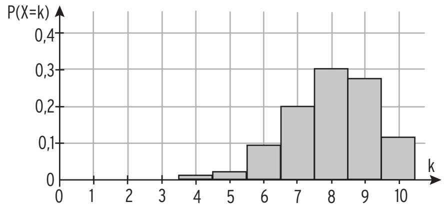
b) $P(B) = \binom{14}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{12} + \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

c) $P(C) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{14}$

d) $14 \cdot 0{,}05$

Aufgabe 5 **Lösungen Seite 30/31**

Ein Basketballspieler wirft 10 Freiwürfe. Die Anzahl seiner Treffer wird mit k bezeichnet und durch die Zufallsgröße X beschrieben. Die Zufallsgröße X wird als binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,8 angenommen. In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

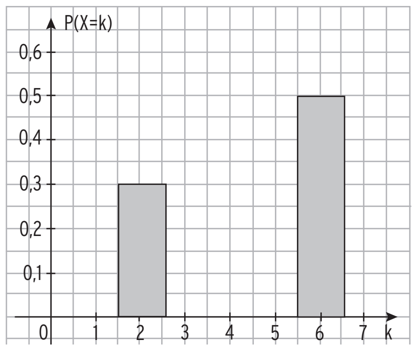


a) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Basketballspieler mindestens 8-mal trifft.

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, keinen Treffer zu erzielen, kleiner als $\frac{1}{1\,000\,000}$ ist.

Aufgabe 6

Für ein Zufallsexperiment wird eine Zufallsgröße X festgelegt, welche die drei Werte 2, 4 und 6 annehmen kann. In der Abb. ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X unvollständig dargestellt.



a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit P(X = 4) an. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

b) Das Zufallsexperiment wird zweimal unter gleichen Bedingungen durchgeführt. Dabei wird jeweils der Wert der Zufallsgröße notiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Produkt dieser beiden Werte den Wert 12 ergibt.

Aufgabe 7 **Lösungen Seite 31/32**

An einem Spielautomaten verliert man durchschnittlich zwei Drittel aller Spiele.

a) Formulieren Sie ein Ereignis A, für das gilt:

$$P(A) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

b) Jemand spielt vier Spiele an dem Automaten.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er dabei genau zwei Mal?

Aufgabe 8

Ein Glücksrad hat die Sektoren mit den Zahlen 1, 2 und 3 mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Sektor	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,3	0,5

Das Glücksrad wird zu folgendem Glücksspiel verwendet: Der Spieler zahlt zunächst 1 € Einsatz. Dann wird das Glücksrad dreimal gedreht. Sind die drei ermittelten Zahlen verschieden, bekommt der Spieler seinen Einsatz zurück. Kommt dreimal die „1“, erhält der Spieler 100 €. Sonst erhält er nichts.

Ist dieses Spiel fair?

Aufgabe 9

Die Zürla-Kohlin GmbH bezieht von einem Zulieferer seit Jahren selbstsichernde Muttern in großen Mengen, bei denen zwei Fehlerarten auftreten: Falsche Form und fehlerhaftes Gewinde.

Insgesamt sind nur 90 % aller Muttern fehlerfrei, d. h. sie haben weder eine falsche Form noch ein fehlerhaftes Gewinde. 5 % der Muttern haben eine falsche Form. 40 % der Muttern mit falscher Form haben auch ein fehlerhaftes Gewinde. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Mutter mit fehlerhaftem Gewinde auch ein falsche Form?

Aufgabe 10

Bei der laufenden Produktion sind erfahrungsgemäß 90 % der Bauteile einwandfrei. Zu Prüfzwecken wird eine Stichprobe entnommen.

1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

E_1: Die ersten zwei Bauteile sind einwandfrei.

E_2: Genau zwei der ersten drei Bauteile sind defekt.

2 Die Standardabweichung für die binomialverteilte Anzahl der defekten Bauteile in der Stichprobe beträgt $\sigma = 3$. Bestimmen Sie den Stichprobenumfang.

Aufgabe 11 **Lösungen Seite 32**

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}6$.

a) Welche der Abbildungen zeigt die Verteilung von X?
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

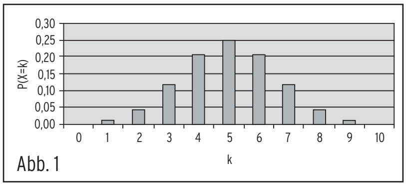


Abb. 1

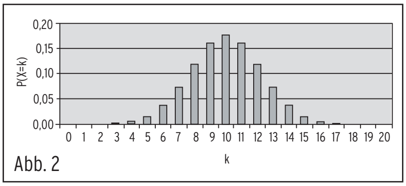


Abb. 2

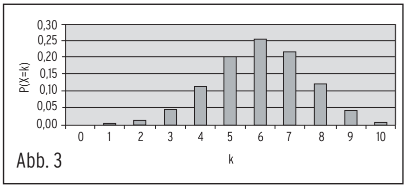


Abb. 3

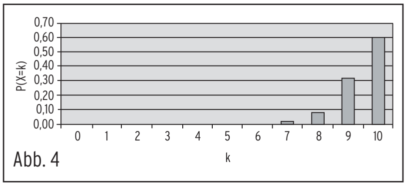


Abb. 4

b) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise $P(4 < X < 7)$
und $P(X \neq 5)$.

Aufgabe 12

Ein Basketballspieler übt Freiwürfe. Erfahrungsgemäß trifft er bei 80% seiner Würfe.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er mit den ersten beiden Würfen zweimal?
Geben Sie Ereignisse A und B an, so dass gilt:

$P(A) = 0{,}2^{10}$ $\qquad$ $P(B) = \binom{50}{40} \cdot 0{,}8^{40} \cdot 0{,}2^{10}$

Aufgabe 13

Erfahrungsgemäß sind 4 % der produzierten Smartphones eines Herstellers defekt. Ein Lieferant erhält ein Paket mit 50 Smartphones des Herstellers.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für höchstens ein defektes Smartphone?
Geben Sie einen Term an.

Aufgabe 14

Neun Spielkarten (vier Asse, drei Könige und zwei Damen) liegen verdeckt auf dem Tisch. Peter dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt liegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch.

B: Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch.

1.3 Prozesse und Matrizen Übungsaufgaben

Lösungen Seite 33/34

Aufgabe 1

Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Es gelte $\vec{v}_{i+1} = A \cdot \vec{v}_i$ mit $i \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\vec{v}_2$.

b) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit den kleinstmöglichen Werten x, y, z $\mathbb{N}^*$ so, dass $A \cdot \vec{w} = \vec{w}$ gilt.

c) Untersuchen Sie, ob es einen Zustandsvektor $w = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$ mit $x, z \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\vec{w} = A \cdot \vec{w}$ gilt.

Aufgabe 2

Betrachtet werden die Matrizen A und B mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ sowie eine Matrix C.

a) Zeigen Sie, dass B die zu A inverse Matrix ist.

b) Für die Matrix C gilt: $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

Begründen Sie, dass gilt: $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1{,}5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4300 \\ 4250 \\ 4950 \end{pmatrix}$$

Ersetzen Sie die Zahl 1,5, sodass das geänderte LGS eindeutig lösbar ist mit $x_2 = 800$.

Aufgabe 4

In einem mehrstufigen Prozess ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$C_{RE} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Die Produktion der Endprodukte erfolgt mit $\vec{m} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix}$.

Im Lager befinden sich noch die folgenden Rohstoffe: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 19 \end{pmatrix}$.

Die Rohstoffpreise pro Mengeneinheit werden durch den Vektor $\vec{k}_R = (2 \quad 3 \quad 2)$ angegeben.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Endprodukte, die durch den vollständigen Verbrauch der Rohstoffe hergestellt werden können.

b) Berechnen Sie die Rohstoffkosten für die Produktion von 3 ME E_1, 2 ME von E_2 und 1 ME von E_3.

Aufgabe 5 **Lösungen Seite 34/35**

Ein Fixvektor $\vec{v}$ einer Matrix M ist ein Vektor, für den gilt:

$$M \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad \text{mit } \vec{v} \neq \vec{0}\,.$$

Untersuchen Sie, ob es Werte gibt, sodass für die Matrix $N = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ a & 0{,}5 & 0{,}5 \\ b & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

und den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$ die Bedingungen I und II gelten.

I Der Vektor $\vec{w}$ ist ein Fixvektor der Matrix N.

II Die quadratische Matrix N ist stochastisch, d.h. alle Elemente sind nichtnegative reelle Zahlen und die Spaltensummen sind jeweils gleich 1.

Aufgabe 6

BioKosmetiKuss stellt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus pflanzlichen Rohstoffen Zwischenprodukte und aus diesen wiederum verschiedene Parfüms her. Die folgenden Matrizen beschreiben die Verflechtung:

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 \\ 15 & 23 & 13 \\ 10 & 17 & 7 \end{pmatrix};\ Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 4 & 1 & b \end{pmatrix};\ Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & c \end{pmatrix}.$$

a) Begründen Sie, welche Matrix die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix, die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix bzw. die Rohstoff-Endprodukt-Matrix ist.

b) Bestimmen Sie die produktionsbedingten Parameter a, b und c. Deuten Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Aufgabe 7

In einer Population von 100 Individuen vererbt jedes Individuum auf seinen einzigen Nachkommen ein bestimmtes Merkmal in den Ausprägungen A, B oder C.

Die Übergangsmatrix für diese Vererbung lautet: $M = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Dabei bedeuten z. B. die Einträge in der ersten Spalte der Matrix:

Von den Individuen mit Merkmalsausprägung A haben 20 % einen Nachkommen mit A, 80 % einen Nachkommen mit B und keines einen Nachkommen mit C.

Geben Sie eine Verteilung der Merkmalsausprägungen an, die in allen nachfolgenden Generationen stabil bleibt.

Aufgabe 8 **Lösungen Seite 36/37**

Gegeben ist die Matrix $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, die Matrix A besitzt eine Inverse.

b) Bestätigen Sie, dass $B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ die Inverse der Matrix A ist.

Aufgabe 9

Eine Firma stellt aus drei unterschiedlichen Rohstoffen vier Zwischenprodukte her. Aus den Zwischenprodukten entstehen in einer zweiten Produktionsstufe die Endprodukte E_1 und E_2.

Die Rohstoffkosten in GE für E_1 und E_2 betragen $(42{,}4 \quad 72{,}2)$, die Kosten in GE für die Fertigung von je einer ME der Zwischenprodukte und der Endprodukte sind durch folgende Vektoren gegeben: $\vec{k}_Z = (1 \quad 0{,}5 \quad 1 \quad 0{,}6)$; $\vec{k}_E = (6 \quad 8)$.

Für die Zwischenprodukt-Endproduktmatrix B gilt $B=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & 10\end{pmatrix}$.

Die Endprodukte sollen zu einem Preis am Markt angeboten werden, der mindestens 25% über den variablen Herstellkosten liegt.

Bestimmen Sie die Preisuntergrenze (in GE) für E_1 und E_2.

Aufgabe 10

1 Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$2x_3 = 2 \wedge x_1 + x_2 + x_3 = 2 \wedge x_2 - x_3 = 2$

2 Gegeben sind die Gleichungssysteme A und B:

A
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 12\\ -x_1 + x_2 &= -8\\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

B
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 12\\ -x_1 + x_2 &= -8\\ x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Entscheiden Sie, welches der Gleichungssysteme A und B nicht lösbar ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 11

Ein Unternehmen stellt aus drei Bauteilen B1, B2 und B3 zwei Endprodukte E1 und E2 her. Die Stückliste ist in der nebenstehenden Tabelle dargestellt.

	E1	E2
B1	1	2
B2	3	1
B3	0	2

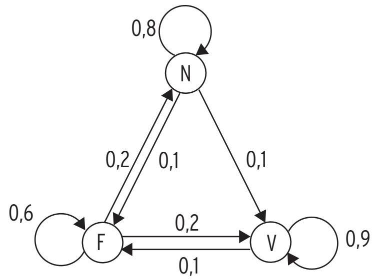
Aufgabe 11 (Fortsetzung) **Lösungen Seite 37/38**

1 Berechnen Sie den Materialbedarf an Bauteilen für einen Auftrag über 10 Stück von Endprodukt E1 und 15 Stück von Endprodukt E2.

2 Der Lagerbestand an Bauteilen beträgt 80 Stück von B1 und 80 Stück von B2 sowie 40 Stück von B3.
Bestimmen Sie die Anzahl der Endprodukte E1, die das Unternehmen mit diesem Lagerbestand maximal herstellen kann, wenn 20 Stück von E2 hergestellt werden.

Aufgabe 12

Die Nutzer einer Kantine werden hinsichtlich der Auswahl eines Menüs in drei Gruppen eingeteilt: Esser des Nudelgerichts (N), Esser des Fleischgerichts (F) und Esser des vegetarischen Gerichts (V).
Der abgebildete Graph gibt modellhaft die Übergänge zwischen den Gruppen von Tag zu Tag an. Es soll davon ausgegangen werden, dass die Gesamtanzahl der Nutzer der Kantine konstant bleibt.



1 Geben Sie die in der zugehörigen Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} \square & 0{,}1 & \square \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ \square & 0 & \square \end{pmatrix}$ fehlenden Werte an.

2 Bestimmen Sie den Wert a_{22} der Matrix $M^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

3 Interpretieren Sie die Bedeutung der zweiten Zeile der Matrix M^2 im Sachzusammenhang.

Aufgabe 13

Es wird angenommen, dass sich in einem Restaurant die Übergangswahrscheinlichkeiten für die drei Menügruppen H, S und B nicht ändern.

Sie lassen sich beschreiben durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

Zeigen Sie, dass es dann eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt, die auf Dauer stabil bleibt.

2 Aufgabensätze Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabensatz A **Teil 1 ohne Hilfsmittel** **Lösungen Seite 52/53**

(30 Punkte)

Analysis **Punkte**

1.1 Erläutern Sie anhand einer Skizze, ob das Integral $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)dx$ größer, kleiner oder gleich Null ist. 3

1.2 Für eine Funktion f gilt: 4

(1) $f'(x) = 0$ für $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

(2) $f''(-2) = -3$

(3) $f''(1) = 3$

(4) $f(-2) = \frac{19}{3}$

(5) $f(1) = \frac{11}{6}$

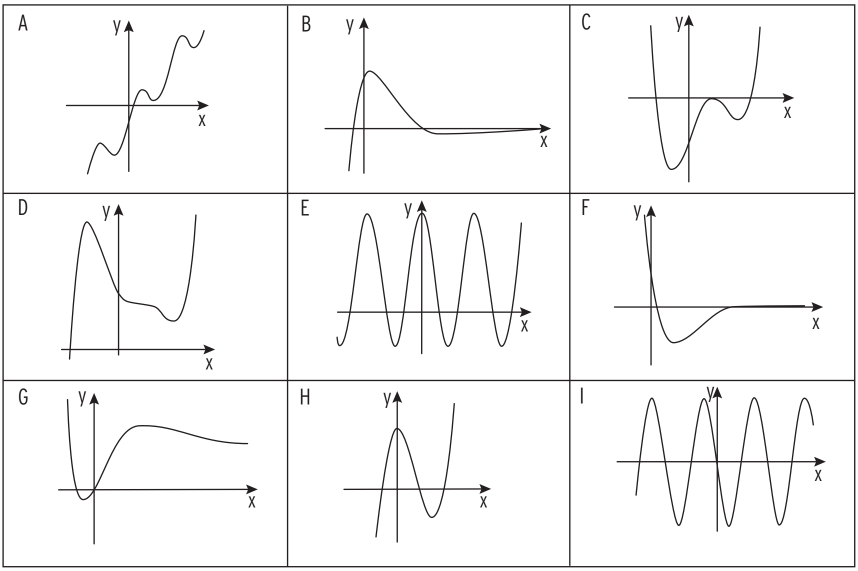
Welche Aussagen lassen sich daraus für das Schaubild von f treffen?

1.3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$. 4

Geben Sie die Periode von f an.

Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung $\cos(2x) = -1$.

1.4 Die Abbildungen zeigen Schaubilder von drei Funktionen sowie deren zugehörigen ersten und zweiten Ableitungen. Ordnen Sie jeweils dem Schaubild der Funktion das Schaubild ihrer ersten und zweiten Ableitung zu: 5



Aufgabensatz A Teil 1 ohne Hilfsmittel

Stochastik

Punkte

2.1 Eine Laplace-Münze wird dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man zweimal Zahl und einmal Bild? 2

2.2 Ein Würfel wird 20-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man zweimal die Augenzahl 3? Geben Sie eine Term an. 2

2.3 Bei einer Blutspendenaktion werden die Blutgruppen der Spender bestimmt. 2
Ein Ereignis ist: „In einer Gruppe von fünf Freunden hat niemand die Blutgruppe Null.“
Beschreiben Sie das Gegenereignis in Worten.

2.4 Die Zufallsvariable X hat folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung: 2

x_i	-3	-1	0	5
$P(X = x_i)$	0,2	u	w	0,2

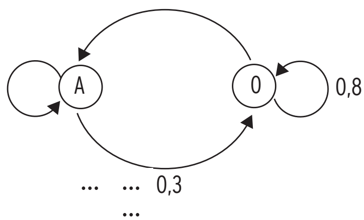
Der Erwartungswert von X beträgt 0,2.

Berechnen Sie u und w.

Matrizen und Prozesse

3.1 Die Kunden eines Getränkemarktes kaufen wöchentlich eine der beiden Fruchtsaftspezialitäten Apfelsaft (A) oder Orangensaft (O). Das Übergangsdiagramm beschreibt das Kaufverhalten der Kunden von einer Woche zur folgenden Woche. 3

Man nimmt an, dass sich das Kaufverhalten auf Dauer nicht verändert.



Geben Sie die vollständige Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 0{,}3 & 3 \end{pmatrix}$ an.

Erläutern Sie die Bedeutung der Elemente der Hauptdiagonale von M^2.

3.2 Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$. 3

Lösen Sie die Matrizengleichung $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{0}$;

E ist hierbei die zugehörige Einheitsmatrix.

30

Aufgabensatz B Teil 1 ohne Hilfsmittel Lösungen Seite 54/55

Analysis **Punkte**

1.1 Lösen Sie die Gleichung $3 - e^x = \frac{2}{e^x}$. 3

1.2 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x$ besitzt einen Wendepunkt. 3

Zeigen Sie, dass $y = x - \frac{4}{3}$ eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt ist.

1.3 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f. 6

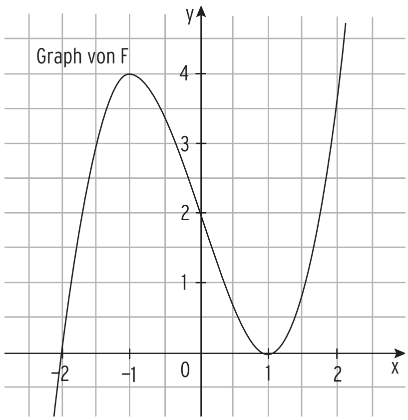
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f(1) = F(1)$

(2) $\int_0^2 f(x)dx = 4$

(3) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.

(4) $f(F(-2)) > 0$



1.4 Gegeben ist die in ℝ definierte Funktion $f(x) = \sin(x)$. Es gilt $\int_0^{0,5\pi} f(x)dx = 1$.

1.4.1 Geben Sie den Wert des Integrals $\int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} f(x)dx$ an. 1

1.4.2 Begründen Sie ohne Verwendung einer Stammfunktion, dass 2

$\int_0^{5\pi} f(x)dx = 2$ gilt.

1.4.3 Beschreiben Sie, wie der Graph der in ℝ definierten Funktion h mit 3

$h(x) = 1 + 2\sin(4x)$ aus dem Graphen von f hervorgeht.

Aufgabensatz B Teil 1 ohne Hilfsmittel

Stochastik

Punkte

2 Bei einem Glücksrad werden die Zahlen 1, 2, 3 und 4 beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt:

Zahl	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,1	0,3	0,2

2.1 Das Glücksrad wird einmal gedreht. Geben Sie verschiedene Ereignisse an, deren Wahrscheinlichkeit jeweils 0,7 beträgt. 2

2.2 An dem Glücksrad sollen nur die Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2 so verändert werden, dass das folgende Spiel fair ist: Für einen Eisatz von 2,50 € darf man einmal am Glücksrad drehen. Die angezeigte Zahl gibt den Auszahlungsbetrag in Euro an. Bestimmen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2. 4

Matrizen und Prozesse

3 Eine Firma produziert in einem ersten Schritt aus den Rohstoffen R_1 und R_2 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2. Daraus werden in einem zweiten Schritt die Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt. Den folgenden Tabellen ist zu entnehmen, wie viele Mengeneinheiten (ME) im jeweiligen Schritt zur Herstellung von jeweils einer ME der Zwischenprodukte bzw. Endprodukte verarbeitet werden:

	Z_1	Z_2
R_1	2	1
R_2	0	2

	E_1	E_2
Z_1	1	0
Z_2	1	2

3.1 Ermitteln Sie, wie viele ME von R_1 jeweils benötigt werden, um 50 ME von Z_1 sowie 100 ME von E_1 herzustellen. Bestimmen Sie die Tabelle, die den Zusammenhang von Rohstoffen und Endprodukten verdeutlicht. 3

3.2 Aufgrund einer Umstellung des Produktionsverfahrens ändert sich der Bedarf an R_1 für die Herstellung von Z_1 und Z_2. Dadurch werden für jede ME von E_1 nur noch zwei ME von R_1 und für jede ME von E_2 nur noch eine ME von R_1 benötigt. Bestimmen Sie für jedes der Zwischenprodukte Z_1 und Z_2, wie viele ME von R_1 zur Herstellung einer ME benötigt werden. 4

30

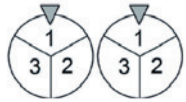
Aufgabensatz F Teil 1 ohne Hilfsmittel

Stochastik **Punkte**

2.1 Zwei Würfel, deren Seiten jeweils mit den Ziffern 1 bis 6 durchnummeriert sind, werden geworfen. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Augensumme drei ist. 2

2.2 Betrachtet werden die folgenden Zufallsgrößen X, Y und Z: 4

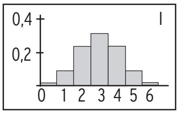
X: Augenzahl beim Werfen eines Würfels, dessen Seiten mit den Ziffern 1 bis 6 durchnummeriert sind.

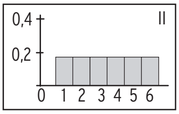


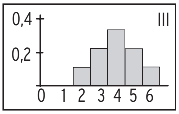
Y: Augensumme beim Drehen der beiden abgebildeten Glücksräder

Z: Anzahl der „Wappen" beim sechsmaligen Werfen einer Münze, deren Seiten „Wappen" bzw. „Zahl" zeigen.

Jede der Zufallsgrößen gehört zu einer der folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen I, II und III. Ordnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen den Zufallsgrößen zu und begründen Sie jede Ihrer Zuordnungen.







Matrizen und Prozesse

3 Eine Firma produziert in einem ersten Schritt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2. Daraus werden in einem zweiten Schritt die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt. Den folgenden Tabellen ist zu entnehmen, wie viele Mengeneinheiten (ME) im jeweiligen Schritt zur Herstellung von jeweils einer ME der Zwischenprodukte bzw. Endprodukte verarbeitet werden:

	Z_1	Z_2
R_1	2	6
R_2	4	4
R_3	6	2

	E_1	E_2	E_3
Z_1	5	2	8
Z_2	5	8	2

3.1 Ermitteln Sie, wie viele ME von R_3 insgesamt benötigt werden, um jeweils eine ME von E_1, E_2 und E_3 herzustellen. 3

3.2 Aufgrund von Lieferschwierigkeiten kann die Firma für R_3 nur noch auf einen Lagerbestand von 54 ME zurückgreifen. Berechnen Sie, wie viele ME von Zwischenprodukten noch produziert werden können, wenn die Anzahl der ME von Z_2 um 50% größer sein soll als die Anzahl der ME von Z_1. 3

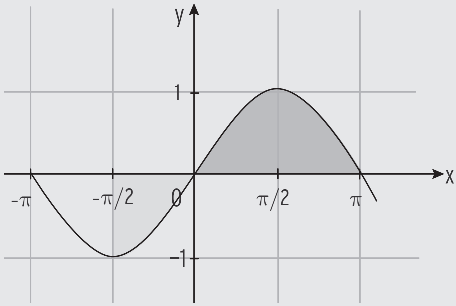
30

Lösungen 2 Aufgabensätze Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabensatz A Teil 1 ohne Hilfsmittel
Analysis

1.1 Skizze:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)dx > 0$$



Die Fläche oberhalb der x-Achse ist größer als die Fläche unterhalb der x-Achse. Daher ist der Integralwert positiv.

1.2 Bedeutung der einzelnen Bedingungen

(1) waagrechte Tangente in $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

(2) $x_1 = -2$ ist Maximalstelle

(3) $x_2 = 1$ ist Minimalstelle

(4) Kurvenpunkt $H(-2 \mid \frac{19}{3})$

(5) Kurvenpunkt $T(1 \mid \frac{11}{6})$

Aussagen über das Schaubild von f: Das Schaubild besitzt den Hochpunkt $H(-2 \mid \frac{19}{3})$ und den Tiefpunkt $T(1 \mid \frac{11}{6})$.

1.3 $f(x) = \cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$

Periode von f: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Lösung der Gleichung $\cos(2x) = -1$:

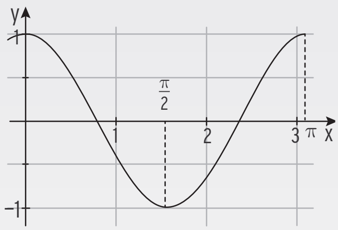
Substitution $2x = z$ ergibt $\cos(z) = -1$

Eine Lösung dieser Gleichung ist $z = \pi$.

Mit $2x = \pi$ ergibt sich $x = \frac{\pi}{2}$.

oder direkt aus einer Skizze:

Skizze von K_f:



1.4 Funktion	Schaubild von f	Schaubild von f′	Schaubild von f″
1.	A	E	I
2.	D	C	H
3.	G	B	F

Hinweis: Extremstellen von f sind Nullstellen von f′ mit VZW
Wendestellen von f sind Extremstellen von f′.

Aufgabensatz A Teil 1 ohne Hilfsmittel

Stochastik

2.1 B: Bild Z: Zahl mit $P(B) = P(Z) = 0{,}5$

Ereignis A: Zweimal Z und einmal B.

$P(A) = P(BZZ) + P(ZBZ) + P(ZZB) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$

2.2 X: Anzahl der Würfe mit AZ = 3 bei n = 20 Würfen; $P(AZ = 3) = \frac{1}{6}$

$P(X = 2) = \binom{20}{2} \cdot (\frac{1}{6})^2 \cdot (\frac{5}{6})^{18}$

2.3 Gegenereignis in Worten: In einer Gruppe von fünf Freunden hat mindestens eine Person die Blutgruppe null.

2.4 $E(X) = 0{,}2$

$-3 \cdot 0{,}2 + (-1) \cdot u + 0 \cdot w + 5 \cdot 0{,}2 = 0{,}2$ für $u = 0{,}2$

Ferner gilt für $u = 0{,}2$: $0{,}2 + 0{,}2 + w + 0{,}2 = 1$

Somit ist $w = 0{,}4$.

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

3.1 Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

Hinweis: Spaltensumme = 1; $m_{22} = 0{,}8$ aus dem Diagramm

Erläuterung: Die Elemente in der Hauptdiagonalen von M^2 geben die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Kunde zwei Wochen später wieder den gleichen Saft kauft.

3.2 $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

Matrizengleichung $(E - A) \cdot \vec{x} = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}6 \\ -0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}6 \\ -0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$ ergibt $0{,}2\,x_1 - 0{,}6\,x_2 = 0 \wedge -0{,}2\,x_1 + 0{,}6\,x_2 = 0$

Folglich gilt: $x_1 = 3\,x_2$

Eine Variable ist frei wählbar: $x_2 = r;\ r \in \mathbb{R}$.

Somit ergibt sich: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3r \\ r \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$.

Lösungen Aufgabensatz B **Teil 1 ohne Hilfsmittel**

Analysis

1.1 Gleichung $3 - e^x = \frac{2}{e^x} \quad | \cdot e^x$

$3e^x - e^{2x} = 2$

Substitution: $u = e^x$ $\quad 3u - u^2 - 2 = 0$ bzw. $u^2 - 3u + 2 = 0$

Lösung z. B. mit Formel: $u_1 = 1;\ u_2 = 2$

Rücksubstitution: $u_1 = e^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0$

$u_2 = e^x = 2 \Rightarrow x_2 = \ln(2)$

1.2 $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x;\ f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1;\ f''(x) = -x + 2;\ f'''(x) = -1$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $\quad x = 2$

Mit $f(2) = \frac{2}{3}$ und $f'''(2) = -1 \neq 0$ ergibt sich der Wendepunkt $W(2 \mid \frac{2}{3})$

Punktprobe mit W in $y = x - \frac{4}{3}$: $\quad \frac{2}{3} = 2 - \frac{4}{3}$ wahr

$f'(2) = 1$ (Steigungen stimmen überein)

$y = x - \frac{4}{3}$ ist eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

1.3 (1) Die Aussage ist wahr;

T $(1 \mid 0)$ ist Tiefpunkt des Graphen von F, also gilt $F(1) = 0$

und auch $F'(1) = f(1) = 0$

(2 Die Aussage ist falsch; es ist $\int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0) = 4 - 2 = 2 \neq 4$

(3) Die Aussage ist wahr; F besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Wendestelle,

somit besitzt $F'' = f'$ eine Nullstelle in diesem Bereich

(4) Die Aussage ist falsch; $F(-2) = 0;\ f(F(-2)) = f(0) = F'(0) < 0$

1.4.1 Es gilt: $\int_0^{0,5\pi} f(x)dx = 1$; der Graph von f mit $f(x) = \sin(x)$ ist symmetrisch zu O.

$\int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} f(x)dx = 0$

1.4.2 Aus der Periodizität ($p = 2\pi$) von f folgt: $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0;\ \int_0^{5\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} f(x)dx$

Der Graph von f schneidet die x-Achse in 0 und in π und ist symmetrisch zu

$x = \frac{\pi}{2}$, also gilt $\int_0^{\pi} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^{0,5\pi} f(x)dx = 2$

Damit: $\int_0^{5\pi} f(x)dx = 2 \cdot 1 = 2$

II Teil der Abiturprüfung mit Hilfsmittel

Übungsaufgaben

Teil 2 Analysis – Anwendungsorientierte Analysis

Auszug aus der Merkhilfe

5 Analysis

Änderungsrate

Durchschnittliche / Mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_0; x_1]$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Momentane / Lokale Änderungsrate (Ableitung) an der Stelle x_0 $\quad f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Ableitungsregeln

Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Faktorregel	$f(x) = a \cdot u(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = a \cdot u'(x)$
Kettenregel	$f(x) = u(v(x))$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Spezielle Ableitungen / Stammfunktionen mit $C \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^k$	$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$	$F(x) = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} + C$ mit $k \neq -1$
$f(x) = e^{bx}$	$f'(x) = b \cdot e^{bx}$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot e^{bx} + C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin(bx)$	$f'(x) = b \cdot \cos(bx)$	$F(x) = -\frac{1}{b} \cdot \cos(bx) + C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos(bx)$	$f'(x) = -b \cdot \sin(bx)$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot \sin(bx) + C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$

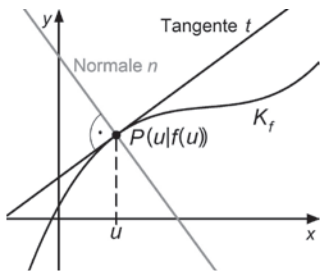
Tangente und Normale

Tangentensteigung $\quad m_t = f'(u)$

Tangentengleichung $\quad y = f'(u)(x-u) + f(u)$

Normalensteigung $\quad m_n = \frac{-1}{f'(u)}$

Normalengleichung $\quad y = \frac{-1}{f'(u)}(x-u) + f(u)$



Auszug aus der Merkhilfe

Merkhilfe Mathematik für die Sekundarstufe II an beruflichen Schulen in Baden-Württemberg

Untersuchung von Funktionen und ihren Schaubildern

Symmetrie	K_f ist symmetrisch zur y-Achse K_f ist symmetrisch zum Ursprung	$f(-x)=f(x)$ für alle x $f(-x)=-f(x)$ für alle x
Monotonie	f steigt monoton im Intervall J f fällt monoton im Intervall J	$f'(x)\geq 0$ im Intervall J $f'(x)\leq 0$ im Intervall J
Krümmung	K_f ist im Intervall J linksgekrümmt K_f ist im Intervall J rechtsgekrümmt	$f''(x)\geq 0$ im Intervall J $f''(x)\leq 0$ im Intervall J
Hochpunkt	K_f hat den Hochpunkt $H\left(x_0 \vert f(x_0)\right)$	$f'(x_0)=0$ und VZW +/- von $f'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0)<0$
Tiefpunkt	K_f hat den Tiefpunkt $T\left(x_0 \vert f(x_0)\right)$	$f'(x_0)=0$ und VZW -/+ von $f'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0)>0$
Wendepunkt	K_f hat den Wendepunkt $W\left(x_0 \vert f(x_0)\right)$	$f''(x_0)=0$ und VZW von $f''(x)$ bei x_0 oder $f'''(x_0)\neq 0$

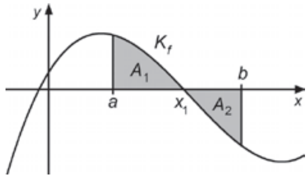
Berechnung bestimmter Integrale

$\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$, wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Flächenberechnung

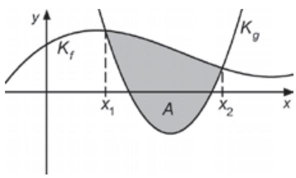
$$A_1=\int_a^{x_1} f(x)\,dx$$

$$A_2=-\int_{x_1}^{b} f(x)\,dx$$



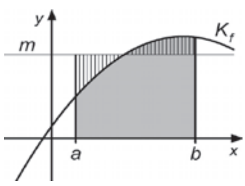
$$A=\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

falls $f(x)\geq g(x)$ für $x\in[x_1;x_2]$



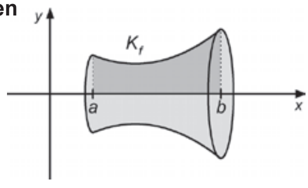
Mittelwert

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



Rotationsvolumen

$$V=\pi\cdot\int_a^b \left(f(x)\right)^2dx$$



Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht vollständig erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Analysis

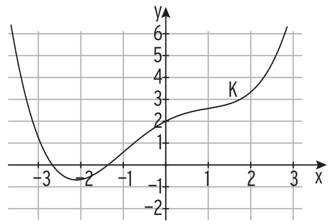
Aufgabe 1 **Lösungen Seite 96/97**

Punkte

1.1 Das Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades geht durch den Punkt $S(0 \mid 2)$ und hat den Wendepunkt $W(1 \mid \frac{31}{12})$. Die Normale im Punkt $P(-3 \mid \frac{5}{4})$ hat die Steigung $\frac{1}{5}$.
Stellen Sie ein LGS zur Bestimmung des Funktionsterms auf. — 5

1.2 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2;\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f heißt K .

1.2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von K. — 6
Zeigen Sie: Die Tangente an K im Schnittpunkt mit der y-Achse ist parallel zu der Geraden durch die Wendepunkte.



1.2.2 Die Gerade mit der Gleichung $y = x + 2$ schließt mit K zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie den Inhalt eines der beiden Flächenstücke. — 6
Markieren Sie die berechnete Fläche in einer Skizze.

1.3 C ist das Schaubild der Funktion h mit

$$h(x) = 3\sin(x - 3);\ x \in \mathbb{R}.$$

Wie entsteht das Schaubild C aus dem Schaubild der Funktion k mit $k(x) = \sin(x)$? — 5
Geben Sie zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, einen Hoch- und einen Tiefpunkt von C an.

20

Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Analysis
Aufgabe 2

Lösungen Seite 97/98

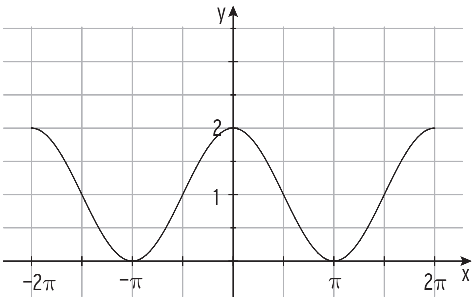
Punkte

2.1 Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = 3e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.

2.1.1 Das Schaubild von g, die beiden Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = 2{,}5$ begrenzen eine Fläche. Zeigen Sie, für den Inhalt dieser Fläche gilt $A = 3 - 3 \cdot e^{-2{,}5}$. 4

2.1.2 Die Fläche aus 2.1.1 rotiert um die x-Achse. Dabei entsteht ein Rotationskörper. Der Rotationskörper wird so durchbohrt, dass die Bohrachse mit seiner Symmetrieachse übereinstimmt. Diese Bohrung hat den Durchmesser 1. Welches Volumen hat der Restkörper? 6

2.2 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f mit $-2\pi < x < 2\pi$.



2.2.1 Begründen Sie anhand der Abbildung, welche der folgenden Aussagen falsch oder wahr sind. 5

- f ist monoton steigend.
- Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.
- Das Schaubild von f hat in $P(\frac{\pi}{2} \mid f(\frac{\pi}{2}))$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende.

2.2.2 Geben Sie einen Funktionsterm von f' an. 5

Die Schaubilder von f und f' schneiden sich auf der y-Achse.

Bestimmen Sie f(x).

20

Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Analysis

Aufgabe 3 Lösungen Seite 98 - 100

Punkte

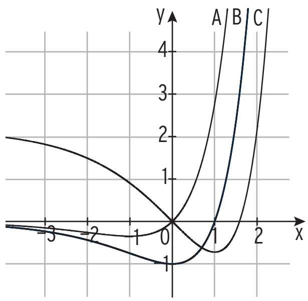
1.1 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = e \cdot x + e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f ist K .

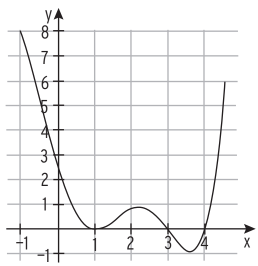
1.1.1 Die Gerade n ist die Normale von K im Schnittpunkt von K mit der y-Achse. Weisen Sie nach, dass es genau eine Tangente an K gibt, die parallel zu n verläuft. 4

1.1.2 Das Schaubild K berührt die x-Achse. Geben Sie den Berührpunkt an. 2

1.2 In der Abbildung sind die Schaubilder der Funktion h, ihrer Ableitungsfunktion h′ und einer Stammfunktion H von h eingezeichnet. Ordnen Sie die Schaubilder den Funktionen h, h′ und H zu und begründen Sie Ihre Entscheidung. 4



1.3 Die nebenstehende Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion g. Das Schaubild einer Stammfunktion G von g ist C_G.



1.3.1 Geben Sie alle Stellen an, an denen C_G einen Hochpunkt hat, und alle Stellen an, an denen C_G einen Tiefpunkt hat. Begründen Sie Ihre Angaben. 3

1.3.2 Begründen Sie für jede Aussage, ob sie wahr oder falsch ist. 7

(1) $g''(2) > 0$

(2) Im Intervall $[-1; 4{,}5]$ gibt es drei Stellen, an denen das Schaubild C_G die Steigung 4 hat.

(3) Das Schaubild von g' ist monoton fallend für $0 \leq x \leq 1$.

(4) $\int_2^4 g(x)\,dx < 1$

20

Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Analysis

Aufgabe 4 **Lösungen Seite 100/101**

Punkte

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -2x^2 \cdot (x - 3);\ x \in \mathbb{R}$.

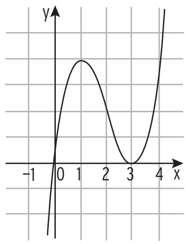
Das Schaubild von f ist K.

1.1 Eine der folgenden Abbildungen zeigt das Schaubild K. — 6

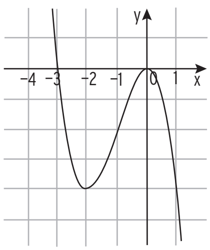
Untersuchen Sie für jede der Abbildungen, ob es sich um das Schaubild K handeln kann.

Skizzieren Sie das Schaubild K mit skalierter y-Achse.

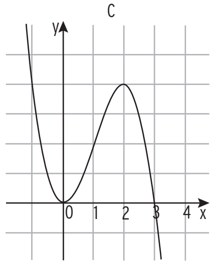
A



B



C



1.2 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die das Schaubild von f mit der x-Achse einschließt. — 5

1.3 Die Gerade mit der Gleichung $y = -4x + 8$ zerlegt die Fläche zwischen K und der x-Achse in zwei Teilflächen. — 5

Ermitteln Sie einen Term, mit dem der Inhalt einer der beiden Teilflächen berechnet werden kann und kennzeichnen Sie in Ihrer Skizze die von Ihnen gewählte Fläche.

1.4 Die Abbildung A zeigt das Schaubild einer Funktion g. — 4

Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. $g''(3) < 0$
2. Bei $x = 1$ hat g' einen Vorzeichenwechsel von + nach –.
3. An der Stelle $x = 2$ hat das Schaubild von g' einen Hochpunkt.
4. Die momentane Änderungsrate von g an der Stelle $x = 3$ ist größer als die durchschnittliche Änderungsrate im Intervall [1; 2].

20

Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Analysis

Aufgabe 5

Lösungen Seite 102/103

Punkte

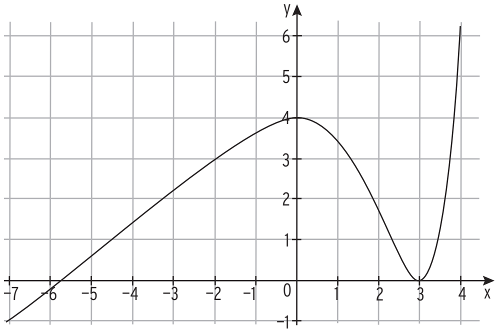
1.1 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion h mit der Definitionsmenge $[-7; 4]$. Die Funktion H ist eine Stammfunktion von h. Begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. 8

(1) H hat zwei Wendestellen.

(2) $h''(0{,}5)$ ist größer als $h''(3{,}5)$.

(3) Die Wertemenge von h' enthält nur Zahlen, die größer als -3 sind.

(4) Das Schaubild von h' ist überall rechtsgekrümmt.

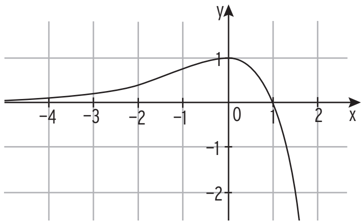


1.2 Gegeben ist die Funktion s mit $s(x) = \frac{1}{2}x + 1 + 2\sin(\frac{\pi}{4}x)$; $x \in \mathbb{R}$. 3

Das Schaubild von s ist C.

Untersuchen Sie, welche Werte die Steigung von C annehmen kann.

2 Die Abbildung zeigt den Graphen G der Funktion f mit $f(x) = (1 - x)\cdot e^x$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$.
Für die zweite Ableitung von f gilt $f''(x) = -(1 + x)\cdot e^x$.



2.1 Bestimmen Sie rechnerisch das Krümmungsverhalten von G. 3

2.2 Auf der y-Achse gibt es Punkte, die auf einer Tangente an G liegen. Geben Sie die y-Koordinaten dieser Punkte an und begründen Sie Ihre Angabe mithilfe des Verlaufs von G. 3

2.3 Für ein $a \in \mathbb{R}$ ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $F(x) = (a - x)\cdot e^x$ eine Stammfunktion von f. Bestimmen Sie den Wert von a. 3

20

Mathematik Abitur Teil 3 mit Hilfsmittel

Stochastik

Aufgabe 4

Lösungen Seite 114/115

		Punkte
4	Ein Unternehmen stellt Speicherbausteine her. Diese werden einer Qualitätskontrolle unterzogen, bei der 5 % als Ausschuss aussortiert werden.	
4.1	Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass von 50 Speicherbausteinen, die die Qualitätskontrolle durchlaufen, • keiner aussortiert wird • genau einer aussortiert wird • mindestens zwei aussortiert werden.	5
4.2	Die Qualitätskontrolle besteht aus zwei Stufen. In der ersten Stufe werden neunmal so viele Bausteine aussortiert wie in der zweiten Stufe. Für den laufenden Monat ist eine Produktionsmenge von 140000 Bausteinen geplant. Wie viele Bausteine werden in der ersten Stufe, wie viele in der zweiten Stufe der Qualitätskontrolle voraussichtlich aussortiert? Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Baustein, der die zweite Stufe durchläuft, aussortiert wird.	4
4.3	Aus langjähriger Erfahrung ist bekannt, dass 4,5 % aller produzierten Speicherbausteine defekt sind. Trotz Qualitätskontrolle werden nicht alle defekten Bausteine aussortiert. Erfahrungsgemäß ist einer von 1000 verkauften Bausteinen defekt. Zudem werden auch Bausteine aussortiert, die nicht defekt sind. Welcher Anteil nicht defekter Bausteine ist demnach im Ausschuss zu erwarten?	5
		15

Mathematik Abitur Teil 3 mit Hilfsmittel

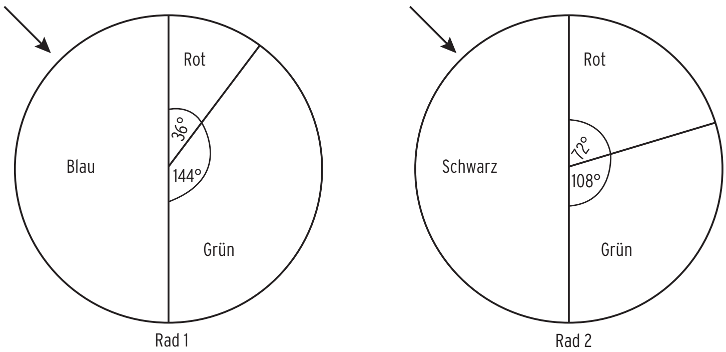
Stochastik

Aufgabe 5

Lösungen Seite 115/116

Punkte

5 Zwei Glücksräder sind in je drei verschiedenfarbige Sektoren eingeteilt (siehe Abbildung). Die Räder werden unabhängig voneinander in Drehung versetzt. Bei Stillstand zeigt ein Pfeil bei jedem Rad auf genau einen Sektor.



5.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: 7

E_1: Beide Pfeile zeigen auf Rot.

E_2: Es zeigt mindestens ein Pfeil auf Rot.

E_3: Beide Pfeile zeigen auf verschiedene Farben.

5.2 Es wird folgendes Glücksspiel angeboten:

Der Spieler darf jedes Rad einmal in Drehung versetzen.

Zeigen die Pfeile auf die gleiche Farbe, so erhält der Spieler 1 €.

Zeigt ein Pfeil auf Blau und der andere auf Rot, so erhält der Spieler 3,50 €.

In allen anderen Fällen erhält er nichts.

5.2.1 Welchen Einsatz muss der Spielanbieter verlangen, damit sein Gewinn pro Spiel durchschnittlich 50 Cent beträgt? 4

5.2.2 Wie oft muss ein Spieler mindestens spielen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens einmal eine Auszahlung von 3,50 € erhält, größer als 80 % ist? 4

15

Teil 4 Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Merkhilfe Mathematik für die Sekundarstufe II an beruflichen Schulen in Baden-Württemberg

8 Matrizen

Addition

Man kann Matrizen nur addieren, wenn sie in ihrer Zeilen- und Spaltenanzahl übereinstimmen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & r \cdot a_{12} \\ r \cdot a_{21} & r \cdot a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}$$

Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen ***A*** und ***B*** können nur dann miteinander multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl von ***A*** mit der Zeilenanzahl von ***B*** übereinstimmt.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen gilt: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$

Einheitsmatrix

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}$$

Inverse Matrix

Für eine invertierbare Matrix ***A*** und ihre Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ gilt: $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$

Potenz einer Matrix

Für eine quadratische Matrix ***A*** gilt: $\boldsymbol{A}^n = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{A}}_{n \text{ Faktoren}}$

Merkhilfe Mathematik für die Sekundarstufe II an beruflichen Schulen in Baden-Württemberg

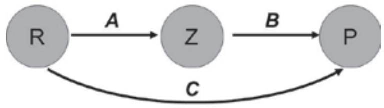
Produktionsprozesse

Ausgangszustand R; Zwischenzustand Z; Endzustand P

Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\boldsymbol{A}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{B}$

Rohstoff-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{C}$



Verbrauchs- und Produktionsvektoren

Rohstoffe $\vec{r}$, Zwischenprodukte $\vec{z}$, Endprodukte $\vec{p}$

$\vec{r} = \boldsymbol{A}\cdot\vec{z}$ $\quad\quad$ $\vec{z} = \boldsymbol{B}\cdot\vec{p}$ $\quad\quad$ $\vec{r} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\vec{p} = \boldsymbol{C}\cdot\vec{p}$

Kostenvektoren (variable Kosten pro Mengeneinheit)

Materialkosten $\overrightarrow{k_R}$, Fertigungskosten der Zwischenprodukte $\overrightarrow{k_Z}$,
Fertigungskosten der Endprodukte $\overrightarrow{k_P}$

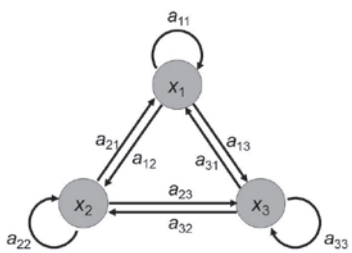
variable Herstellkosten (pro Mengeneinheit eines Endproduktes) $\overrightarrow{k_v} = \overrightarrow{k_R}\cdot\boldsymbol{C}+\overrightarrow{k_Z}\cdot\boldsymbol{B}+\overrightarrow{k_P}$

Gesamtkosten $K = \overrightarrow{k_v}\cdot\vec{p}+K_{fix}$

Übergangsprozesse

Übergangsmatrix zum nebenstehenden Übergangsgraph

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Stochastische Matrix	alle Elemente nicht negativ und Spaltensummen gleich 1
Aus Verteilung $\vec{x}$ wird Verteilung $\vec{y}$	$\boldsymbol{A}\cdot\vec{x} = \boldsymbol{A}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{y}$
Stabilitätsvektor $\vec{x}$	$\boldsymbol{A}\cdot\vec{x} = \vec{x}$
Zyklischer Prozess	$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{E}$ für ein $k > 1$

Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 117**

Punkte

1 Im April ist das Wetter am Bodensee äußerst wechselhaft. Erfahrungsgemäß folgt auf einen überwiegend regnerischen Tag (R) mit 10 % Wahrscheinlichkeit ein überwiegend sonniger Tag (S) und mit 30 % Wahrscheinlichkeit ein überwiegend trüber Tag (T). Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag wieder ein Sonnentag oder aber ein Regentag folgt, ist ebenfalls jeweils 30 %. Auf einen trüben Tag folgt mit 70 % Wahrscheinlichkeit ein Regentag, und mit 20 % Wahrscheinlichkeit bleibt es trübe.

1.1 Veranschaulichen Sie diese Informationen in einem Übergangsgraphen und ergänzen Sie die fehlenden Angaben. 5

1.2 Ein Online-Wetterdienst sagt für den 1. April 2016 für die Bodenseeregion voraus, dass es mit 30 % Wahrscheinlichkeit regnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die drei möglichen Wetterzustände am 2. April 2016, wenn der Online-Wetterdienst auch noch für den 1. April 2016 voraussagt, dass es mit 20 % Wahrscheinlichkeit sonnig ist. 5

2 Auf einer Mittelmeerinsel gilt für die drei Wetterzustände R, S und T im Juli die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

2.1 Interpretieren Sie die zweite Spalte dieser Matrix. 2

2.2 Nehmen Sie Stellung zu der Behauptung, dass auf dieser Insel ungewöhnlich stabile Wetterverhältnisse herrschen. 3

15

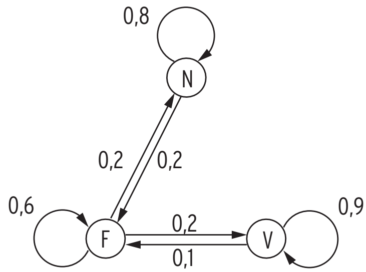
Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Aufgabe 2 **Lösungen Seite 117/118**

Punkte

2 Die Nutzer einer Kantine werden hinsichtlich der Auswahl eines Menüs in drei Gruppen eingeteilt: Esser des Nudelgerichts (N), Esser des Fleischgerichts (F) und Esser des vegetarischen Gerichts (V).
Der abgebildete Graph gibt modellhaft die Übergänge zwischen den Gruppen von Tag zu Tag an. Es soll davon ausgegangen werden, dass die Gesamtanzahl der Nutzer der Kantine konstant bleibt.



2.1 Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix M an. 3

2.2 Bestimmen Sie den Wert a_{22} der Matrix $M^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 1

2.3 Interpretieren Sie die Bedeutung der ersten Spalte der Matrix M^2 im Sachzusammenhang. 2

2.4 Täglich nutzen 200 Personen die Kantine zum Essen. Am Montag wählen 100 Personen das Gericht N, 60 Gericht F und 40 Gericht V. 4

2.4.1 Berechnen Sie die Verteilung am Mittwoch

2.4.2 Untersuchen Sie, ob es eine Verteilung $\vec{w}$ gibt, sodass $\vec{w} = M \cdot \vec{w}$ gilt. 5

15

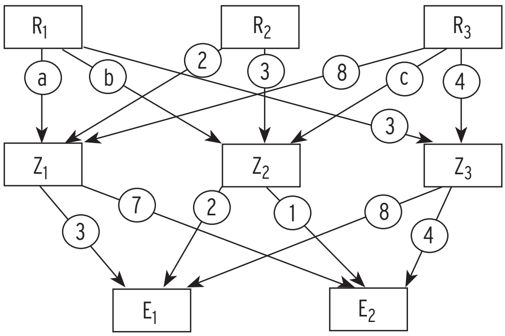
Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Aufgabe 3 **Lösungen Seite 118/119**

Punkte

3 Eine Firma produziert in einem ersten Schritt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3. Daraus werden in einem zweiten Schritt die Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt. Der Bedarf an Rohstoffen in Mengeneinheiten (ME) pro ME der Endprodukte ist durch folgende Matrix gegeben: $C = \begin{pmatrix} 46 & 45 \\ 12 & 17 \\ 70 & 79 \end{pmatrix}$. Das Materialflussdiagramm beschreibt den Bedarf an Rohstoffen pro ME der Zwischenprodukte und den Bedarf an Zwischenprodukten pro ME der Endprodukte.



3.1 Wie viele ME von R_1 sind notwendig, um eine ME von Z_1 herzustellen? Wie viele ME von R_1 und wie viele ME von R_3 werden für eine ME von Z_2 benötigt? — 6

3.2 Der Betrieb erhält einen Auftrag über 250 ME von E_1 und 300 ME von E_2.

3.2.1 Welche Rohstoffmengen werden zur Produktion dieses Auftrags benötigt? — 2

3.2.2 Für einen Auftrag über 250 ME von E1 und 300 ME von E2 betragen die Fixkosten 200 Euro. Der Erlös für diesen Auftrag beträgt 3000 Euro. Die Rohstoffkosten pro ME betragen 2 Cent für R_1, 3 Cent für R_2 und 4 Cent für R_3. Die Fertigungskosten in Cent je ME der Zwischenprodukte sind gegeben durch $\overrightarrow{k_Z} = (2 \quad 8 \quad 5)$, die Fertigungskosten in Cent je ME der Endprodukte durch $\vec{k}_E = (15 \quad 10)$. — 7

Soll die Firma diesen Auftrag ausführen? — $\overline{15}$

Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Aufgabe 4 **Lösungen Seite 119/120**

Lösungen Seite 119/120

Punkte

4 Professor Heise kennt aus Langzeitbeobachtungen die Studentinnen und Studenten des ersten Semesters:

• 60% derer, die in einer Vorlesung aktiv mitarbeiten, arbeiten auch in der nächsten Vorlesung aktiv mit. 10 % dieser aktiven fehlen in der nächsten Vorlesung.

• 40% derer, die an einer Vorlesung nur passiv teilnehmen, nehmen auch an der nächsten Vorlesung nur passiv teil. 20 % dieser passiven Studenten/innen fehlen in der nächsten Vorlesung.

• 30% derer, die nicht in eine Vorlesung kommen, kommen auch in die nächste Vorlesung nicht. 50 % derer , die nicht in eine Vorlesung kommen, verhalten sich in der nächsten Vorlesung passiv.

4.1 Veranschaulichen Sie diese Informationen in einem Übergangsgraphen und ergänzen Sie die fehlenden Angaben. Geben Sie die Übergangsmatrix A an. 5

4.2 In einer Vorlesung zählt Professor Heise, dass von den insgesamt 400 Studentinnen und Studenten nur drei Viertel gekommen sind und dass ein Zehntel der Anwesenden aktiv mitarbeitet. 6
Berechnen Sie die Anzahl der Aktiven und Passiven, die Professor Heise auf Grund seiner Zählung in der nächsten Vorlesung zu erwarten hat.

4.3 Die Potenzen der Übergangsmatrix A^n nähern sich für große n der 4
Matrix $G = \begin{pmatrix} 0{,}457 & 0{,}457 & 0{,}457 \\ 0{,}371 & 0{,}371 & 0{,}371 \\ 0{,}171 & 0{,}171 & 0{,}171 \end{pmatrix}$ an.
Begründen Sie, warum sowohl bei der Matrix A als auch bei der Matrix G die Spaltensummen exakt gleich 1 sein müssten.
Bestimmen Sie den Verteilungsvektor, den Professor Heise für seine 400 Studenten in seinen Vorlesungen langfristig näherungsweise zu erwarten hat. $\overline{15}$

Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Aufgabe 5 **Seite 1/2** **Lösungen Seite 120/121**

Punkte

5.1 Betrachtet wird die Entwicklung einer Population weiblicher Tiere eines Wildtierbestands in einem großen, abgeschlossenen Gebiet. Die Entwicklung dieser weiblichen Tiere lässt sich in drei Lebensphasen einteilen: Nachkommen werden im Frühjahr geboren und im ersten Lebensjahr als Kitze sowie im Alter von einem Jahr als Jungtiere bezeichnet; Tiere ab einem Alter von zwei Jahren gelten als erwachsen.
In einem Modell werden Zusammensetzungen der Population durch Vektoren der Form $\begin{pmatrix} K \\ J \\ E \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei K die Anzahl der Kitze, J die Anzahl der Jungtiere und E die Anzahl der erwachsenen Tiere bezeichnet. Zu Beginn der Beobachtung der Population wird deren Zusammensetzung durch einen Vektor $\vec{v}_0$ dargestellt. Die Entwicklung der Population von einem Jahr n zum nächsten Jahr lässt sich durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}65 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $A \cdot \vec{v}_n = \vec{v}_{n+1}$ beschreiben.

5.1.1 Stellen Sie die durch die Matrix A beschriebene Entwicklung in einem Übergangsdiagramm dar. 3
Geben Sie die Bedeutung des Werts 0,65 im Sachzusammenhang an.

5.1.2 Ein Jahr nach Beobachtungsbeginn lässt sich die Zusammensetzungen der Population im Modell durch folgenden Vektor darstellen: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 570 \\ 400 \\ 675 \end{pmatrix}$. 6
Berechnen Sie im Modell die Anzahl der Kitze, die Anzahl der Jungtiere und die Anzahl der erwachsenen Tiere bei Beobachtungsbeginn und zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn.

5.1.3 Aufgrund einer Krankheit halbiert sich die Überlebensrate der Kitze. 1
Bestimmen Sie die Matrix, die die Entwicklung der Population von einem Jahr zum nächsten Jahr nun im Modell beschreibt.

Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Aufgabe 5 **Seite 2/2**

5.2 Die folgenden Tabellen geben die Materialverflechtung in einem zweistufigen Produktionsprozess an, in dem aus Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und anschließend die Endprodukte E_1 und E_2 entstehen.

	Z_1	Z_2
R_1	1	0
R_2	3	1
R_3	2	a

	E_1	E_2
Z_1	4	b
Z_2	1	3

	E_1	E_2
R_1	4	2
R_2	c	9
R_3	12	16

5.2.1 Zeichnen Sie das Verflechtungsdiagramm. 2

5.2.2 Ermitteln Sie die fehlenden Werte für a, b und c. 3

15

Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Aufgabe 6 **Lösungen Seite 121**

Punkte

6 In einer Kleinstadt mit 70000 Einwohnern sollen die Baugebiete, die in 10 Perioden benötigt werden, ausgewiesen werden. Dazu benötigt der Stadtrat Erkenntnisse über die Bevölkerungswanderung und über die Wünsche in Bezug auf die Wohngebiete.
Die Stadt hat die Möglichkeit in der Nähe der Innenstadt (Innenstadtnähe W_1), in einem angrenzenden Waldgebiet (Naturwohngebiet W_2) und auf ehemaligen Feldern am Rand der Stadt (Neubaugebiet W_3) Baugebiete auszuschreiben. Ähnliche Wohngebiete existieren jetzt schon. Zurzeit lebt 10% der Bevölkerung in Innenstadtnähe, 35% in Naturwohngebieten und 55% der Bevölkerung in Neubaugebieten. Man geht davon aus, dass sich das Wechselverhalten in den betrachteten Perioden nicht ändert.

6.1 Um herauszufinden, welche Gebiete zu Baugebieten erklärt werden müssen, benötigt der Stadtrat Informationen über die Wechselneigungen der Menschen und die Daten der Bevölkerungsentwicklung in den einzelnen Wohngebieten von der Vorperiode bis zur übernächsten Periode. Als Grundlage dienen folgende zusätzliche Informationen: 12

von / nach	Innenstadtnähe W_1	Naturwohngebiet W_2	Neubaugebiet W_3
Innenstadtnähe W_1	0,5	b	0,1
Naturwohngebiet W_2	0,4	0,8	c
Neubaugebiet W_3	a	0,15	0,7

Berechnen Sie die fehlenden Werte a, b und c.
Ermitteln Sie für die geforderten Perioden die Bevölkerungszahlen für die drei Wohngebiete. Beschreiben Sie den Entwicklungsverlauf.

6.2 Überprüfen Sie, ob der $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}56 \\ 0{,}32 \end{pmatrix}$ die langfristige Entwicklung der Bevölkerungszahlen in den einzelnen Wohngebieten beschreibt. 3
Wie viel Einwohner der Kleinstadt leben langfristig gesehen in der Innenstadt?

15

Lösungen Übungsaufgaben

Mathematik Abitur Teil 2: Mit Hilfsmittel

Analysis Aufgabe 1 — Aufgabe Seite 66

1.1 Polynomfunktion 4. Grades: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$; $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

Bedingungen:		LGS:
Punkt S(0 | 2):	$f(0) = 2$	$e = 2$
Wendepunkt $W(1 \mid \frac{31}{12})$:	$f(1) = \frac{31}{12}$	$a + b + c + d + e = \frac{31}{12}$
	$f''(1) = 0$	$12a + 6b + 2c = 0$
$P(-3 \mid \frac{5}{4})$	$f(-3) = \frac{5}{4}$	$81a - 27b + 9c - 3d + e = \frac{5}{4}$
Normale mit Steigung $\frac{1}{5}$:	$f'(-3) = -5$	$-108a + 27b - 6c + d = -5$

-5 ist der negative Kehrwert von $\frac{1}{5}$.

1.2.1 $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2$; $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$; $f''(x) = x^2 - 1$; $f'''(x) = 2x$

Wendepunkte

Bedingung: $f''(x) = 0$ $\quad x^2 - 1 = 0$ für $x_{1|2} = \pm 1$

Mit $f'''(\pm 1) \neq 0$ und $f(1) = \frac{31}{12}$: $W_1(1 \mid \frac{31}{12})$; $f(-1) = \frac{7}{12}$: $W_2(-1 \mid \frac{7}{12})$

Tangente an K im Schnittpunkt mit der y-Achse: $f'(0) = 1$

Geraden durch die Wendepunkte: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{31}{12} - \frac{7}{12}}{1 + 1} = 1$

$\Big\}$ Die Geraden sind parallel.

1.2.2 Gerade: $y = x + 2$ (Tangente an K in $x = 0$)

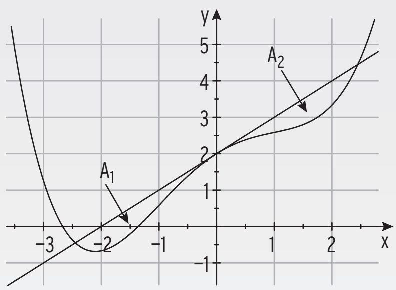
Schnittstellen: $f(x) = x + 2$

Vereinfachen: $\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = 0$

Ausklammern: $\frac{1}{12}x^2(x^2 - 6) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x_{1|2} = 0$; $x_{3|4} = \pm\sqrt{6}$

Fläche zwischen zwei Kurven heißt Integration über die Differenzfunktion.



Inhalt des Flächenstücks im 1. Quadranten:

$$\int_0^{\sqrt{6}} (f(x) - (x + 2))dx = \int_0^{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[\frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{6}} = -\frac{2}{5}\sqrt{6} \approx -0{,}98$$

Flächeninhalt $A = \frac{2}{5}\sqrt{6} \approx 0{,}98$ $(= A_2)$

Hinweise: $A_1 = A_2$; $\int_0^{\sqrt{6}} ((x + 2) - f(x))dx = 0{,}98$; Berechnung auch mit $\sqrt{6} = 2{,}45$

Lösungen Mathematik Abitur Teil 3 mit Hilfsmittel

Stochastik

Aufgabe 4 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 84**

4.1 X: Anzahl der aussortierten Bausteine; X ist binomialverteilt mit n = 50 und p = 0,05

$P(X = 0) = 0{,}95^{50} = 0{,}0769$ oder direkt mit WTR

$P(X = 1) = 50 \cdot 0{,}95^{49} \cdot 0{,}05 = 0{,}2025$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0{,}2794 = 0{,}7206$

4.2 Insgesamt werden voraussichtlich 140000 · 0,05 = 7000 Bausteine aussortiert. Die Anzahl der in der zweiten Qualitätskontrolle aussortierten Bausteine sei a. Dann werden in der ersten Stufe 9a Bausteine aussortiert. Somit gilt 9a + a = 7000. Diese Gleichung führt zu a = 700.
Der zu erwartende Ausschuss beträgt somit in der ersten Stufe 6300 Stück und in der zweiten Stufe 700 Stück.
In der zweiten Stufe werden daher nur noch 133 700 Bausteine untersucht.
Die Ausschussquote beträgt dort $\frac{700}{133700} = \frac{1}{191} \approx 0{,}0052$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Baustein in der zweiten Stufe aussortiert wird, beträgt ca. 0,0052.

4.3 Lösung mit Vierfeldertafel

	defekt	nicht defekt	
aussortiert		C	0,05
nicht aussortiert	A	B	1 − 0,05 = 0,95
	0,045	1 − 0,045 = 0,955	1

Bestimmt man die fehlenden Werte in der Reihenfolge A, B, C, so erhält man:

	defekt	nicht defekt	
aussortiert		$0{,}955 \cdot 0{,}94905$ $= 0{,}00595$	0,05
nicht aussortiert	$\frac{1}{1000} \cdot 0{,}95$ $= 0{,}00095$	$0{,}95 \cdot 0{,}00095$ $= 0{,}94905$	$1 - 0{,}05$ $= 0{,}95$
	0,045	0,955	1

Lösungen Mathematik Abitur Teil 3 mit Hilfsmittel

Stochastik

Aufgabe 4 **Seite 2/2**

4.3 $P_{\text{aussortiert}}(\text{nicht defekt}) = \dfrac{P(\text{aussortiert} \wedge \text{nicht defekt})}{P(\text{aussortiert})}$

$= \dfrac{0{,}00595}{0{,}05} = 0{,}119$

Im Ausschuss sind demnach ca. 12 % nicht defekte Bausteine zu erwarten.

Alternative: Lösung mit Baumdiagramm

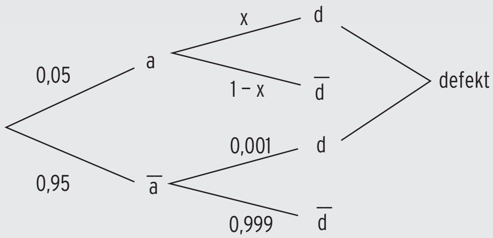
a: aussortiert

d: defekt

P(defekt) = 0,045

$P(x) = P_a(\text{defekt})$;

$P_a(\text{nicht defekt}) = 1 - x$



Bedingung für x: $0{,}045 = 0{,}05 \cdot x + 0{,}95 \cdot 0{,}001$

$x = 0{,}881$

$1 - x = 0{,}119 = 12\ \%$

Lösungen Mathematik Abitur Teil 3 mit Hilfsmittel

Stochastik Aufgabe 5 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 85**

5.1 Ereignisse: R_1: Pfeil 1 zeigt auf Rot — R_2: Pfeil 2 zeigt auf Rot

G_1: Pfeil 1 zeigt auf Grün — G_2: Pfeil 2 zeigt auf Grün

S: Pfeil zeigt auf Schwarz — B: Pfeil zeigt auf Blau

Rad 1: $P(B) = \frac{180}{360} = 0{,}5$; $P(R_1) = \frac{36}{360} = 0{,}1$; $P(G_1) = \frac{144}{360} = 0{,}4$

Rad 2: $P(S) = \frac{180}{360} = 0{,}5$; $P(R_2) = \frac{72}{360} = 0{,}2$ $P(G_2) = \frac{108}{360} = 0{,}3$

$P(E_1) = P(R_1) \cdot P(R_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$

$P(E_2) = 1 - P(\overline{R_1}) \cdot P(\overline{R_2}) = 1 - (0{,}9 \cdot 0{,}8) = 0{,}28$

Alternative: $P(E_2) = 1 - \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10}\right) = 0{,}28$

Alternative: $P(E_2) = 0{,}1 + 0{,}2 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}28$ (Additionssatz)

$P(E_3) = 1 - [P(R_1) \cdot P(R_2) + P(G_1) \cdot P(G_2)] = 1 - (0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3) = 0{,}86$

Lösungen Mathematik Abitur Teil 3 mit Hilfsmittel

Stochastik

Aufgabe 5 **Seite 2/2**

5.2.1 X: Auszahlung an den Spieler

	R_1 und R_2 oder G_1 und G_2	B und R_2	Sonstige
x_i	1 €	3,50 €	0 €
$P(X = x_i)$	$0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}14$	$0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$	0,76

$E(X) = 1 \cdot 0{,}14 + 3{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}49$

Der Spielanbieter muss durchschnittlich 49 Cent an den Spieler auszahlen.

Dies und sein gewünschter Gewinn von 50 Cent ergeben 99 Cent Einsatz.

Der Spielanbieter muss einen Einsatz von 99 Cent verlangen.

5.2.2 Ereignis E_4: Es erscheint die Kombination Blau/Rot (= Auszahlung 3,50 €).

$P(E_4) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$

Die Wahrscheinlichkeit, bei n Versuchen nie die Kombination Blau/Rot zu erzielen, beträgt $0{,}9^n$.

Berechnung über das Gegenereignis: $1 - 0{,}9^n > 0{,}8$

$0{,}9^n < 0{,}2$

$n > 15{,}27...$

Der Spieler muss mindestens 16-mal spielen.

oder:

X: Anzahl der Spiele mit Auszahlung 3,50 €

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) > 0{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) < 0{,}2$

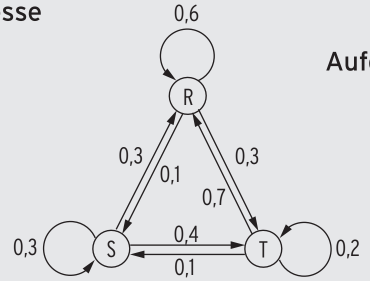
$0{,}9^n < 0{,}2$

$n > 15{,}27...$

Lösungen Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 88**



1.1
$$A = \begin{array}{c} \\ R \\ S \\ T \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R & S & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.2 Zustandvektor 1. April: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

Zustandvektor 2. April: $\vec{x}_2 = A \cdot \vec{x}_1 = A \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}59 \\ 0{,}14 \\ 0{,}27 \end{pmatrix}$

Am 2. April wird es mit 59 % Wahrscheinlichkeit regnen, mit 14 % Wahrscheinlichkeit wird die Sonne scheinen und mit 27 % wird es trübe sein.

2.1 Die zweite Spalte der Übergangsmatrix sagt aus, dass sich die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Tag nicht ändert. Auf einen Sonnentag folgt mit Sicherheit wieder ein Sonnentag.

2.2 $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5(r + t) \\ s \\ 0{,}5(r + t) \end{pmatrix}$

Die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Tag bleibt immer gleich. Wenn die Wahrscheinlichkeit für einen regnerischen Tag genau so groß ist wie für einen trüben Tag, dann bleiben auch diese Wahrscheinlichkeiten unverändert. Wenn sich die Wahrscheinlichkeiten für einen regnerischen Tag und für einen trüben Tag unterscheiden, dann sind sie am Folgetag gleich groß. Deshalb ändern sich die Wahrscheinlichkeiten für die drei Wetterzustände spätestens vom zweiten Tag an nicht mehr.
Da es sich aber um Aussagen über Wahrscheinlichkeiten handelt, bedeutet das nicht, dass es keinen Wechsel zwischen den drei Wetterzuständen geben kann.

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Aufgabe 2 **Aufgabe Seite 89**

2.1 $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ Von N, F, V nach N, F, V; Spaltensumme = 1

2.2 Die 2. Zeile von A multipliziert mit der 2. Spalte von A ergibt a_{22}:

$a_{22} = (0{,}2 \;\; 0{,}6 \;\; 0{,}1) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$

$a_{22} = 0{,}04 + 0{,}36 + 0{,}02 = 0{,}42$

Lösungen Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Aufgabe 2 **Seite 2/2**

2.3 Die drei Werte der ersten Spalte sind die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Kantinenbesucher, der das Gericht N wählt, bei seinem übernächsten Besuch das Gericht N, F oder V wählt.

2.4.1 Verteilung am Montag: $\begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 40 \end{pmatrix}$ Verteilung am Dienstag: $A \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92 \\ 60 \\ 48 \end{pmatrix}$

Verteilung am Mittwoch: $A \cdot \begin{pmatrix} 92 \\ 60 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85{,}6 \\ 59{,}2 \\ 55{,}2 \end{pmatrix}$

Am Mittwoch wählen 86 Kantinenbesucher das Gericht N, 59 das Gericht F und 55 das Gericht V.

2.4.2 $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $x + y + z = 200$

in Matrixform: $\begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & -0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & -0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}1 \end{pmatrix}$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar mit $z = r$;

Einsetzen ergibt $y = 0{,}5r$ und $x = 0{,}5r$. Mit $x + y + z = 200$ erhält man durch

Einsetzen: $r = 100$ und damit: Stabile Verteilung: $\begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Aufgabe 3 **Seite 1/2** Aufgabe Seite 90

3.1 Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 8 & c & 4 \end{pmatrix}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

Es gilt $A \cdot B = C$ $\begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 8 & c & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 45 \\ 12 & 17 \\ 70 & 79 \end{pmatrix}$

Die Multiplikation ergibt ein LGS für a, b und c:

$3a + 2b + 24 = 46$	$3a + 2b = 22$	(1)
$24 + 2c + 32 = 70$	$c = 7$	(2)
$7a + b + 12 = 45$	$7a + b = 33$	(3)

Das LGS aus den Gleichungen (1) und (3) hat die Lösung: $a = 4$; $b = 5$

Man benötigt 4 ME von R_1, um eine ME von Z_1 zu produzieren.

Für eine ME von Z_2 werden 5 ME von R_1 und 7 ME von R_3 benötigt.

Lösungen Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Aufgabe 3 **Seite 2/2**

3.2.1 Es sei $\vec{p} = \begin{pmatrix} 250 \\ 300 \end{pmatrix}$ der Auftrag an E_1 und E_2.

Dann gilt für den Rohstoffvektor $\vec{r} = C \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 25000 \\ 8100 \\ 41200 \end{pmatrix}$

Man benötigt für diesen Auftrag 25000 ME von R_1, 8100 ME von R_2 und 41200 ME von R_3

3.2.2 Gesamtkosten für diesen Auftrag: $K = \vec{k}_v \cdot \vec{p} + K_f = (\vec{k}_R \cdot C + \vec{k}_Z \cdot B + \vec{k}_E) \cdot \vec{p} + K_f$

Variable Herstellkosten pro ME: $\vec{k}_v = (2\ \ 3\ \ 4)\begin{pmatrix} 46 & 45 \\ 12 & 17 \\ 70 & 79 \end{pmatrix} + (2\ \ 8\ \ 5)\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} + (15\ \ \ 10)$

$\vec{k}_v = (408\quad 457) + (62\quad 42) + (15\quad 10) = (485\quad 509)$

Gesamtkosten in Cent: $K = (485\quad 509)\begin{pmatrix} 250 \\ 300 \end{pmatrix} + 20000 = 293950$

Kein Verlust, falls Erlös $\geq$ Kosten: $300000 \geq 293950$

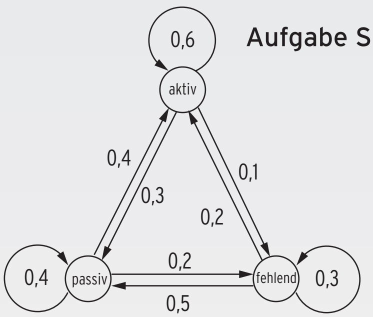
Die Firma kann den Auftrag annehmen.
Hinweis: 200 € entspricht 20 000 Cent.

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Aufgabe 4 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 91**

4.1 Übergangsgraph

Übergangsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$



Hinweis: In der 1. Spalte wird das Verhalten der aktiven Studenten (A) beschrieben: Aktiv (A) → Passiv (P) → Fehlen (F)

4.2 Es sind 300 Studentinnen und Studenten gekommen, von denen 30 aktiv mitarbeiten (von insgesamt 400).

Somit ist der aktuelle Verteilungsvektor $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 30 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix}$

Für die nächste Vorlesung ist dann der Verteilungsvektor $\vec{x}_1 = A \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 146 \\ 167 \\ 87 \end{pmatrix}$ zu erwarten.

Es sind 146 Aktive und 167 Passive zu erwarten.

Lösungen Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Aufgabe 4 **Seite 2/2**

4.3 In einer Spalte der Matrix A oder der Matrix G stehen die Anteile aus einer Gruppe, die sich auf die drei Gruppen neu verteilen, bei A im Abstand einer Vorlesung, bei G auf lange Sicht.

Da jede Gruppe vollständig umverteilt wird, muss die Summe der Anteile gleich 1 sein. (Abweichungen ergeben sich aus Rundungen.)

Die Spalten der Grenzmatrix sind identisch und entsprechen der stabilen Verteilung. Unabhängig von der Gesamtzahl 400 in %: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,457 \\ 0,371 \\ 0,171 \end{pmatrix}$

Langfristig hat er näherungsweise 183 Aktive (45,7 % von 400) ,

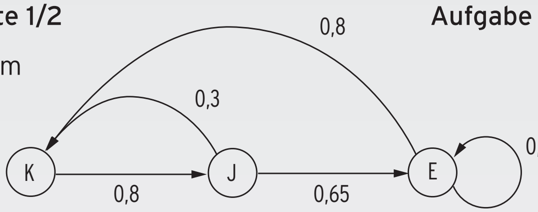
148 Passive (37,1 % von 400) 68 Fehlende (17,1 % von 400) zu erwarten.

Hinweis: Auch andere Rundungen (z. B. Abrundungen aus sachkontextualen Gründen) – sind auch möglich und zu akzeptieren.

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Aufgabe 5 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 92/93**

5.1.1 Übergangsdiagramm



Von einem Jahr zum nächsten überleben 65% der Jungtiere.

5.1.2 $A \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_2$ $\begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 0,8 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 570 \\ 400 \\ 675 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 660 \\ 456 \\ 800 \end{pmatrix}$

$A \cdot \vec{v}_0 = \vec{v}_1$ $\begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 0,8 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 570 \\ 400 \\ 675 \end{pmatrix}$ ergibt ein LGS mit $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$:

$0,8v_1 = 400 \Rightarrow v_1 = 500$
$0,3v_2 + 0,8v_3 = 570$
$0,65v_2 + 0,8v_3 = 675$ Subtraktion ergibt $0,35v_2 = 105 \Rightarrow v_2 = 300$

Einsetzen in z.B. $0,3v_2 + 0,8v_3 = 570$ ergibt $v_3 = 600$

Anfangsverteilung $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 600 \end{pmatrix}$

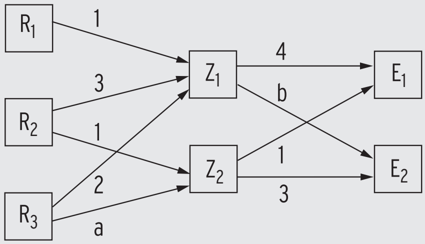
5.1.3 $\begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 0,8 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0,8 \end{pmatrix}$

Lösungen Mathematik Abitur Teil 4 mit Hilfsmittel

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

Aufgabe 5 **Seite 2/2**

5.2.1 Verflechtungsdiagramm:



5.2.2 Aus der Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 13 & 3b+3 \\ 8+a & 2b+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ c & 9 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

erhält man: $8 + a = 12 \Rightarrow a = 4$

$3b + 3 = 9 \Rightarrow b = 2$ (auch direkt)

$c = 13$

Probe in $2b + 3a = 16$ ergibt eine wahre Aussage.

Aufgabe 6 **Aufgabe Seite 94**

6.1 Fehlende Werte berechnen

Es handelt sich um stochastische Angaben, d. h. die Spaltensumme muss 1 sein.

$a = 1 - 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1$

$b = 1 - 0{,}8 - 0{,}15 = 0{,}05$

$c = 1 - 0{,}7 - 0{,}1 = 0{,}2$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Bevölkerungszahlen ermitteln in dieser Periode: $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 7000 \\ 24500 \\ 38500 \end{pmatrix}$

Vorperiode $\vec{v}_0 = A \cdot \vec{v}_{-1}$ ergibt ein LGS

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7000 \\ 24500 \\ 38500 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}5 & 0{,}05 & 0{,}1 & 7000 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}2 & 24500 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}7 & 38500 \end{array}\right)$$

Auflösung: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}5 & 0{,}05 & 0{,}1 & 7000 \\ 0 & 0{,}2 & -2{,}6 & -129500 \\ 0 & -0{,}7 & -3{,}4 & -185500 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}5 & 0{,}05 & 0{,}1 & 7000 \\ 0 & 0{,}2 & -2{,}6 & -129500 \\ 0 & 0 & -25 & -1277500 \end{array}\right)$

$\vec{v}_{-1} = \begin{pmatrix} 2100 \\ 16800 \\ 51100 \end{pmatrix}$ Nächste Periode $\vec{v}_1 = A \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 8575 \\ 30100 \\ 31325 \end{pmatrix}$

Übernächste Periode $\vec{v}_2 = A \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 8925 \\ 33775 \\ 27300 \end{pmatrix}$

Entwicklungsverlauf beschreiben

Die Bevölkerungszahlen in Wohngebieten in Innenstadtnähe steigen in Zukunft langsam an. Die Bevölkerungszahlen in Neubaugebieten sinken. Die Bevölkerungszahlen in Naturgebieten steigen in Zukunft stark an.

6.2 Probe: $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}56 \\ 0{,}32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}56 \\ 0{,}32 \end{pmatrix}$ wahre Aussage

$\begin{pmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}56 \\ 0{,}32 \end{pmatrix}$ ist eine stabile Verteilung, da die Spaltensumme = 1 ist.

Langfristig leben 0,12 % von 70000 = 8400 Einwohner in der Innenstadt.

III Musteraufgabensatz zur Abiturprüfung

MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG

ABITURPRÜFUNG AM BERUFLICHEN GYMNASIUM IM SCHULJAHR 2022/2023

Hauptprüfung	**AUFGABEN FÜR DAS FACH**
2.5.1	**Mathematik (AG, BTG, EG, SGG, WG)**

Arbeitszeit	270 Minuten		
Hilfsmittel	**Teil 1:** Keine Hilfsmittel zugelassen. Die zugelassenen Hilfsmittel für die nachstehenden Aufgaben bekommt die Schülerin/der Schüler genau dann, wenn sie/er den ersten Teil unwiderruflich abgegeben hat. **Teil 2, Teil 3 und Teil 4:** Merkhilfe sowie eingeführter wissenschaftlicher Taschenrechner sind zugelassen.		
Stoffgebiet	**Teil 1**	Pflichtteile Analysis und Stochastik (je 1 Aufgabe) Wahlgebiete aus der Lineare Algebra: Vektorgeometrie (1 Aufgabe) oder Matrizen (1 Aufgabe)	S. 2 - 8
	Teil 2	Analysis (1 Aufgabe)	S. 9
		Anwendungsorientierte Analysis (3 Aufgaben)	S. 10 – 12
	Teil 3	Stochastik (2 Aufgaben)	S. 13 – 14
	Teil 4	Lineare Algebra: Vektorgeometrie (2 Aufgaben)	S. 15 – 16
		Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen (2 Aufgaben); 1 Arbeitsblatt	S. 17 – 19
Bemerkungen	In Teil 1 wählt die Fachlehrerin/der Fachlehrer zu dem Pflichtteil Analysis jeweils eine Aufgabe aus dem Pflichtteil Stochastik und eine Aufgabe aus dem unterrichteten Wahlgebiet aus. Es sind **alle drei** vorgelegten Aufgaben zu bearbeiten. In Teil 2 ist die Aufgabe 1 zu bearbeiten. Aus den Aufgaben 2, 3 und 4 wählt die Schülerin/der Schüler **eine** Aufgabe aus und bearbeitet sie. Die Fachlehrerin/der Fachlehrer wählt entweder beide Aufgaben aus der Stochastik (Teil 3) oder beide Aufgaben aus dem unterrichteten Wahlgebiet (Teil 4) aus. Den Schülerinnen und Schülern werden diese beiden Aufgaben vorgelegt. Davon wählt die Schülerin/der Schüler **eine** Aufgabe aus und bearbeitet sie. Sie sind verpflichtet, jeden Aufgabensatz umgehend auf seine Vollständigkeit zu überprüfen und fehlende Seiten der Aufsicht führenden Lehrkraft anzuzeigen. Jede Aufgabe ist mit einem neuen Blatt zu beginnen. Bei Verstößen gegen die angemessene Darstellungsform kann ein Punkteabzug erfolgen.		

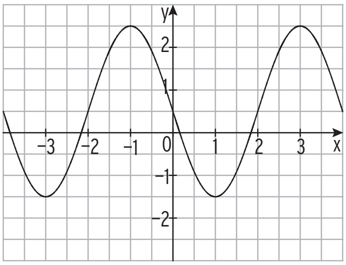
Aufgabensatz 1

Lösungen Seite 132 - 143

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis Punkte

1.1 Gegeben ist das folgende Schaubild einer Funktion: 6



Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = 0$ ist negativ.

b) Der Funktionswert an der Stelle $x = -2$ ist positiv.

c) Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = -3$ ist null.

d) Der Wert der zweiten Ableitung an der Stelle $x = 3$ ist positiv.

1.2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 6x;\ x \in \mathbb{R}$. 4
Berechnen Sie, an welchen Stellen das zugehörige Schaubild K eine waagerechte Tangente aufweist.

1.3 Die Funktion g hat die Eigenschaften: $g(3) = 0$ und $\int_0^6 g(x)dx = 0$ 4
Skizzieren Sie ein mögliches Schaubild von g und begründen Sie Ihre Vorgehensweise.

1.4 Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion ist symmetrisch zur y-Achse, verläuft durch den Punkt $S(0 \mid 3)$ und hat in $T(3 \mid 0)$ einen Tiefpunkt. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm an. 3

Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel

2 Stochastik | Punkte

Bei der Wintersportart Biathlon wird bei jeder Schießeinlage auf fünf Scheiben geschossen. Ein Biathlet tritt bei einem Einzelrennen zu einer Schießeinlage an, bei der er auf jede Scheibe einen Schuss abgibt. Diese Schießeinlage wird modellhaft durch eine Bernoullikette mit der Länge 5 und der Trefferwahrscheinlichkeit p beschrieben.

2.1 Gib für die folgenden Ereignisse A, B und C jeweils einen Term an, der die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in Abhängigkeit von p beschreibt. — 3

A: „Der Biathlet trifft bei genau vier Schüssen."
B: „Der Biathlet trifft nur bei den ersten beiden Schüssen."
C: „Der Biathlet trifft bei höchstens vier Schüssen."

2.2 Erläutere anhand eines Beispiels, dass die modellhafte Beschreibung der Schießeinlage durch eine Bernoullikette unter Umständen der Realität nicht gerecht wird. — 2

3 Lineare Algebra: Prozesse und Matrizen

3.1 Die monatliche Entwicklung einer Population mit den drei Stufen S_1, S_2 und S_3 wird beschrieben durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$.

3.1.1 Zeichnen Sie das zugehörige Übergangsdiagramm — 1

3.1.2 Zeigen Sie, dass sich die Verteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$ von Monat zu Monat wiederholt. — 2

3.1.3 Tim: „Es liegt also eine zyklische Populationsentwicklung mit einem einmonatigen Zyklus vor." Beurteilen Sie diese Aussage. — 2

3.2 Untersuchen Sie die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems. — 3

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 18 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned}$$

30

Aufgabensatz 1

Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 1

Analysis **Punkte**

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{x-1} - x$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild der Funktion f heißt K.

1.1 Zeichnen Sie das Schaubild K in ein Koordinatensystem ein. Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K an und zeichnen Sie diese ebenfalls ein. 5

1.2 Untersuchen Sie K auf Extrempunkte. 4

1.3 Das Schaubild K und die 2. Winkelhalbierende schließen mit der y-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = a$ für $a < 0$ eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a. Gegen welchen Wert strebt dieser Flächeninhalt für $a \to -\infty$? 4

2.1 Das zur y-Achse symmetrische Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades schneidet die y-Achse im Punkt $S(0|2)$, es hat an der Stelle $x = 1$ die Steigung -4 und einen Extrempunkt an der Stelle $x = \sqrt{2}$. Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm. 4

2.2 Zeigen Sie: Die Wendestelle einer Polynomfunktion 3. Grades liegt bei $x = -2$, wenn die Koeffizienten von x^3 und x^2 das Verhältnis $1:6$ haben. 3

Aufgabensatz 1

Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 2 Anwendungsorientierte Analysis — Punkte

Bei einem chemischen Experiment wird Wasserstoff hergestellt und in einem Standzylinder aufgefangen. Bei einer ersten Messung ergeben sich die folgenden Daten für die Zuwachsrate des Wasserstoffvolumens:

Zeit in min	1	2	3	4	5	6
Zuwachsrate in $\frac{ml}{min}$	13	10	6	4	3	2

2.1 Stellen Sie die Daten in einem Koordinatensystem dar. Wählen und begründen Sie einen geeigneten Funktionstyp und bestimmen Sie eine Näherungsfunktion. — 5

2.2 Die momentane Änderungsrate des Wasserstoffvolumens (in $\frac{ml}{min}$) wird durch die Funktion r beschrieben: $r(t) = 19e^{-0{,}343t}$; $t \geq 0$

2.2.1 Zu welchem Zeitpunkt liegt nur noch die halbe momentane Änderungsrate wie zu Beginn vor? — 2

2.2.2 Wie viele Minuten dauert es, bis 50 ml Wasserstoff entstanden sind? — 3

Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 3 Anwendungsorientierte Analysis — Punkte

In einem Gehege wird der Kaninchenbestand über einen längeren Zeitraum beobachtet. Die Auswertung dieser Beobachtung hat modellhaft folgende Bestandsfunktion ergeben: $k(t) = 1000 \cdot (1 - 0{,}85e^{-0{,}0513t})$; $t \geq 0$

Die Zeit t wird in Monaten gemessen und k(t) gibt den Bestand der Kaninchen zum Zeitpunkt t an.

3.1 Wann hat sich der Kaninchenbestand im Gehege, der zu Beginn der Beobachtung vorlag, verdreifacht? Wie wird im Funktionsterm berücksichtigt, dass der Bestand nicht beliebig groß wird? — 5

3.2 Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Kaninchenbestandes in Abhängigkeit von der Zeit t. Wann ist diese Änderungsrate am größten? — 3

3.3 Berechnen Sie die durchschnittliche Änderungsrate in den ersten 5 Monaten. — 2

Aufgabensatz 1

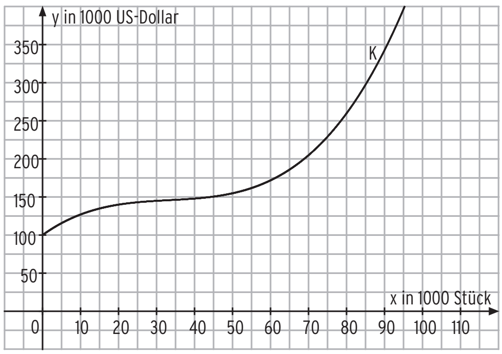
Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 4

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

Die Firma Fischer stellt speziell für die NASA entwickelte weltraumtaugliche Kugelschreiber her.
Die Produktionsgrenze der Firma liegt bei 100000 Kugelschreibern.
Es wird davon ausgegangen, dass alle produzierten Kugelschreiber auch verkauft werden.
Die Firma Fischer ist der alleinige Anbieter von weltraumtauglichen Kugelschreibern. Für den Erlös E(x) und die Gesamtkosten K(x) in US-Dollar gilt:
$E(x) = -100x^2 + 10000x$ und $K(x) = x^3 - 100x^2 + 3600x + 100000$.
Dabei ist x die Menge der Kugelschreiber in 1000 Stück.

4.1 Das Schaubild K der Gesamtkostenfunktion ist in das Koordinatensystem eingezeichnet. Zeichnen Sie ebenfalls das Schaubild der Erlösfunktion E ein. 3



Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Gesamtkosten.
Eine Verkaufsmenge, bei welcher die Firma Fischer Gewinn erzielt, liegt innerhalb der Gewinnzone. Geben Sie die Gewinnzone mithilfe des Koordinatensystems näherungsweise an.

4.2 Bestimmen Sie die Stückzahl, bei welcher der Gewinn maximal ist. Geben Sie den maximalen Gewinn in US-Dollar an. 5

4.3 Berechnen Sie den Preis, den die Firma Fischer bei einem Absatz von 4000 Stück für einen Kugelschreiber verlangen müsste, um keinen Verlust zu machen. 2

Aufgabensatz 1

Teil 3 mit Hilfsmittel

Aufgabe 1

Stochastik **Punkte**

Schmuggel von Zigaretten verursacht jedes Jahr hohe Steuerausfälle.
Um einen Überblick darüber zu bekommen, wie hoch der Anteil an unversteuerten Zigaretten ist, wird eine große Anzahl leerer Zigarettenschachteln gesammelt und auf das Vorhandensein von Steuerbanderolen überprüft.
In einer süddeutschen Großstadt hatten 10,7 % der Zigarettenschachteln keine Steuerbanderole.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dort von 40 zufällig in der Entsorgungsstation gesammelten Zigarettenschachteln — 5
1. genau 4 Schachteln keine Steuerbanderole haben;
2. mehr als die erwartete Anzahl Schachteln keine Steuerbanderole hat;
3. mindestens 3 und höchstens 5 Schachteln keine Steuerbanderole haben.

1.2 Bestimmen Sie, wie viele Zigarettenschachteln man mindestens einsammeln muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % mindestens eine Schachtel ohne Steuerbanderole erhält. — 4

1.3 In einer Lieferung von 100 Stangen Zigaretten befinden sich 8 Stangen unverzollter Zigaretten. Bei einer Kontrolle entnimmt der Zoll zufällig 5 Stangen nacheinander und untersucht diese. Wird dabei unverzollte Ware gefunden, wird die gesamte Lieferung beschlagnahmt. — 3
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung beschlagnahmt wird.

1.4 In einer großen Hafenstadt werden 200 leere Zigarettenschachteln zufällig dem Hausabfall entnommen und untersucht. Dabei werden 22 unverzollte Schachteln gefunden. — 3
Bestimmen Sie aufgrund der Stichprobe ein 90 %-Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil der unverzollten Zigarettenschachteln im Abfall.

$\overline{15}$

Aufgabensatz 1

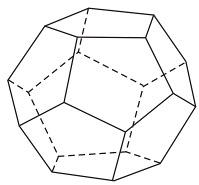
Teil 3 mit Hilfsmittel

Aufgabe 2

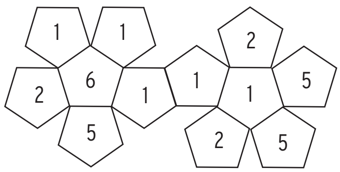
Stochastik

Punkte

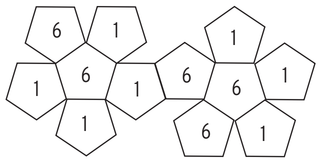
Zwei Dodekaeder werden als Spielwürfel verwendet. Ihre 12 Seiten sind wie unten abgebildet beschriftet. Es gilt stets die Zahl als geworfen, die auf der obersten Fläche zu sehen ist. Alle Seiten liegen mit derselben Wahrscheinlichkeit oben.



Dodekaeder



Seiten von Würfel I



Seiten von Würfel II

2.1 Würfel I wird viermal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: 6

A: Es tritt die Zahlenreihenfolge 5-6-2-2 auf.

B: Alle Zahlen sind verschieden.

Marc behauptet: Das Ereignis „alle Zahlen sind gleich“ ist das Gegenereignis von B. Nehmen Sie Stellung.

2.2 Würfel II wird viermal geworfen. 3

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei die Sechs häufiger auftritt als die Eins.

2.3 Jonas und Marc benutzen die beiden Würfel für ein Spiel. Jonas wirft Würfel I einmal, Marc wirft Würfel II einmal. 6
Gewonnen hat derjenige, dessen Würfel die höhere Zahl anzeigt.
Der Gewinner erhält vom Verlierer die höhere der geworfenen Zahlen in Euro ausgezahlt. Bei gleichen Zahlen endet das Spiel unentschieden und keine der beiden muss zahlen.
Prüfen Sie, für wen sich das Spiel langfristig lohnt.

15

Aufgabensatz 1

Teil 4 mit Hilfsmittel

Aufgabe 1

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Punkte

Der AW-Konzern produziert Personenkraftwagen seiner Marke an drei Standorten A , B und C. Um seine Wirtschaftlichkeit zu erhöhen, möchte das Unternehmen einen Teil der 2 400 Mitarbeiter, die in der Produktion am Standort A arbeiten, langfristig in die zwei anderen Standorte B und C verlegen.
Einige der nach Standort B und C versetzten Mitarbeiter sollen nach gewisser Zeit zurück zum Standort A kommen, um Wissenstransfer zu gewährleisten. Im Sinne einer langfristigen Personalentwicklungsplanung legt die Firma Quoten für den Wechsel der Standorte fest, die über mehrere Jahre stabil bleiben.

$$\begin{array}{ll} & \text{von} \quad \text{A} \qquad \text{B} \qquad \text{C} \\ \text{Nach} \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} & M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.1 Stellen Sie die Entwicklung der Mitarbeiterzahlen in einem Übergangsdiagramm dar. 7
Berechnen Sie die Verteilung auf die Standorte A, B und C nach zwei Jahren.

1.2 Untersuchen Sie, ob es eine Verteilung mit insgesamt 2 400 Mitarbeitern gibt, die im nächsten Jahr gleich bleibt. Falls ja, geben Sie diese Verteilung an. 5

1.3 Es gilt: $M^{20} = \begin{pmatrix} 0{,}250 & 0{,}250 & 0{,}250 \\ 0{,}256 & 0{,}256 & 0{,}244 \\ 0{,}494 & 0{,}494 & 0{,}506 \end{pmatrix}$. 2

Interpretieren Sie die Einträge der mittleren Zeile dieser Matrix.
Nehmen Sie an, dass der Prozess eine stabile Grenzmatrix aufweist.
Geben Sie gegebenenfalls Prognosen bezüglich der zukünftigen Verteilung der Mitarbeiter auf die Standorte ab.

15

Aufgabensatz 1

Teil 4 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Punkte

Die VELOTRITT GmbH stellt die Rahmen der Fahrradmodelle City und Tour in Eigenfertigung her. Um sich von der Konkurrenz abzuheben, werden für diese Rahmen jedes Jahr neue modische Lackierungen produziert. Dabei werden in einem zweistufigen Produktionsprozess zunächst aus den drei Ausgangsfarben R1, R2 und R3 die drei Modefarben Z1, Z2 und Z3 gemischt und aus diesen dann die Lackierungen für die Modelle City (E1) und Tour (E2) hergestellt.
Es gelten folgende Mengenbeziehungen (in ME) mit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

	Z1	Z2	Z3
R1	2	3	1
R2	0	2	2
R3	3	5	4

	E1	E2
Z1	1	2
Z2	3	7
Z3	a	5

	E1	E2
R1	13	b
R2	10	24
R3	26	61

2.1 Berechnen Sie die Zahlenwerte für a und b in den Tabellen mithilfe der Matrizenrechnung. 3

2.2 Im Folgenden seien a = 2 und b = 30.

2.2.1 Die VELOTRITT GmbH benötigt für einen Auftrag 15 ME der Lackierung E1 und 18 ME der Lackierung E2. 3
Berechnen Sie, wie viele ME der drei Modefarben Z1, Z2 und Z3 für diesen Auftrag erforderlich sind.

2.2.2 Für eine Sonderlackierung können im Rahmen eines alternativen Produktionsprozesses die Modefarben Z1, Z2 und Z3 auch entsprechend der folgenden Matrix gemischt werden: 9

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Wegen Sanierungsarbeiten am Boden der Lagerhalle muss das Rohstofflager kurzfristig geräumt werden. Der Lagerbestand von R1 beträgt 600 ME, der von R2 beträgt 800 ME und von R3 befinden sich noch 1600 ME im Lager.
Bestimmen Sie den ökonomisch sinnvollen Lösungsvektor, mit welchem der Lagerbestand im Rahmen des alternativen Produktionsprozesses ohne Rest aufgebraucht wird. Geben Sie eine sinnvolle Lösung an.

15

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe Seite 123

1 Analysis

1.1

a) Aussage wahr. Bei $x = 0$ fällt die Kurve.

b) Aussage wahr. Bei $x = -2$ befindet sich das Schaubild oberhalb der x-Achse.

c) Aussage wahr. Bei $x = -3$ hat das Schaubild einen Tiefpunkt mit Steigung 0.

d) Aussage falsch. Bei $x = 3$ ist das Schaubild rechtsgekrümmt, daher hat die zweite Ableitung hier einen negativen Wert.

1.2 $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 6x;\ x \in \mathbb{R};\ f'(x) = x^4 + x^2 - 6$

Stellen mit waagerechter Tangente

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\qquad x^4 + x^2 - 6 = 0$

Substitution: $(u = x^2)$ $\qquad u^2 + u - 6 = 0$

Lösungen in u: $\qquad u_{1|2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$

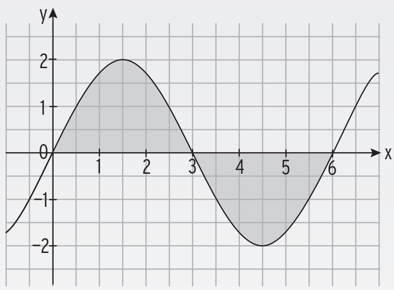
Lösungen der Gleichung in u: $\qquad u_1 = 2;\ u_2 = -3$

Lösungen in x: $\qquad u_1 = 2 \Rightarrow x_{1|2} = \pm\sqrt{2}$

Bei $x_{1|2} = \pm\sqrt{2}$ weist das Schaubild eine waagerechte Tangente auf.

1.3 $g(3) = 0$: Das Schaubild muss in $x = 3$ einen gemeinsamen Punkt mit der x-Achse aufweisen.

$\int_0^6 g(x)dx = 0$: Die „Flächenbilanz" muss Null ergeben, d.h. die Inhalte der Flächen zwischen Schaubild und x-Achse müssen ober- und unterhalb der x-Achse gleich groß sein.



Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

1.4 Aufgrund der Symmetrie zur y-Achse wird eine Kosinusfunktion verwendet:

$f(x) = a\cdot \cos(k\cdot x) + b$

Diese weist den Hochpunkt S(0 | 3) und den Tiefpunkt T (3 | 0) auf.
Man erhält:
Amplitude: $a = \frac{y_H - y_T}{2} = \frac{3-0}{2} = \frac{3}{2}$
Mittellinie: $b = \frac{y_H + y_T}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$
Zwischen dem Hoch- und Tiefpunkt liegt eine halbe Periodenlänge.

Die Periodenlänge p = 6 führt auf $k = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Möglicher Funktionsterm: $f(x) = \frac{3}{2}\cos(\frac{\pi}{3}x) + \frac{3}{2}$

2 Stochastik

Aufgabe Seite 125

2.1 X: Anzahl der Treffer, X ist $B_{5;\,p}$-verteilt

$P(A) = P(X = 4) = \binom{5}{4}\cdot p^4\cdot(1-p)^1 = 5\cdot p^4\cdot(1-p)$ mit $\binom{5}{4} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \binom{5}{1} = \frac{5}{1} = 5$

$P(B) = p^2\cdot(1-p)^3$ (Reihenfolge ist festgelegt)

$P(C) = P(X \leq 4) = 1 - P(5\text{ Treffer}) = 1 - p^5$

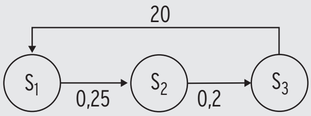
2.2 Eine Voraussetzung für eine Bernoullikette ist eine konstante Trefferwahrscheinlichkeit des Schützen. Dies ist in der Realität nicht gegeben, da der Biathlet beim ersten Schuss beispielsweise noch einen erhöhten Puls hat und damit möglicherweise eine geringere Trefferwahrscheinlichkeit. Zudem ist die Trefferwahrscheinlichkeit auch stets vom Wind abhängig, der sich permanent ändert.

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel

3 Matrizen und Prozesse — Aufgabe Seite 124

3.1.1 Übergangsdiagramm



3.1.2 Für eine stationäre Verteilung gilt $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Berechnung von $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$

Es gilt $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Somit wiederholt sich die gegebene Verteilung von Monat zu Monat.

3.1.3 Es gilt: $0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 20 = 1$.

Somit liegt hier eine zyklische Population mit
einem dreimonatigen und nicht mit einem einmonatigen Zyklus vor.
Jede beliebige Startverteilung wiederholt sich nach drei Monaten.

Nur bestimmte Verteilungen,beispielsweise $\begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$, wiederholen sich monatlich.

3.2 Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems in Matrixform

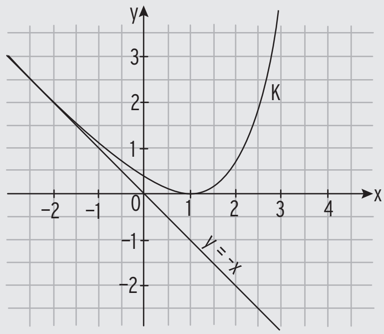
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 18 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Man erhält eine „Nullzeile“, ein Parameter ist frei wählbar. Das lineare Gleichungssystem ist also mehrdeutig lösbar
(besitzt unendlich viele Lösungen).

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1** **Aufgabe Seite 125**

Analysis

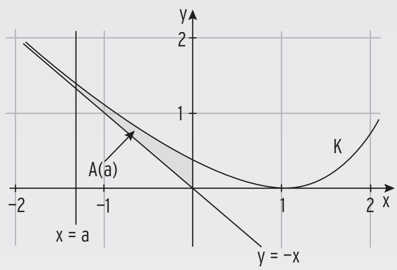


1 K: $f(x) = e^{x-1} - x$; $x \in \mathbb{R}$.

1.1 Schaubild K mit Asymptote:
Gleichung der schiefen Asymptote: $y = -x$
(für $x \to -\infty$)
($e^{x-1} \to 0$ für $x \to -\infty$)
Asymptote: zweite Winkelhalbierende

1.2 Extrempunkte
Ableitungen: $f'(x) = e^{x-1} - 1$; $f''(x) = e^{x-1}$
Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad e^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = 1$
Logarithmieren: $\quad x - 1 = 0$
Stelle mit waagrechter Tangente: $\quad x = 1$
Mit $f''(1) = e^0 = 1$ und $f(1) = e^0 - 1 = 0$ somit Tiefpunkt: $T(1|0)$

1.3 Inhalt der Fläche in Abhängigkeit von a:



$$A(a) = \int_a^0 (f(x) - (-x))dx = \int_a^0 e^{x-1}dx$$
$$= [e^{x-1}]_a^0 = e^{-1} - e^{a-1}$$

Für $a \to -\infty$ strebt der Flächeninhalt gegen e^{-1} ($e^{a-1} \to 0$)

2.1 Ansatz mit Hilfe der Symmetrieeigenschaft:
$p(x) = ax^4 + bx^2 + c$
Ableitung: $p'(x) = 4ax^3 + 2bx$
Bedingungen und LGS: $S(0|2)$: $p(0) = 2$ $\quad c = 2$
In $x = 1$ die Steigung -4: $p'(1) = -4$ $\quad 4a + 2b = -4$
Extrempunkt an der Stelle $x = \sqrt{2}$: $p'(\sqrt{2}) = 0$ $\quad 8\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}b = 0$

2.1 $8\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}b = 0$ lässt sich vereinfachen ($|: 2\sqrt{2}$) zu $4a + b = 0$

Das LGS, bestehend aus den Gleichungen $4a + 2b = -4$ und $4a + b = 0$,

hat die Lösung: $a = 1$ und $b = -4$

Man erhält den Funktionsterm $p(x) = x^4 - 4x^2 + 2$

2.2 Polynomfunktion 3. Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Ableitungen: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$; $f'''(x) = 6a \neq 0$

Die Wendestelle bei $x = -2$: $f''(-2) = -12a + 2b = 0$ für $b = 6a$

Die Koeffizienten von x^3 und x^2 haben das Verhältnis $a : 6a = 1 : 6$.

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2** Aufgabe Seite 126

Anwendungsorientierte Analysis

2.1 Am Schaubild wird deutlich, dass die Zuwachsrate exponentiell fällt und im weiteren Verlauf vermutlich asymptotisch gegen Null geht.

Exponentielle Regression am WTR ergibt:

$f(t) = 19{,}63 \cdot 0{,}682^t$

bzw. $f(t) = 19{,}63 \cdot e^{-0{,}382t}$

2.2 momentane Änderungsrate: $r(t) = 19e^{-0{,}343t}$; $t \geq 0$

2.2.1 Halbe momentane Änderungsrate wie zu Beginn = Halbwertszeit

Beim exponentiellen Zerfall gilt für die Halbwertszeit

die Formel: $t_H = \frac{-\ln(2)}{k} = \frac{-\ln(2)}{-0{,}343} = 2{,}02$

Alternative Berechnung ohne Formel: $r(t) = \frac{r(0)}{2}$

$$19e^{-0{,}343t} = \frac{19e^{-0{,}343 \cdot 0}}{2}$$

$$e^{-0{,}343t} = \frac{1}{2}$$

Logarithmieren: $t = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{-0{,}343} \approx 2{,}02$

Die Halbwertszeit beträgt etwa 2,02 min.

2.2.2 Der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve zur Funktion r und der t-Achse entspricht der Menge an entstandenem Wasserstoff.

Bedingung für x: $\int_0^x r(t)dt = 50$ $\int_0^x (19e^{-0{,}343t})dt = 50$

$$\left[\frac{19e^{-0{,}343t}}{-0{,}343}\right]_0^x = \frac{19e^{-0{,}343x}}{-0{,}343} - \frac{19}{-0{,}343} = 50$$

$$\frac{19e^{-0{,}343x}}{-0{,}343} = 50 - \frac{19}{0{,}343} = -5{,}39$$

$$e^{-0{,}343x} = 0{,}0974 \Rightarrow -0{,}343x = \ln(0{,}0974)$$

$$x = \frac{\ln(0{,}0974)}{-0{,}343}$$

Logarithmieren: $x \approx 6{,}79$

Es dauert ca. 6,79 min, bis 50 ml Wasserstoff entstanden sind.

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 3** **Aufgabe Seite 126**

Anwendungsorientierte Analysis

Bestandsfunktion $k(t) = 1000 \cdot (1 - 0{,}85 \cdot e^{-0{,}0513t})$; $t \geq 0$

3.1 Kaninchenbestand im Gehege zu Beginn: k(0) = 150

Dreifacher Bestand: 450

Bedingung: $k(t) = 450$ $\quad 1000 \cdot (1 - 0{,}85 \cdot e^{-0{,}0513t}) = 450$

$$1 - 0{,}85 \cdot e^{-0{,}0513t} = 0{,}450$$

$$0{,}85 \cdot e^{-0{,}0513t} = 0{,}550$$

$$e^{-0{,}0513t} = \frac{11}{17}$$

Logarithmieren: $\quad t = \dfrac{\ln(\frac{11}{17})}{-0{,}0513} \approx 8{,}49$

Nach ca. 8,49 Monaten hat sich der Anfangsbestand verdreifacht.

Für $t \to \infty$ strebt $e^{-0{,}0513t} \to 0$. Somit strebt $k(t) \to 1000 \cdot (1 - 0{,}85 \cdot 0) = 1000$

Das Schaubild besitzt die waagrechte Asymptote mit der Gleichung y = 1000.

Der Bestand von 1000 Kaninchen wird langfristig nicht überschritten, damit wird der Bestand nicht beliebig groß.

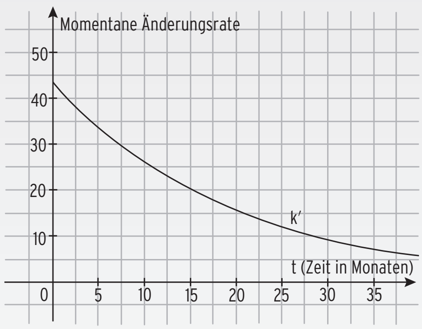
3.2 Momentane Änderungsrate des Kaninchenbestandes:

Die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt t entspricht der Ableitungsfunktion k′ von k: $k'(t) = 1000 \cdot (-0{,}85 \cdot (-0{,}0513) \cdot e^{-0{,}0513t})$

$$k'(t) = 43{,}605 \cdot e^{-0{,}0513t}$$

Änderungsrate am größten: $k'(0) = 43{,}605$; $k'(t) \to 0$ für $t \to \infty$

Das Schaubild von k′ ist streng monoton fallend. Die größte momentane Änderungsrate liegt demnach zu Beginn (t = 0) vor.



3.3 $\dfrac{k(5) - k(0)}{5 - 0} = \dfrac{342{,}3 - 150}{5} = 38{,}46$

Die durchschnittliche Änderungsrate (Zuwachs) in den ersten 5 Monaten beträgt ca. 38 Kaninchen pro Monat.

Lösungen Aufgabensatz 1

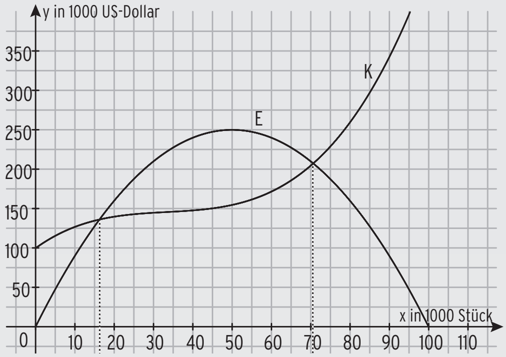
Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 4** **Aufgabe Seite 127**

Anwendungsorientierte Analysis

$E(x) = -100x^2 + 10000x$ und $K(x) = x^3 - 100x^2 + 3600x + 100000$

4.1 Schaubild K der Gesamtkostenfunktion

Schaubild der Erlösfunktion E



Gewinnzone näherungsweise:

$x_{GS} = 16{,}3$ (16300 Stück);

$x_{GG} = 70{,}5$ (70500 Stück)

(Näherungslösung ist ausreichend.)

4.2 Gewinn maximal

Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x)$

$$G(x) = -100x^2 + 10000x - (x^3 - 100x^2 + 3600x + 100000)$$

$$G(x) = -x^3 + 6400x - 100000$$

Ableitung: $G'(x) = -3x^2 + 6400$; $G''(x) = -6x$

Bedingung: $G'(x) = 0$ $\qquad -3x^2 + 6400 = 0$

$$x^2 = \frac{6400}{3}$$

Sinnvolle positive Lösung: $x = 46{,}19$

Maximaler Gewinn in US-Dollar: $G(46{,}19) = 97069$

Bei einer Stückzahl von ca. 46190 macht das Unternehmen den maximalen Gewinn von ca. 97069 US-Dollar.

4.3 Damit die Firma Fischer keinen Verlust macht, muss der Verkaufspreis pro Stück mindestens so hoch sein wie die Kosten pro Stück.

Kosten pro Stück bei 4000 Stück: $\frac{K(4)}{4000} = \frac{112864}{4000} = 28{,}22$

Die Firma Fischer müsste bei einem Absatz von 4000 Kugelschreibern mindestens 28,22 US-Dollar pro Stück verlangen, damit sie keinen Verlust macht.

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 3 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1** **Aufgabe Seite 128**

Stochastik

1.1 Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl an Zigarettenschachteln ohne Steuerbanderole an. X ist binomialverteilt mit p = 10,7% und n = 40.

1. $P(X = 4) = 0{,}2037$ (WTR)
2. Erwartete Anzahl: $E(X) = \mu = n \cdot p = 40 \cdot 0{,}107 = 4{,}28$

   $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0{,}5713 = 0{,}4287$
3. $P(3 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 2) = 0{,}7471 - 0{,}1837 = 0{,}5634$

1.2 Bei n Versuchen mindestens eine Schachtel ohne Steuerbanderole:

P(mit Steuerbanderole) = 1 − 0,107 = 0,893

P(mindestes eine ohne Steuerbanderole) $> 0{,}8$ entspricht

1 −P(alle mit Steuerbanderole) > 0,8 $\quad 1 - 0{,}893^n > 0{,}8$

$0{,}893^n < 0{,}2$

Lösung der Gleichung $0{,}893^n = 0{,}2$ ergibt $n = \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}893)} = 14{,}22$

Es müssen also mindestens 15 Schachteln eingesammelt werden.

1.3 Aus 100 Stangen (darunter 8 unverzollte) werden nacheinander 5 Stangen (S) ohne Zurücklegen entnommen.

P(mindestens eine unverzollte S) = 1 − P(keine unverzollte S)

$= 1 - \frac{92}{100} \cdot \frac{91}{99} \cdot \frac{90}{98} \cdot \frac{89}{97} \cdot \frac{88}{96} = 0{,}3468$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung beschlagnahmt wird, beträgt 0,3468.

1.4 90%-Vertrauensintervall:

$h = \frac{22}{200} = 0{,}11;\ n = 200;\ z = 1{,}64$

$$VI = \left[0{,}11 - 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}11 \cdot (1 - 0{,}11)}{200}};\ 0{,}11 + 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}11 \cdot (1 - 0{,}11)}{200}}\right] = [\,0{,}0737;\ 0{,}1463\,]$$

Mit 90 %-iger Sicherheit liegt der Anteil an unverzollten Zigarettenschachteln im Abfall zwischen 7,37 % und 14,63 %.

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 3 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2** **Aufgabe Seite 129**

Stochastik

2.1 Wahrscheinlichkeitsverteilung von Würfel I:

Augenzahl	1	2	5	6
Wahrscheinlichkeit	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$

A: $P(A) = P(5\text{-}6\text{-}2\text{-}2) = \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{768} = 0{,}0013$

B: Für den Würfel I gibt es nur die vier unterschiedlichen Zahlen 1, 2, 5 und 6.

Für eine unterschiedliche Reihenfolge dieser Zahlen gibt es genau

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; somit gilt $P(B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot 24 = \frac{5}{96} = 0{,}052$

Die Behauptung von Marc ist falsch.

A: Zahlenreihenfolge 5-6-2-2

Das Gegenereignis von B enthält z. B. auch das obige Ereignis A, bei dem nur zwei, nicht aber alle Zahlen gleich sind.

2.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung von Würfel II:

Augenzahl	1	6
Wahrscheinlichkeit	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$

Das Ereignis, dass dabei die Sechs häufiger auftritt als die Eins, tritt ein, wenn bei viermaligem Werfen von Würfel II 3- oder 4-mal die Sechs geworfen wird.

$P = 4 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \frac{7}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^4 = \frac{1375}{6912} = 0{,}199$

2.3 Die Zufallsvariable X beschreibt den Auszahlungsbetrag von Jonas (J) an Marc (M).

x_i	− 2	− 5	− 6	6
Ergebnisse	(M1, J2)	(M1, J5)	(M1, J6)	(M6, J$\overline{6}$)
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{7}{48}$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{7}{48}$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{144}$	$\frac{5}{12} \cdot \frac{11}{12} = \frac{55}{144}$

Erwartungswert: $E(X) = -2 \cdot \frac{7}{48} - 5 \cdot \frac{7}{48} - 6 \cdot \frac{7}{144} + 6 \cdot \frac{55}{144} = 0{,}979$

Jonas zahlt durchschnittlich pro Spiel ca. 98 Cent an Marc.

Das Spiel lohnt sich langfristig für Marc.

oder: Durchschnittlicher Gewinn von Marc: $6 \cdot \frac{55}{144} = 2{,}2917$

Durchschnittlicher Gewinn von Jonas: $2 \cdot \frac{7}{48} + 5 \cdot \frac{7}{48} + 6 \cdot \frac{7}{144} = 1{,}3125$

Das Spiel lohnt sich langfristig für Marc.

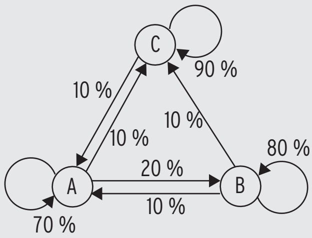
Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 4 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1** **Aufgabe Seite 130**

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Seite 1/2

1.1 Übergangsdiagramm:



Verteilung nach einem Jahr: $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2400 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1680 \\ 480 \\ 240 \end{pmatrix}$

Verteilung nach zwei Jahren: $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1680 \\ 480 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1248 \\ 720 \\ 432 \end{pmatrix}$

Verteilung der 2400 Mitarbeiter auf die drei Standorte:

A 1248 Mitarbeiter; B 720 und C 432 Mitarbeiter.

1.2 Ansatz für eine langfristige Verteilung $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $x + y + z = 2400$

Einsetzen ergibt ein LGS für x, y, z: $-0{,}3x + 0{,}1y + 0{,}1z = 0$ (1)

$0{,}2x - 0{,}2y = 0$ (2)

$0{,}1x + 0{,}1y - 0{,}1z = 0$ (3)

LGS in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} -0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & -0{,}2 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & -0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}4 & -0{,}2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & -0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das LGS aus (1), (2) und (3) ist mehrdeutig lösbar

mit $-0{,}4y + 0{,}2z = 0$ folgt $y = 0{,}5z$

Einsetzen in $-0{,}3x + 0{,}1y + 0{,}1z = 0$ ergibt $x = 0{,}5z$

Einsetzen in $x + y + z = 2400$: $0{,}5z + 0{,}5z + z = 2400 \Rightarrow z = 1200$

Das LGS hat die Lösung $x = 600$, $y = 600$, $z = 1200$

Hinweis: Mit $x + y + z = 1$ erhält man $x = \frac{1}{4}$; $y = \frac{1}{4}$; $z = \frac{1}{2}$

Für die stationären Verteilung auf die drei Standorte gilt:

A 600 Mitarbeiter, B 600 und C 1200 Mitarbeiter

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 4 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Seite 2/2

1.3 M^{20} ist die Übergangsmatrix, mit welcher, beispielsweise ausgehend von der Anfangsverteilung, die Verteilung in 20 Jahren bestimmt werden kann.
Interpretation der Einträge in der mittleren Zeile:
- 25,6 % der Mitarbeiter, die heute im Standort A arbeiten, arbeiten in 20 Jahren in Standort B.
- 25,6 % der Mitarbeiter, die heute im Standort B arbeiten, arbeiten in 20 Jahren in Standort B.
- 24,4 % der Mitarbeiter, die heute im Standort C arbeiten, arbeiten in 20 Jahren in Standort B.

Bei M^{20} fällt auf, dass die Koeffizienten in der ersten Zeile übereinstimmen (auf 3 Stellen). Alle haben den Wert 0,25. Es ist zu vermuten, dass sich dieser Wert langfristig nicht mehr deutlich ändern wird und schon näherungsweise dem Wert in der Grenzmatrix entspricht.
Somit werden langfristig ca. 25 % aller Mitarbeiter in Standort A arbeiten.
Die Werte in den Zeilen 2 und 3 stimmen z. T. überein oder sind recht ähnlich, sodass eine Prognose zu den entsprechenden Mitarbeiterzahlen abgegeben werden kann.
Langfristig werden ca. 25 % aller Mitarbeiter in Standort B und 50 % am Standort C arbeiten.
Hinweis:
Die exakten Werte in einer Spalte der Grenzmatrix sind: $\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}$

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 4 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2** **Aufgabe Seite 131**

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

2.1 Bestimmung von a und b

Multiplikation von Zeile 1 der (R, Z)-Matrix mit der Spalte 1 der (Z, E)-Matrix ergibt:

$2 + 9 + a = 13 \;\Rightarrow a = 2$

Multiplikation von Zeile 1 der (R, Z)-Matrix mit der Spalte 2 der (Z, E)-Matrix ergibt:

$4 + 21 + 5 = b \;\Rightarrow b = 30.$

Hinweis zur Alternative: Es gilt $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$

2.2.1 Es gilt: $B_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 171 \\ 120 \end{pmatrix}$

Für diesen Auftrag sind 51 ME Z1, 171 ME Z2 und 120 ME Z3 erforderlich.

2.2.2 $M_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Bedingung: $M_{RZ} \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \\ 1600 \end{pmatrix}$ ergibt das LGS $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 600 \\ 0 & 2 & 2 & 800 \\ 4 & 7 & 3 & 1600 \end{array}\right)$

Auflösung mit dem Gauß-Verfahren: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 600 \\ 0 & 2 & 2 & 800 \\ 0 & 1 & 1 & 400 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 600 \\ 0 & 2 & 2 & 800 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

Lösungsvektor: $z_3 = t$ einsetzen ergibt: $2z_2 + 2t = 800 \Rightarrow z_2 = 400 - t$

einsetzen ergibt: $2z_1 + 3(400 - t) + t = 600$

$z_1 = t - 300$

Die Lösung ist ökonomisch sinnvoll, wenn die Elemente der Lösung nicht negativ sind: $z_3 = t \geq 0;$

$z_2 = 400 - t \geq 0$ für $t \leq 400$

$z_1 = t - 300 \geq 0$ für $t \geq 300$

$\vec{z} = \begin{pmatrix} t - 300 \\ 400 - t \\ t \end{pmatrix}$ ökonomisch sinnvoll für $300 \leq t \leq 400$

Mögliche sinnvolle Lösung: $\vec{z} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 400 \end{pmatrix}$

IV Abiturprüfungen am beruflichen Gymnasium

Hauptprüfung 2016/2017

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Lösungen Seite 153 - 160**

1 Analysis **Punkte**

1.1 Geben Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$ an. 2

1.2 Die Funktion g erfüllt folgende Bedingungen: 2

$g'(3) = 2$
$g''(3) = 0$
$g'''(3) \neq 0$
Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen?

1.3 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^{2 \cdot x} - 4 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$.

1.3.1 Bestimmen Sie den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagrechte Tangente hat. 3

1.3.2 Ermitteln Sie eine Stammfunktion von h, deren Schaubild durch den Punkt P(0 | 5) verläuft. 3

1.4 Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = \cos(x);\ x \in \mathbb{R}$.

1.4.1 Es gilt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 1$ 3

Bestimmen Sie, ohne Verwendung einer Stammfunktion, zwei

verschiedene Werte für a, sodass gilt:

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 2$$

Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

1.4.2 Beschreiben Sie, wie das Schaubild von q mit 2
$q(x) = -\cos(x + 2);\ x \in \mathbb{R}$
aus dem Schaubild von p hervorgeht.

15

Teil 1 ohne Hilfsmittel

2 Stochastik Punkte

2.1 Ein Experiment gelingt in 50 % aller Fälle. 3

Prüfen Sie, ob das Experiment bei viermaliger Durchführung mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens einmal gelingt.

2.2 A und B sind beliebige Ereignisse. 4

Die Wahrscheinlichkeit, dass weder das Ereignis A noch das Ereignis B eintritt, beträgt 42%. Die Wahrscheinlichkeit, dass A und das Gegenereignis von B eintritt, beträgt 28%. Die Wahrscheinlichkeit, dass B und das Gegenereignis von A eintritt, beträgt 18%.

Zeigen Sie: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$. 7

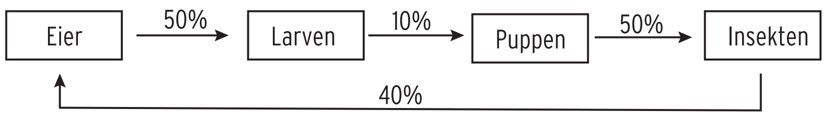
3 Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen Punkte

3.1 Lösen Sie das nachfolgende lineare Gleichungssystem. 3

$$\begin{aligned} 2 \cdot x - 3 \cdot y + z &= 4 \\ -x + y + z &= 1 \\ 2 \cdot y + 3 \cdot z &= 6 \end{aligned}$$

3.2 In der Matrizengleichung $A \cdot B = C$ hat die Matrix A zwei Zeilen und vier Spalten. Die Matrix C ist eine quadratische Matrix. 2
Wie viele Zeilen und Spalten hat die Matrix B?

3.3 Die Entwicklung einer Insektenpopulation wird durch folgendes Diagramm modelliert: 3



Aus 50% der Eier werden Larven, von denen sich 10% verpuppen.
Aus 50% der Puppen schlüpfen die geschlechtsreifen Insekten, die pro Insekt 40 Eier legen und anschließend sterben.
Vereinfachend wird angenommen, dass jedes dieser vier Entwicklungsstadien jeweils 40 Tage benötigt.
Zu Beginn zählt man 10000 Eier, 4000 Larven, 600 Puppen und 300 Insekten.
Wie viele Eier, Larven, Puppen und Insekten zählt man nach diesem Modell nach 40 Tagen? Begründen Sie, warum die Population nach dem obigen Modell nicht ausstirbt.

8

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis **Punkte**

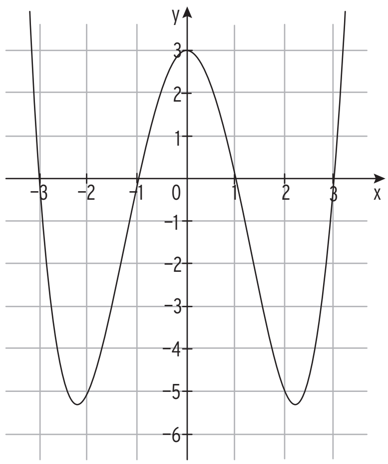
1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^4 + x^3 + 1;\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

1.1.1 Untersuchen Sie K auf Extrempunkte und Wendepunkte. 8
Zeichnen Sie K.

1.1.2 Das Schaubild K, die Tangente an K an der Stelle $x = -1$ und die 5
y-Achse schließen im zweiten Quadranten eine Fläche ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

1.1.3 Für einen positiven Wert von m hat das Schaubild der Funktion g 3
mit $g(x) = 0{,}5 \cdot x^4 + x^3 + x^2 + m \cdot x + 2;\ x \in \mathbb{R}$,
genau einen gemeinsamen Punkt mit K.
Bestimmen Sie diesen Wert von m.

1.2 C ist das Schaubild eine Funktion h. 4
Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion h'.



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen für den abgebildeten Bereich wahr oder falsch sind. Begründen Sie.

(1) Das Schaubild C hat den Tiefpunkt $T(1 \mid h(1))$.

(2) Es gibt Punkte, an denen C eine Normale mit Steigung $\frac{1}{6}$ hat.

20

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

Im Verlauf von etwa 30 Tagen ändert der Mond ständig sein Erscheinungsbild (siehe Abbildung).

Der beleuchtete Anteil der erdzugewandten Seite des Mondes wird modellhaft durch die Funktion A mit

$A(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{15} \cdot t);\ 0 \leq t \leq 30,$

beschrieben. Dabei steht t für die Tage seit Beobachtungsbeginn, beispielsweise ist t = 1 das Ende des ersten Tages.

2.1 Skizzieren Sie das Schaubild von A. 4

Formulieren Sie im Sachzusammenhang eine Frage, die durch Lösen der Gleichung A(t) = 0,95 beantwortet werden kann.

2.2 Ermitteln Sie den durchschnittlichen Anteil, der von Beobachtungsbeginn bis zum Ende des fünfzehnten Tages beleuchtet wird. 4

2.3 Das Modell A soll nun zu einem Modell B abgeändert werden, sodass der Zeitpunkt t = 0 der Beleuchtung bei Vollmond entspricht. 2

Bestimmen Sie hierzu einen Wert für c, sodass die Funktion B mit

$B(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{15} \cdot t + c);\ 0 \leq t \leq 30,$

diesen Sachverhalt modelliert.

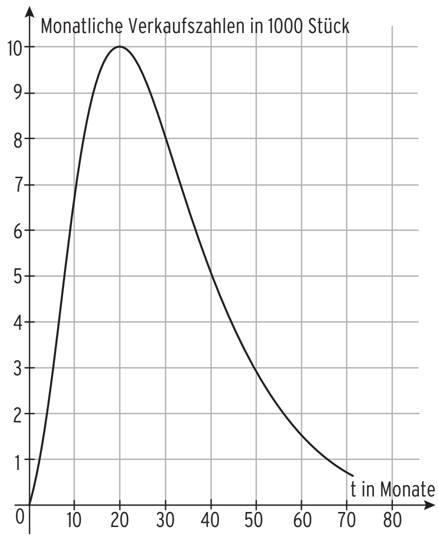
$\overline{10}$

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

Die folgende Abbildung zeigt die Modellierung eines sogenannte Produktlebenszyklus. Darin sind die monatlichen Verkaufszahlen V eines Produkts (z. B. PKW) in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Zum Zeitpunkt t = 0 beginnt die Einführung des Produkts auf dem Markt. Nach sechs Jahren wird das Produkt vom Markt genommen.

Der Produktlebenszyklus wird lückenlos in vier Phasen unterteilt:



1. Einführungs-und Wachstumsphase
   - Zunahme der Verkaufszahlen
   - Zunahme der momentanen Änderungsrate der Verkaufszahlen
2. Reifephase
   - Zunahme der Verkaufszahlen
   - Verkaufszahlen überschreiten 95% des Maximums nicht
   - keine Zunahme der momentanen Änderungsrate der Verkaufszahlen
3. Sättigungsphase
   - Verkaufszahlen liegen über 95% des Maximums
4. Degenerationsphase
   - beginnt nach der Sättigungsphase

Die Aufgaben 3.1 und 3.2 sollen näherungsweise mit Hilfe der Abbildung gelöst werden.

3.1 Geben Sie für jede der vier Phasen das entsprechende Zeitintervall an. 4

3.2 Ermitteln Sie die Anzahl der verkauften Produkte in den gesamten sechs Jahren. 2

3.3 Im Folgenden ist V die Funktion der monatlichen Verkaufszahlen in Abhängigkeit von der Zeit t. Formulieren Sie jeweils einen mathematischen Ansatz, um folgende Fragen mithilfe von V beantworten zu können: 4

(1) In welchem Zeitraum liegen die monatlichen Verkaufszahlen über 3000 Stück und weisen keinen Rückgang auf?

(2) In welchen dreimonatigen Zeiträumen liegt die Gesamtverkaufszahl bei 40 000?

10

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 4**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

In Schulversuchen wird die Lösung eines chemischen Stoffes mit Salzsäure versetzt. Dadurch zerfällt der Stoff und dessen Konzentration c sinkt im Laufe der Zeit t.

v ist die momentane Änderungsrate der Konzentration c.

Im Folgenden sind c in Mol pro Liter ($\frac{mol}{l}$) und die Zeit t in Sekunden (s) angegeben.

4.1 In einem ersten Versuch wird die Konzentration c in Abhängigkeit von t modelliert durch:

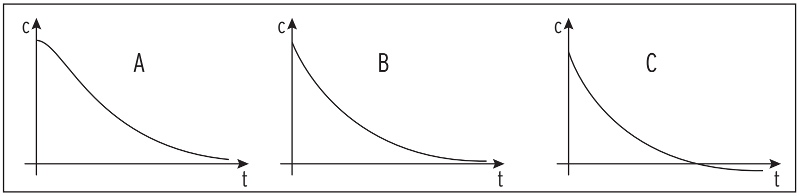
$c(t) = 0{,}05 \cdot e^{-0{,}017 \cdot t}$; $t \geq 0$.

4.1.1 Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem nur noch 10 % der Anfangskonzentration vorhanden sind. 4

Geben Sie den Wert von v drei Minuten nach Versuchsbeginn an.

In welcher Einheit wird v gemessen?

4.1.2 Eine der unten stehenden drei Abbildungen zeigt das Schaubild der Funktion c. Entscheiden Sie welche. Erläutern Sie, warum die beiden anderen Schaubilder nicht in Frage kommen. 2



4.2 Unter anderen Bedingungen berechnet sich die momentane Änderungsrate v zum Zeitpunkt t durch $v(t) = -0{,}007 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t}$; $t \geq 0$. 4

Die Anfangskonzentration des Stoffes ist dann 0,125 $\frac{mol}{l}$.

Bestimmen Sie, wie viel Prozent der Anfangskonzentration langfristig übrig bleibt.

10

Teil 3 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Stochastik **Punkte**

Beim Strafstoß ("Elfmeter") gibt es drei mögliche Ergebnisse:

(1) Der Schütze erzielt ein Tor.

(2) Der Torhüter wehrt den Ball ab.

(3) Der Schütze trifft die Torbegrenzung oder verfehlt das Tor.

Der Fußballer Tom erzielt beim Strafstoß mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % ein Tor.

1.1 Tom schießt vier Strafstöße. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ergebnisse: 5

A: Er erzielt vier Tore.

B: Er erzielt mindestens drei Tore.

C: Er erzielt genau drei Tore in Folge.

1.2 Ein Freund bietet Tom folgendes Spiel an: 5

"Wenn du ein Tor erzielst, zahle ich dir einen Euro, sollte der Torhüter den Ball abwehren, zahlst du mir zwei Euro. Ansonsten musst du mir 10 Euro geben".

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehrt, wenn man davon ausgeht, dass auf lange Sicht keiner der beiden einen Gewinn macht, das Spiel also fair ist.

1.3 In der Fußballliga wird bei 87 % aller Strafstöße ein Tor erzielt. 10 % der Strafstöße werden vom Torhüter abgewehrt.

1.3.1 Bei einem Strafstoß wird kein Tor erzielt. 2

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Torhüter den Ball abgewehrt hat.

1.3.2 In einer Saison wurden 70 Strafstöße gegeben. 3

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass davon mindestens 68 Tore erzielt wurden.

15

Teil 3 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik **Punkte**

2 An einem Kiosk kann man Rubbellose kaufen. Ein Los besteht aus insgesamt 16 Feldern. Auf jedem Feld steht genau eine Zahl.

Auf acht Feldern steht die Zahl 0, auf vier Feldern die Zahl 1 und auf den restlichen vier Feldern die Zahl 5. Die Zahlen sind zufällig auf die Felder verteilt. Die Felder sind von einer undurchsichtigen Schicht überzogen, sodass die Zahlen erst durch Rubbeln der Felder sichtbar werden.

Der Käufer eines Loses muss genau zwei Felder aufrubbeln (vgl. Abbildung). Das <u>Produkt</u> der Zahlen, die hierdurch sichtbar werden, ist der Betrag in Euro, die der Kioskbetreiber an den Losbesitzer auszahlen muss.

2.1 Eine Frau kauft ein Rubbellos und rubbelt genau zwei Felder frei. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: 3

A: Genau ein frei gerubbeltes Feld zeigt die Zahl 5.

B: Die Frau bekommt mindestens einen Euro ausbezahlt.

2.2 Ein Mann kauft an fünf Tagen in Folge jeweils ein Los. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Mann genau zweimal 25 Euro erhält. 3

2.3 Der Kioskbetreiber kauft die Lose für 20 Cent je Stück ein und verkauft ein Los für 2,50 Euro. Bestimmen Sie die Höhe des Gewinns pro Los, den der Kioskbetreiber im Mittel erwarten kann. 4

2.4 Ein Kioskbetreiber notiert immer am Ende des Tages die Anzahl der an diesem Tag verkauften Rubbellose. Ein Student, der als Aushilfe im Kiosk arbeitet, wertet diese Daten aus: Im Mittel werden 17 Lose pro Tag verkauft, wobei die Standardabweichung 4 beträgt. 5

Der Student macht folgende Annahmen:

(1) Die Anzahl n der Kunden, die den Kiosk aufsuchen, ist an jedem Tag gleich.

(2) Die Kunden kaufen unabhängig voneinander entweder genau ein oder aber kein Rubbellos.

Bestimmen Sie den Wert für p, den der Student unter der Annahme einer Binomialverteilung ermittelt.

Welche Information liefert die Sigma-Regel $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68{,}3\ \%$ dem Studenten in diesem Sachzusammenhang?

15

Teil 4 mit Hilfsmittel — Aufgabe 1

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

1.1 Ein Unternehmen stellt aus den beiden Rohstoffen R1 und R2 die drei Zwischenprodukte Z1, Z2 und Z3 her. Aus den drei Zwischenprodukten entstehen die beiden Endprodukte E1 und E2.

Die benötigten Rohstoffe je Mengeneinheit (ME) der einzelnen Zwischenprodukte sowie die erforderlichen Zwischenprodukte zur Produktion von einer ME der Endprodukte sind in den nachfolgenden Tabellen angegeben.

Rohstoff-Zwischenprodukt

	Z1	Z2	Z3
R1	1	1	a
R2	2	1	1

Zwischen-Endprodukt

	E1	E2
Z1	1	0
Z2	0	2
Z3	2	1

Rohstoff-Endprodukt

	E1	E2
R1	5	4
R2	4	3

1.1.1 Zeigen Sie, dass a in der Rohstoff-Zwischenprodukt-Tabelle den Wert 2 hat. 2

1.1.2 Täglich werden 5 ME von E1 und 10 ME von E2 hergestellt

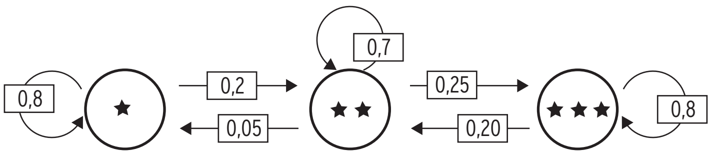
1.1.2.1 Ein Mitarbeiter des Unternehmens behauptet, dass hierfür 65 ME von R1 und 50 ME von R2 benötigt werden. Überprüfen Sie die Behauptung. 2

1.1.2.2 Betrachten Sie die Matrizen $D_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $D_3 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$. 5

Welche dieser drei Matrizen ist die Inverse der Rohstoff-Endproduktmatrix? Begründen Sie.

Aufgrund von Problemen in der Produktion wurden an einem Tag nur 43 ME von R1 und 33 ME von R2 verarbeitet. Bestimmen Sie, wie viele ME von E1 und E2 an diesem Tag produziert wurden.

1.2 Ein Institut prüft jährlich die Wasserqualität von Stränden in einer Urlaubsregion und vergibt hierfür ein bis drei Sterne. Ein Stern wird vergeben, wenn die Wasserqualität des Gewässers zum Baden ungeeignet ist. Bei zwei Sternen ist die Wasserqualität noch ausreichend, sodass Baden unbedenklich ist, und drei Sterne verweisen auf eine gute bis hervorragende Wasserqualität. 6
Das nachfolgende Diagramm beschreibt die Übergangswahrscheinlichkeiten für eine Zeiteinheit von einem Jahr.



Geben Sie die Übergangsmatrix an. Berechnen Sie den prozentualen Anteil der zum Baden ungeeigneten Strände, der sich langfristig einstellt.

15

Lösungen Hauptprüfung 2016/2017

Lösungen Teil 1 ohne Hilfsmittel

www.mvurl.de/i4f2

1 Analysis

1.1 Nullstellen von f: $f(x) = 0$ $3 \cdot x^3 - 27 \cdot x = 0$
Ausklammern: $3x(x^2 - 9) = 0$
Satz vom Nullprodukt: $3x = 0$ oder $x^2 - 9 = 0$
Nullstellen: $x = 0 \vee x = \pm 3$

1.2 $g'(3) = 2$ Die Steigung der Tangente an das Schaubild von g an der Stelle $x = 3$ ist 2.
$g''(3) = 0$; $g'''(3) \neq 0$ Das Schaubild der Funktion g hat einen Wendepunkt an der Stelle $x = 3$.

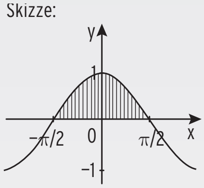
1.3 $h(x) = e^{2x} - 4 \cdot x$; $h'(x) = 2e^{2x} - 4$

1.3.1 Punkt mit waagrechter Tangente: $h'(x) = 0$ $2e^{2x} - 4 = 0$
$e^{2x} = 2$
Logarithmieren: $2x = \ln(2)$, also $x = \frac{1}{2}\ln(2)$
y-Wert: $h(\frac{1}{2}\ln(2)) = 2 - 4 \cdot \frac{1}{2}\ln(2) = 2 - 2\ln(2)$
Gesuchter Punkt $(\frac{1}{2}\ln(2) \mid 2 - 2\ln(2))$

1.3.2 Stammfunktion von h: $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2 \cdot x^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$
durch $P(0 \mid 5)$: $H(0) = \frac{1}{2}e^0 + c = 5$ für $c = 4{,}5$
Gesuchte Stammfunktion: $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2 \cdot x^2 + 4{,}5$; $x \in \mathbb{R}$

1.4.1 Der Wert des Integrals entspricht dem Inhalt der Fläche, die vom Schaubild von p, der y-Achse und der x-Achse im Intervall $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ umrandet wird.

Skizze:



$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 2 \text{ für } a = -\frac{\pi}{2}$$

(wegen der Achsensymmetrie zur y-Achse)

oder für $a = -\frac{5}{2} \cdot \pi$ oder für $a = -\frac{9}{2} \cdot \pi$

($\int_0^{2\pi} \cos(x)dx = 0$; Integral über eine Periode ergibt den Wert 0)

1.4.2 Das Schaubild von q mit $q(x) = -\cos(x + 2)$; $x \in \mathbb{R}$

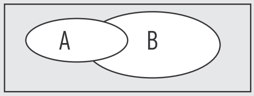
geht aus dem Schaubild von p hervor durch
- Verschiebung des Schaubildes von p um 2 nach links
- Spiegelung an der x-Achse

Lösungen Teil 1 ohne Hilfsmittel   Stochastik

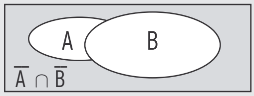
www.mvurl.de/6fux

2.1 Ein Experiment gelingt in 50 % aller Fälle: $p = 0{,}5$
viermalige Durchführung: $n = 4$; X: Anzahl der Treffer
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}5^4 = 1 - \frac{1}{16} < 1 - \frac{1}{20} = 0{,}95$
Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Experiment bei 4-maliger Durchführung mindestens einmal gelingt, nicht mehr als 95 %.

2.2 $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}42$; $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}28$; $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}18$

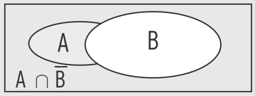


$P(A \cap B) = 1 - (P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)) = 0{,}12$



$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = 0{,}40 = 40\ \%$
$P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) = 0{,}30 = 30\ \%$

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 = P(A \cap B)$



Alternative mit einer Vierfeldertafel:

	B	$\overline{B}$	
A	**0,12**	*0,28*	0,40
$\overline{A}$	*0,18*	*0,42*	0,60
	0,30	0,70	1

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 = P(A \cap B)$

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 LGS in Matrixform: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$

Umformung in die Diagonalform: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \end{array}\right)$

Lösung: $x = 1$; $y = 0$; $z = 2$

3.2 A ist eine 2; 4-Matrix; B muss 4 Zeilen haben. $A \cdot B = C$ ist eine quadratische Matrix; also ist B eine Matrix mit 4 Zeilen und zwei Spalten.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 3 \\ 22 & 7 \end{pmatrix}$

3.3 Insektenpopulationsmatrix: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$

www.mvurl.de/ts8i

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10000 \\ 4000 \\ 600 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12000 \\ 5000 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$

Nach 40 Tagen zählt man 12000 Eier, 5000 Larven, 400 Puppen und 300 Insekten. Wegen $0{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5 \cdot 40 = 1$ entwickelt sich die Population nach dem obigen Modell zyklisch und damit stirbt die Population nicht aus.

Lösungen Hauptprüfung 2016/2017

Teil 2 mit Hilfsmittel - Aufgabe 1

Analysis

www.mvurl.de/2rl4

1.1 K: $f(x) = 0{,}5x^4 + x^3 + 1;\ x \in \mathbb{R}$

Ableitungen: $f'(x) = 2x^3 + 3x^2$; $f''(x) = 6x^2 + 6x$; $f'''(x) = 12x + 6$

1.1.1 Extrempunkte

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad 2x^3 + 3x^2 = x^2(2x + 3) = 0$

Satz vom Nullprodukt ergibt: $\quad x_{1|2} = 0;\ x_3 = -1{,}5$

Mit $f''(-1{,}5) = 4{,}5 > 0$

und $f(-1{,}5) = 0{,}15625$ $\quad T(-1{,}5 \mid 0{,}15625)$

In $x = 0$ liegt kein Extrempunkt vor, da $f'(x)$ dort das Vorzeichen nicht wechselt ($x_{1|2} = 0$ ist doppelte Nullstelle von f', siehe auch Wendestelle)

Wendepunkte

Bedingung: $f''(x) = 0$ $\quad 6x^2 + 6x = 6x(x + 1) = 0$

Satz vom Nullprodukt ergibt: $\quad x_1 = 0;\ x_2 = -1$

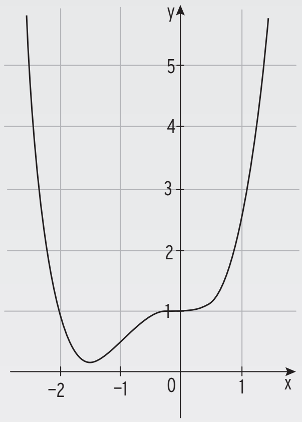
Mit $f'''(0) = 6 \neq 0$

und $f(0) = 1$: $\quad W_1(0 \mid 1)$

Mit $f'''(-1) = -6 \neq 0$

und $f(-1) = 0{,}5$: $W_2(-1 \mid 0{,}5)$

Schaubild K:



1.1.2 Tangente an K an der Stelle $x = -1$

$f'(-1) = 1$; $W_2(-1 \mid 0{,}5)$

t: $y = 1 \cdot x + b$

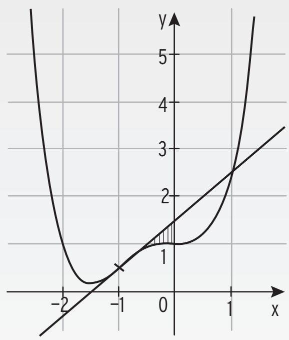
Punktprobe mit W_2 ergibt: $y = x + 1{,}5$

Fläche zwischen K, t in den Grenzen -1 und 0

$$\int_{-1}^{0} (x + 1{,}5 - f(x))dx = \int_{-1}^{0} (-0{,}5x^4 - x^3 + x + 0{,}5)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{0} = 0{,}15$$

Inhalt dieser Fläche A = 0,15 (FE)



Lösungen Hauptprüfung 2016/2017

Teil 2 mit Hilfsmittel - Aufgabe 1

Analysis

1.1.3 $g(x) = 0{,}5x^4 + x^3 + x^2 + mx + 2;\ x \in \mathbb{R}$

Gemeinsamer Punkt mit K

durch Gleichsetzen $f(x) = g(x)$ $\quad 0{,}5x^4 + x^3 + 1 = 0{,}5x^4 + x^3 + x^2 + mx + 2$

$x^2 + mx + 1 = 0$

Die quadratische Gleichung hat genau eine Lösung, wenn D = 0

Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ oder $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ergibt:

$m^2 - 4 = 0$ oder $\left(\frac{m}{2}\right)^2 - 1 = 0$ wegen $m > 0$: Lösung $m = 2$

Für m= 2 gibt es genau einen gemeinsamen Punkt von K und G.

1.2 (1) falsch

Es gilt zwar $h'(1) = 0$, aber das Vorzeichen von h' wechselt an der Stelle $x = 1$ von + nach −. (Es liegt also ein Hochpunkt vor.)

(2) falsch

Wegen der Orthogonalität von Normale und Tangente müsste es eine Stelle geben, für die gilt: $h'(x) = -6$ (negativer Kehrwert von $\frac{1}{6}$.)

Teil 2 mit Hilfsmittel - Aufgabe 2
Anwendungsorientierte Analysis- Lösung

www.mvurl.de/a62s

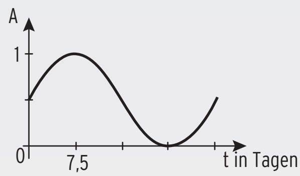
2.1 Schaubild von A

Periode $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{15}} = 30$; Mittellinie: $y = 0{,}5$

$a = 0{,}5$

$A(t) = 0{,}95$ beantwortet z. B die Frage:

Zu welchen Zeitpunkten sind 95% der erdzugewandten Seite des Mondes beleuchtet?



2.2 Durchschnittlicher Anteil (vgl. Mittelwert)

$$m = \frac{1}{15-0}\int_0^{15}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{15}\cdot t\right)\right)dt = \frac{1}{15}\left[\frac{1}{2}t - \frac{15}{2\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{15}\cdot t\right)\right]_0^{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = 0{,}818\ldots$$

Hinweis: $\cos(\pi) = -1$; $\cos(0) = 1$

Durchschnittlich erscheint ein Anteil von etwa 81,8% beleuchtet.

2.3 Bedingung: $B(0) = 1$ $\quad B(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{15}\cdot 0 + c\right) = 1$ wenn $\sin(c) = 1$

Mögliche Wahl: $c = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ (oder auch $c = \frac{5}{2}\pi$)

Lösungen Hauptprüfung 2016/2017

Teil 2 mit Hilfsmittel - Aufgabe 3 Anwendungsorientierte Analysis

3.1 Wir lesen Näherungswerte ab (Dabei ist t die Zeit in Monaten.):

Einführungs-und Wachstumsphase:	$0 \leq t \leq 6$	(bis zur Wendestelle)
Reifephase:	$6 \leq t \leq 15$	(bis vor die Maximalstelle)
Sättigungsphase:	$15 < t < 24$	(Bereich um die Max-Stelle)
Degenerationsphase:	$24 \leq t \leq 72$	

3.2 Die Fläche unter der Kurve im Bereich $0 \leq t \leq 72$ entspricht näherungsweise der gesamten verkauften Menge des Produktes.
Durch das Auswerten der Fläche (z.B. Kästchenzählen) erhält man eine gesamte verkaufte Menge von etwa 360 000 Stück.

3.3 (1) Bestimmen Sie alle t-Werte mit $0 \leq t \leq 72$, sodass $V(t) > 3000 \wedge V'(t) \geq 0$

(2) Bestimmen Sie alle z-Werte mit $0 \leq z \leq 69$, sodass $\int\limits_{z}^{z+3} V(t)dt = 40000$

Teil 2 mit Hilfsmittel - Aufgabe 4 Anwendungsorientierte Analysis

www.mvurl.de/uwc4

4.1.1 $c(t) = 0{,}05 \cdot e^{-0{,}017 \cdot t}$ Anfangskonzentration: $c(0) = 0{,}05$ mol/l

Bedingung: $0{,}05 \cdot e^{-0{,}017 \cdot t} = 0{,}1 \cdot 0{,}05$ oder

$$e^{-0{,}017 \cdot t} = 0{,}1$$
$$-0{,}017t = \ln(0{,}1)$$
$$t = 135{,}446...$$

Nach ca. 135 Sekunden ist nur noch 10 % der Anfangskonzentration vorhanden.

V ist die momentane Änderungsrate (Die Einheit ist $\frac{\text{mol}}{\text{l} \cdot \text{s}}$.)

$v(t) = c'(t) = -0{,}05 \cdot 0{,}017 \cdot e^{-0{,}017 \cdot t} = -0{,}00085 \cdot e^{-0{,}017 \cdot t}$

$v(180) = -0{,}00003985...$

Der Wert nach 3 Minuten nach Versuchsbeginn ist etwa $-4 \cdot 10^{-5} \frac{\text{mol}}{\text{l} \cdot \text{s}}$.

4.1.2 Schaubild B gehört zu c:
Wegen $c''(t) > 0$ für alle $t \geq 0$, ist das Schaubild von c stets linksgekrümmt.
Damit scheidet Schaubild A aus, da dieses eine Wendepunkt besitzt.
Die Funktion c besitzt keine Nullstellen, c(t) ist stets positiv.
Damit scheidet Schaubild C aus, da dieses die t-Achse schneidet.

4.2 c ist eine Stammfunktion von v: $c(t) = \frac{-0{,}007}{-0{,}07} \cdot e^{-0{,}07 \cdot t} + k = 0{,}1\, e^{-0{,}07 \cdot t} + k$

Aus $c(0) = 0{,}125$ folgt $0{,}1 + k = 0{,}125$, also $k = 0{,}025$

Die Gerade mit $y = 0{,}025$ ist Asymptote des Schaubildes von c.

Aus $\frac{0{,}025}{0{,}125} = 0{,}2 = 20\%$ ergibt sich:

Langfristig bleiben 20 % der Anfangskonzentration übrig.

www.mvurl.de/rhvn

Lösungen Hauptprüfung 2016/2017

Teil 3 mit Hilfsmittel - Aufgabe 1

www.mvurl.de/nhc2

Stochastik

1.1 Wahrscheinlichkeit für Tor beim Strafstoß: p = 0,80
X: Anzahl der Tore; X ist binomialverteilt mit n = 4 und p = 0,8
$P(A) = P(X = 4) = 0{,}4096$
$P(B) = P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}1808 = 0{,}8192$
oder auch
$P(B) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}4096 + 0{,}4096 = 0{,}8192$

$P(C) = 2 \cdot (\frac{4}{5})^3 \cdot \frac{1}{5} = 0{,}2048$

(Die ersten 3 Strafstöße sind Tore oder die letzten 3 Strafstöße sind Tore.)

1.2 T: Tom erzielt ein Tor; G: Der Torhüter wehrt den Ball von Tom ab
V: Tom trifft die Torbegrenzung oder verfehlt das Tor

$P(T) = \frac{4}{5}$; $P(G) = x$; $P(V) = \frac{1}{5} - x$ (Summe = 1)

Aus $\frac{4}{5} \cdot 1 + x \cdot (-2) + (\frac{1}{5} - x) \cdot (-10) = 0$ (Spiel fair, heißt $E(X) = 0$)

folgt $x = \frac{3}{20} = 0{,}15$
15% der von Tom geschossenen Strafstöße werden vom Torhüter abgewehrt.

1.3 TN: Schütze erzielt kein Tor mit $P(TN) = 1 - 0{,}87 = 0{,}13$
TW: Torhüter wehrt den Ball ab mit $P(TW) = 10\% = 0{,}1$
Hinweis: $P(TN \cap TW) = P(TW)$

1.3.1 $P_{TN}(TW) = \frac{P(TN \cap TW)}{P(TN)} = \frac{0{,}1}{0{,}13} = 0{,}769...$

Etwa 77% der Strafstöße, bei denen kein Tor erzielt wurde, werden vom Torhüter abgewehrt.

1.3.2 X: Anzahl der erzielten Tore; X ist binomialverteilt mit n = 70 und p = 0,87
$P(X \geq 68) = P(X = 68) + P(X = 69) + P(X = 70)$
oder
$P(X \geq 68) = 1 - P(X \leq 67) = 0{,}003817...$
Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 68 Tore erzielt wurden, beträgt etwa 0,4%.

Lösungen Hauptprüfung 2016/2017
Teil 3 mit Hilfsmittel - Aufgabe 2

Stochastik

www.mvurl.de/flyy

2.1 P(5 im 1. Zug) = $\frac{4}{16}$

P(A) = $2 \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{12}{15} = \frac{6}{15} = 0{,}4$

Mindestens 1 € ausbezahlt bedeutet, sie rubbelt nur Zahlen 1 oder 5 frei
P(B) = $\frac{8}{16} \cdot \frac{7}{15} = \frac{7}{30} = 0{,}233$

2.2 25 € ausbezahlt bedeutet, er rubbelt zweimal die Zahl 5 frei
mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{20}$
C: Der Mann erhält 25 € mit genau zwei von 5 Rubbellosen.
X: Anzahl der 25 € Treffer unter 5 Rubbellosen;
X ist binomialverteilt mit n = 5 und p = $\frac{1}{20}$
P(C) = P(X = 2) = 0,02143
Der Mann erhält mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 2% genau zweimal 25 €.

2.3 X: Auszahlung in € an den Losbesitzer
P(X = 1) = $\frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{20}$ (11 wird gerubbelt)

P(X = 5) = $2 \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{4}{15} = \frac{2}{15}$ (15 oder 51 wird gerubbelt)

P(X = 25) = $\frac{1}{20}$ (55 wird gerubbelt)

Durchschnittliche Auszahlung E(X) = $1 \cdot \frac{1}{20} + 5 \cdot \frac{2}{15} + 25 \cdot \frac{1}{20} = 1{,}966...$

Erwarteter Gewinn pro Los: $2{,}50 - 0{,}20 - 1{,}966... = \frac{1}{3}$

Pro verkauftem Los kann der Kioskbetreiber mit etwa 0,33 € Gewinn rechnen.

2.4 X: Anzahl der Kunden pro Tag, die ein Los kaufen; X ist binomialverteilt
$E(x) = \mu = n \cdot p = 17$
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{17 \cdot (1-p)} = 4$
Quadrieren ergibt (p > 0): $17 \cdot (1-p) = 16$ und damit p = $\frac{1}{17}$
Einsetzen in $n \cdot p = 17$ ergibt n = 289
Damit erhält der Student für die Anzahl der Kunden, die täglich den Kiosk aufsuchen, den Wert n = 289.
$\mu - \sigma = 13$; $\mu + \sigma = 21$; $P(13 \le X \le 21) = 68{,}3\%$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 68,3% kaufen täglich mehr als 12 und weniger als 22 Kunden ein Los.

Lösungen Hauptprüfung 2016/2017
Teil 4 mit Hilfsmittel - Aufgabe 1
Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

www.mvurl.de/5x8s

1.1 Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix : RZ
Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix : ZE
Rohstoff-Endprodukt-Matrix : RE

$$RZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad ZE = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad RE = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1.1.1 Bedingung für a: $1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + a \cdot 2 = 5 \quad \Leftrightarrow a = 2$
Alternativ z. B.: $1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + a \cdot 1 = 4 \Leftrightarrow a = 2$

1.1.2.1 Wegen $RE \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 50 \end{pmatrix}$ werden 65 ME von R1 und 50 ME von R2 benötigt.

Daher ist die Behauptung des Mitarbeiters richtig.

1.1.2.2 Die Matrix D_3 ist die Inverse, da $D_3 \cdot RE = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Mithilfe von D_3 lassen sich direkt die Mengeneinheiten der beiden Endprodukte berechnen.

$RE \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 43 \\ 33 \end{pmatrix} \quad | \cdot D_3$ von links $\qquad \vec{x} = D_3 \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Es wurden 3 ME von E1 und 7 ME von E2 produziert.

1.2 Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ Hinweis: Spaltensumme = 1

Langfristige Verteilung $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix}$ mit

$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix}$ ergibt ein LGS für a und b:

$$\begin{array}{lcll} 0{,}8a + 0{,}05b = a & & -0{,}2a + 0{,}05b = 0 & (1) \\ 0{,}2a + 0{,}7b + 0{,}2(1-a-b) = b & \Leftrightarrow & 0{,}2 - 0{,}5b = 0 & (2) \\ 0{,}25b + 0{,}8\,(1-a-b) = 1-a-b & & 0{,}2a + 0{,}45b = 0{,}2 & (3) \end{array}$$

Aus Gleichung (2): $b = 0{,}4$
Eingesetzt in (1): $-0{,}2a + 0{,}02 = 0 \Rightarrow a = 0{,}1$
Probe in (3) ergbt eine wahre Aussage.

Damit sind langfristig 10 % der Strände ungeeignet zum Baden.

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1** **Lösungen Seite 237 - 249**

Analysis **Punkte**

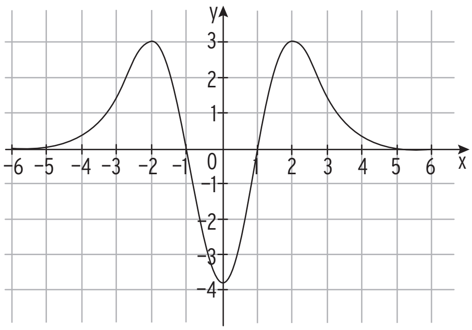
Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \;\;;\;\; x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f ist K_f.

1.1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie K_f ohne weitere Rechnung. 4

1.1.2 Ermitteln Sie die x-Koordinate des Punktes, in dem K_f die Steigung $\frac{3}{2}$ hat. 2

1.2 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds der Funktion s. 5



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie.

(1) Es gilt: $s''(4) < 0$.

(2) Das Schaubild der Ableitungsfunktion s' von s besitzt für $0 < x < 2$ einen Hochpunkt.

(3) Der Wert von $\int_0^4 s(x)\,dx$ ist größer als 0.

1.3 Die Funktion d ist für $x > 0$ gegeben durch $d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$ und D ist eine Stammfunktion von d. 4

Zeigen Sie:

(1) D ist für $x > 0$ monoton wachsend.

(2) Die Stelle $x = 1$ ist die einzige Wendestelle von D.

15

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik **Punkte**

2. 1 Eine Fußballmannschaft gewinnt jedes ihrer Spiele mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$.

2.1.1 Das Ereignis A hat die folgende Wahrscheinlichkeit: 2
$P(A) = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$
Geben Sie eine Formulierung für das Ereignis A im Sachzusammenhang an.

2.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft von vier Spielen genau zwei Spiele gewinnt und diese aufeinander folgen. 2

2.2 Eine andere Mannschaft wird von ihren Misserfolgen demotiviert. 4
Die Mannschaft gewinnt das erste Spiel einer Wahrscheinlichkeit p.
Gewinnt sie das erste Spiel nicht, so ist die Wahrscheinlichkeit dann das zweite Spiel zu gewinnen $\frac{1}{2}$p.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft mindestens eines der beiden Spiele gewinnt, beträgt $\frac{4}{9}$.
Begründen Sie, dass durch Lösen der Gleichung
$1 - (1 - p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right) = \frac{4}{9}$ die Wahrscheinlichkeit p ermittelt werden kann.

8

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik **Punkte**

2 In einer Urne befinden sich zunächst neun Kugeln.
Vier Kugeln haben die Farbe blau, zwei sind weiß und drei sind grün.

2.1 Zwei Kugeln werden nacheinander aus der Urne ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse: 5
A: Die beiden gezogenen Kugeln sind weiß.
B: Unter den beiden gezogenen Kugeln befindet sich mindestens eine weiße Kugel.
C: Eine der beiden gezogenen Kugeln ist weiß und die andere blau.

2.2 Es wird nun eine unbekannte Anzahl x von grünen Kugeln der Urne hinzugefügt, sodass bei zweimaligem Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit zwei grüne Kugeln zu ziehen genau 50 % ist. 3
Ermitteln Sie eine Gleichung mit der x berechnet werden kann.

8

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Gegeben sind die Matrizen A und B. Die Matrix A hat 2 Zeilen und 3 Spalten, d.h. A hat das Format 2 x 3 . B hat das Format 3 x 2. 2

Geben Sie an, welche der folgenden beiden Berechnungen möglich ist:

(1) $3 \cdot A + 2 \cdot B$

(2) $A \cdot B$

Bestimmen Sie das Format der Ergebnismatrix.

3.2 Für jede Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bezeichnet $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ die transponierte Matix von A.

Eine Matrix heißt orthogonal, falls $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.1 Prüfen Sie, ob die Matrix 2

$\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

3.2.2 Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^5$ orthogonal ist. 3

$\overline{7}$

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Berechnen Sie den Lösungsvektor des linearen Gleichungssystems, das durch die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben ist: 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

3.2 Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2.1 Zeigen Sie, dass die Matrizenmultiplikation von A und B nicht kommutativ ist, das heißt $A \cdot B \neq B \cdot A$. 2

3.2.2 Durch Abänderung genau eines Koeffizienten der Matrix B lässt sich eine Matrix $\tilde{B}$ erzeugen, die die folgenden beiden Eigenschaften hat: 2

(1) $\tilde{B} \neq A$

(2) Die Matrizenmultiplikation von A und $\tilde{B}$ ist kommutativ.

Geben Sie eine mögliche Matrix $\tilde{B}$ an.

$\overline{7}$

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis **Punkte**

1 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -e^{2x} + 4e^x$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

1.1 K besitzt mit den Koordinatenachsen jeweils genau einen Schnittpunkt. 2
Überprüfen Sie, ob dies die Punkte $S_y(0 \mid 3)$ und $N(\ln(4) \mid 0)$ sind.

1.2 Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung f′ von f gilt: $f'(x) = 2e^x \cdot (2 - e^x)$. 4
Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art des Extrempunktes von K.

1.3 Zeichnen Sie K für $-5 \leq x \leq 1{,}5$. 3

1.4 Prüfen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: 3
„Der Inhalt der Fläche, die K mit den Koordinatenachsen im 1. Quadranten einschließt, ist das Doppelte des Mittelwertes von f auf dem Intervall $[0; \ln(4)]$."

1.5 Die Gerade mit der Gleichung $y = c$ schneidet K in zwei Punkten $P(x_P \mid c)$ und $Q(x_Q \mid c)$ mit $x_P < 0$ und $x_Q > 0$.

1.5.1 Geben Sie alle möglichen Werte für c an. 2

1.5.2 Es gilt nun $c = 1$. 4
Zeigen Sie, dass dann die y-Achse die Strecke PQ halbiert.

1.6 Untersuchen Sie, ob das Schaubild der auf IR definierten Funktion g mit 2
$g(x) = f(x) + f(-x)$ symmetrisch ist.
Geben Sie gegebenenfalls die Art der Symmetrie an.

20

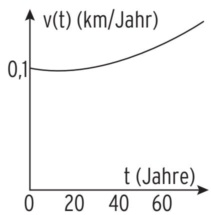
Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

2 Bei der Untersuchung einer Gletscherspalte eines Alpengletschers wurden im Jahr 2012 im Gletschereis nur wenige Zentimeter über dem Grund des Gletschers Ausrüstungsteile gefunden, die im Jahr 1950 von Bergsteigern im Gletschereis zurückgelassen wurden.
Im Laufe der Zeit hatten sich die Ausrüstungsteile mit dem Gletscher talwärts bis zur Fundstelle bewegt. Durch eine dort in den Gesteinsboden verankerte Eisenstange wurde der Fundort der Ausrüstungsteile markiert. Der Ort, an dem der Gletscher talwärts endet, lag 2012 noch 7 Kilometer (km) vom Fundort der Ausrüstungsteile entfernt. Aufgrund der Klimaerwärmung der letzten Jahrzehnte zieht sich das Gletscherende zurück. Es bewegt sich um durchschnittlich 200 Meter (m) pro Jahr in Richtung des Fundorts.

2.1 Betrachtet wird der Abstand des Gletscherendes zum Fundort der Ausrüstung. Begründen Sie, dass dieser Abstand bezogen auf das Jahr 2012 durch die Gerade mit der Gleichung $y = -0{,}2 \cdot x + 7$ beschrieben werden kann. Geben Sie die Bedeutung von x im Sachkontext an. 2

2.2 Die Funktion v mit
$v(t) = 7{,}56 \cdot 10^{-6} \cdot t^2 - 2{,}27 \cdot 10^{-4} \cdot t + 0{,}11 \quad ; \; t \geq 0$
modelliert die Geschwindigkeit (in km pro Jahr) des Gletschers bei seiner Bewegung talwärts.
Hier entspricht t = 0 dem Jahr 1950.
Das Schaubild von v ist in der Abbildung dargestellt.



2.2.1 Bestimmen Sie v(71) und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext. 2

2.2.2 Prüfen Sie, ob mit Hilfe von v belegbar ist, dass der Gletscher sich von 1950 bis 2021 um durchschnittlich etwa 115 m pro Jahr talwärts bewegt hat. 3

2.2.3 Bei der Bergung der Ausrüstungsteile wurden kleine Ausrüstungsteile übersehen, sodass diese im Eis zurückblieben. 3
Formulieren Sie eine Frage im Sachkontext, die durch Lösen der Gleichung

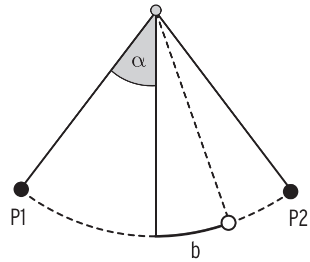
$$\int_{62}^{62+x} v(t)\,dt = -0{,}2 \cdot x + 7 \quad \text{mit } x > 0$$ beantwortet werden kann.

10

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

3 Ein Fadenpendel besteht aus einem Faden, an dessen unterem Ende eine Kugel befestigt ist. Das Pendel wird in Position P1 gebracht und zum Zeitpunkt t = 0 losgelassen. Anschließend führt es eine Schwingung aus.



Die Geschwindigkeit der Kugel wird modelliert durch v mit $v(t) = 0{,}5 \cdot \sin(5t)$; $t \geq 0$.
Dabei ist t die Zeit in Sekunden (s) und v(t) wird in Meter pro Sekunde $\left(\frac{m}{s}\right)$ angegeben.

3.1 Bestimmen Sie die Zeit, die vom Zeitpunkt des Loslassens an vergeht, bis die Kugel zum ersten Mal den Umkehrpunkt P2 erreicht. 2

3.2 Die Beschleunigung der Kugel ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit. Bestimmen Sie die momentane Beschleunigung der Kugel 0,2 Sekunden nach dem Loslassen sowie die durchschnittliche Beschleunigung innerhalb der ersten 0,2 Sekunden. 3

3.3 Die Funktion b mit $b(t) = -0{,}1 \cdot \cos(5t)$; $t \geq 0$ modelliert die Auslenkung des Pendels, wobei b(t) die „Länge" des Bogens vom tiefsten Punkt bis zur Position der Kugel zum Zeitpunkt t ist (sieheAbbildung).
Negative Werte von b(t) bedeuten dabei Auslenkungen nach links (in Richtung von P1), positive Werte bedeuten Auslenkungen nach rechts.

3.3.1 Zeigen Sie, wie man ausgehend von v auf die Funktion b gelangt. 3

3.3.2 Die Länge des Fadenpendels ist 0,4 m. 2
Berechnen Sie den Auslenkungswinkel α zum Zeitpunkt des Loslassens (siehe Abbildung).

10

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 4**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

4 Marie und Pierre Curie entdeckten 1898 gemeinsam das radioaktive Isotop Radium 226. Für dieses ist bekannt, dass die Halbwertszeit etwa 1600 Jahre beträgt. Die Halbwertszeit gibt an, wie viel Zeit vergeht, bis von einer gegebenen Menge eines zerfallenden Stoffes nur noch die Hälfte vorhanden ist.

Die Kerne von Radium zerfallen und geben dabei die sogenannte α-Strahlung ab. Der Zerfall der Radiumkerne kann mit der Funktion f mit $f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$; $t \geq 0$, beschrieben werden. Dabei sind $c > 0$ und $k < 0$ geeignete Konstanten und f(t) ist die zum Zeitpunkt t in Jahren nach Beobachtungsbeginn t = 0 vorhandene Masse von Radium 226 in Gramm (g).

4.1 Ermitteln Sie den Wert von k sowie die Masse einer Probe zu Beobachtungsbeginn, falls 20 Jahre danach noch 99,14 g Radium vorhanden sind. 3

4.2 Erläutern Sie im Sachkontext, welcher Zeitpunkt t mit dem Ansatz 2

$$\frac{f(0) - f(t)}{f(0)} = 0{,}9$$

bestimmt werden kann.

4.3 Es wird nun eine andere Probe betrachtet. Für die Modellierung von deren Zerfall gelten: $c = 150$ und $k = -4{,}3332 \cdot 10^{-4}$.

4.3.1 Geben Sie den Zeitpunkt an, an dem am meisten Radium zerfällt und bestimmen Sie zu diesem Zeitpunkt die Änderungsrate von f. 2

4.3.2 Beweisen Sie, dass die folgende Aussage wahr ist: 3

„Zu jedem beliebigen Zeitpunkt t gilt: Der Anteil, der a Jahre später von der Masse f(t) noch vorhanden ist, hängt nur von a ab."

$\overline{10}$

Teil 3 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Stochastik **Punkte**

1 Eine Firma stellt Holzspielzeuge her. Abbildung 1 illustriert die Funktionsweise eines sogenannten Galton-Bretts. Bei diesem Spielzeug werden Kugeln von oben in einen Schacht gegeben und diese prallen dann auf runde Stifte, die sie jeweils entweder links oder rechts passieren, bevor sie in einem der unteren Fächer aufgefangen werden. Das in Abbildung 1 dargestellte Galton-Brett hat die Länge vier, da jede Kugel an vier Stiften abprallt, bevor sie in einem der fünf Fächer landet. Ist ein ideales Galton-Brett waagerecht aufgestellt, so prallt jede Kugel von jedem Stift mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 nach jeweils einer der beiden Seite ab.

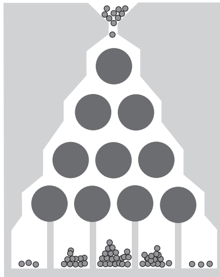


Abbildung 1

1.1 Eine Kugel wird in das Galton-Brett gegeben.

1.1.1 Erläutern Sie, warum der Pfad der Kugel durch eine Bernoulli-Kette beschrieben werden kann. Definieren Sie in diesem Zusammenhang eine binomialverteilte Zufallsvariable X und geben Sie die möglichen Werte von X für ein Galton-Brett der Länge vier an. 4

1.1.2 Berechnen Sie für ein Galton-Brett der Länge vier jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse: 4
A: Die Kugel landet in einem der beiden Fächer rechts vom mittleren Fach.
B: Die Kugel landet nicht in einem der beiden äußeren Fächer.

1.2 Erfahrungsgemäß fallen 5 % der produzierten Galton-Bretter bei der Qualitätskontrolle durch. Diese werden als mangelhaft bezeichnet. 3
Prüfen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: „Mindestens 46 Galton-Bretter müssen überprüft werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens ein mangelhaftes Brett zu finden.

1.3 Jemand stellt ein Galton-Brett der Länge acht schräg auf (vgl. Abbildung 2). Die Schrägstellung ist so, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel im mittleren Fach landet, den Wert 0,1 hat. Eine Kugel wird in das Galton-Brett gegeben. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel an den Stiften nach links abprallt. 4

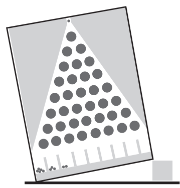


Abbildung 2

15

Hauptprüfung 2020/2021

Teil 3 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik **Punkte**

2 Bei einer Wahl betrug die Wahlbeteiligung 76 %.

2.1 Nach der Wahl werden zufällig Wahlberechtigte befragt, ob sie an der Wahl teilgenommen haben. 5
Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Von fünf Wahlberechtigten haben nur die ersten beiden gewählt.
B: Von vier Wahlberechtigten haben höchstens drei gewählt.
C: Von 20 Wahlberechtigten haben mehr als 11 aber weniger als 18 gewählt.

2.2 Insgesamt wurden 136 Wahlberechtigte zufällig befragt. 3
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei die Anzahl der Wähler genau dreimal so groß wie die Anzahl der Nichtwähler ist.

2.3 Es haben 29 % der Wähler per Briefwahl abgestimmt. Die Partei M erlangte 26 % aller Wählerstimmen. 4
Lediglich 8 % der Briefwähler wählten die Partei M.

2.3.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Wähler der Partei M nicht per Briefwahl abgestimmt hat. 3

2.3.2 Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie:
„Würde sich der Anteil der Wähler von Partei M unter den Briefwählern erhöhen, während der Anteil der Briefwähler sowie der Anteil der Wählerstimmen für Partei M mit 29 %, bzw. 26 % gleich blieben, so könnte der Anteil der Wähler von Partei M unter den Wählern, die nicht per Briefwahl abgestimmt hätten, genau 30 % betragen."

15

Teil 4 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

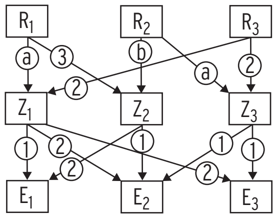
Lineare Algebra: Prozesse und Matrizen **Punkte**

1 Ein Betrieb produziert in einem ersten Schritt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3. Daraus werden in einem zweiten Schritt die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt.
Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) wird durch die nachfolgende Tabelle sowie das Verflechtungsdiagramm beschrieben.

Tabelle:

	E_1	E_2	E_3
R_1	7	5	2
R_2	6	4	1
R_3	2	6	6

Verflechtungsdiagramm:



1.1 Interpretieren Sie den Wert 5 in der Tabelle und berechnen Sie, wie viele ME der Rohstoffe benötigt werden, um jeweils 10 ME der Endprodukte zu produzieren. 3

1.2 Ermitteln Sie die Werte von a und b im Verflechtungsdiagramm. 4

1.3 Um einen reibungslosen Produktionsablauf zu gewährleisten, muss im Lager ein Mindestbestand an Rohstoffen von jeweils 50 ME vorhanden sein. Von R_1 sind noch 345 ME, von R_2 noch 285 ME und von R_3 noch 330 ME im Lager. 4
Es sollen nun 25 ME von E_2 hergestellt werden.
Ermitteln Sie die hergestellten Mengen von E_1 und E_3 , falls der Lagerbestand an Rohstoffen bis auf den Mindestbestand vollständig verarbeitet werden soll.

1.4 Ein Kunde erteilt einen Auftrag über 10 ME von E_1 und jeweils 20 ME von E_2 und E_3. Die variablen Herstellungskosten in € pro ME der Endprodukte sind durch $\overrightarrow{k_V} = (30 \quad 15 \quad 45)$ gegeben. Die Fixkosten betragen 500 Euro. 4
Berechnen Sie, wie hoch die Verkaufspreise der einzelnen Endprodukte sein müssen, damit der Gewinn 10 % der Gesamtkosten beträgt und die Preise im selben Verhältnis wie die variablen Herstellungskosten stehen.

15

Teil 4 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Lineare Algebra: Prozesse und Matrizen **Punkte**

2 Drei verschiedene Fitnessketten A, B und C konkurrieren in einer Region um die insgesamt 10 000 Kunden. Die Kunden sind entweder ohne Vertrag oder sie sind als Mitglied bei genau einer Fitnesskette für ein Jahr angemeldet. Jedes Jahr melden sich einige Kunden ohne Vertrag neu an, manche Mitglieder wechseln die Fitnesskette, manche bleiben bei ihrer Fitnesskette, einige scheiden aus und sind dann ohne Vertrag.

Die Entwicklung von einem Jahr zum nächsten lässt sich modellhaft durch die Gleichung $M \cdot \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{v_{n+1}}$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ O \end{pmatrix}$$

beschreiben. Hierbei wird die Anzahl der Mitglieder der Fitnessketten ebenfalls mit A, B und C bezeichnet. O ist die Anzahl der Kunden ohne Vertrag.

2.1 Vervollständigen Sie den Übergangsgraphen auf dem beiliegenden Arbeitsblatt 3

2.2 Interpretieren Sie den Eintrag 0,14 im Sachzusammenhang. 2
Nennen Sie die Fitnesskette, zu der ausschließlich Kunden kommen, die schon zuvor bei einer Kette angemeldet waren.

2.3 Im Jahr 2020 waren jeweils 1400 Mitglieder in den drei Ketten angemeldet. Bestimmen Sie die Anzahl der Mitglieder der drei Ketten im Jahr 2021. 3

2.4 Langfristig werden 10 % der Kunden bei der Fitnesskette A angemeldet sein und 60 % der Kunden ohne Vertrag bleiben. 3
Ermitteln Sie die Verteilung aller Kunden, die von einem Jahr auf das nächste unverändert bleibt.

2.5 In einem Jahr hat die Fitnesskette A die doppelte Anzahl von Mitgliedern, wie jede der beiden anderen Ketten. Außerdem hat die Fitnesskette C dann ein Jahr später 950 Mitglieder. 4
Ermitteln Sie die prozentuale Zunahme der Kunden ohne Vertrag.

15

MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG

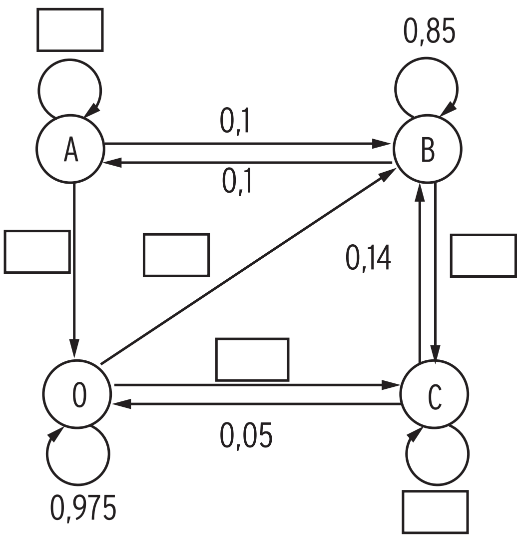
Zu- und Vorname:

Hauptprüfung 2020/2021	
2.5.1	Mathematik

Schulnummer	Schülernummer

Hauptprüfung 2020/2021		
2.5.1	Mathematik	
Arbeitsblatt	Teil 4	Aufgabe 2

Schulnummer	Schülernummer



Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

www.mvurl.de/exqd

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis

1.1.1 Nullstellen von f: f(x) = 0 $-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0$

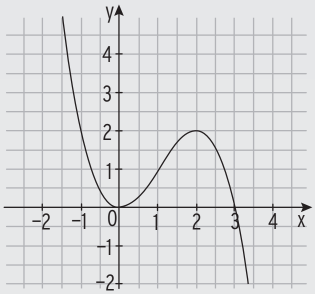
Ausklammern: $x^2 \cdot (x - 3) = 0$

Nullprodukt: $x^2 = 0 \;\vee\; x - 3 = 0$

Lösungen (doppelt; einfach): $x_{1|2} = 0;\; x_3 = 3$

Skizze des Schaubilds von f:

(doppelte Nullstelle = Berührstelle)



1.1.2 Ableitungsfunktion von f:

$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$

Bedingung für die x-Koordinate: $f'(x) = \frac{3}{2}$ $-\frac{3}{2}x^2 + 3x = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{2} = 0 \quad | \cdot \frac{2}{3}$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

Binomische Formel: $(x - 1)^2 = 0$

(doppelte) Lösung: $x = 1$

1.2 (1) Die Aussage ist falsch. Das Schaubild von s ist in einer Umgebung von $x = 4$ linksgekrümmt ($s''(4)$ ist also größer Null).

(2) Die Aussage ist wahr. Für $0 < x < 2$ besitzt das Schaubild von s einen Wendepunkt mit Wechsel von einer Links- zu einer Rechtskrümmung. Somit hat die das Schaubild der Ableitungsfunktion s′ dort einen Hochpunkt. (Die Steigungswerte von s nehmen zu bis $x = 1$, danach fallen sie.)

(3) Die Aussage ist wahr. Über [0; 4] ist der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von s und der x-Achse oberhalb der x-Achse größer als der Inhalt der Fläche unterhalb.

1.3 (1) $d(x) = D'(x)$; d ist die Ableitungsfunktion von D.

Für alle $x > 0$ gilt $d(x) > 0$, da beiden Summanden im Funktionsterm von d quadratisch und damit positiv sind. Somit ist D für $x > 0$ monoton wachsend.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1**

1.3 (2) $D'(x) = d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2 = x^{-2} + x^2$; $D''(x) = d'(x) = -2 \cdot x^{-3} + 2x = -\frac{2}{x^3} + 2x$

Bedingung für die Wendestelle von D: $d'(x) = 0$ $\quad -\frac{2}{x^3} + 2x = 0 \quad | \cdot x^3$

$$-2 + 2x^4 = 0$$

$$x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

x = 1 ist die einzige positive Lösung. Somit liegt hier die einzige positive Wendestelle von D vor.

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 2**

2.1.1 $p = \frac{2}{3}$; Ereignis A: Die Mannschaft gewinnt genau 9 von 10 Spielen.

2.1.2 Wahrscheinlichkeit: $P = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$.

Hinweis: Da die Mannschaft das erste und zweite oder das zweite und dritte oder das dritte und vierte Spiel gewinnen kann, gibt es 3 Möglichkeiten, die jeweils gleich wahrscheinlich sind.

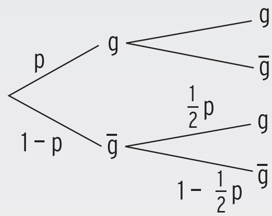
2.2 Vorgehen mithilfe des Gegenereignisses: Die Mannschaft gewinnt beide Spiele nicht.

www.mvurl.de/9e1z

$P(\text{gewinnt mind. ein Spiel}) = 1 - P(\overline{g}\,\overline{g}) = 1 - (1 - p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right)$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt laut Aufgabenstellung $\frac{4}{9}$, somit gilt:

$1 - (1 - p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right) = \frac{4}{9}$



Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 2**

2 b: blaue Kugeln (4 von 9); w: weiße Kugeln (2 von 9); g: grüne (3 von 9)

2.1 Ziehen ohne Zurücklegen; $P(A) = P(ww) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{36}$

$P(B) = P(ww) + P(w\overline{w}) + P(\overline{w}w) = \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{5}{12}$

oder über das Gegenereignis: $P(B) = 1 - P(\overline{w}\,\overline{w}) = 1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{5}{12}$

$P(C) = P(wb) + P(bw) = P(wb) = 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{2}{9}$

www.mvurl.de/evid

2.2 x gibt die Anzahl der hinzugefügten grünen Kugeln an.

Nachdem x grüne Kugeln hinzugefügt wurden, sind (x + 3) grüne Kugeln und (x + 9) Kugeln insgesamt in der Urne.

Bedingung für x: $P(gg) = \frac{x+3}{x+9} \cdot \frac{x+2}{x+8} = 0{,}5$

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 (1) ist nicht möglich; $3 \cdot A$ hat das Format 2×3, wohingegen $2 \cdot B$ das Format 3×2 hat. Da das Format ungleich ist, kann nicht addiert werden.
(2) ist möglich; Die Spaltenanzahl der Matrix A entspricht der Zeilenanzahl von B. Format der Ergebnismatrix beträgt (2×2): $A_{(2;3)} \cdot B_{(3;2)} = C_{(2;2)}$

3.2.1 Prüfen auf Orthogonalität: $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{169} \cdot \begin{pmatrix} 169 & 0 \\ 0 & 169 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit heißt die Matrix $A = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ orthogonal.

www.mvurl.de/bu63

3.2.2 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist orthogonal, da $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d.h. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und damit $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufspalten von $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^5$ und Einsetzen führt auf:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix ist, ist auch $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^5$ orthogonal.

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 3**

3.1 $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right)$$

3. Zeile: $5x_3 = 15 \Rightarrow x_3 = 3$

Einsetzen in 2. Zeile: $4x_2 - 3 = -7 \Rightarrow x_2 = -1.$

Einsetzen in 1. Zeile: $x_1 + 2 \cdot (-1) - 3 = -4 \Leftrightarrow x_1 - 5 = -4 \Rightarrow x_1 = 1.$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3.2.1 $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B \neq B \cdot A$

www.mvurl.de/iu1h

3.2.2 Probeweises Ersetzen eines Eintrages in B: $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & a \end{pmatrix}$

Bedingung: $A \cdot \widetilde{B} = \widetilde{B} \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -3-3a \\ 2 & -6+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 2+2a & -6+a \end{pmatrix}.$$

Für $a = 0$ stimmen die Einträge überein. Somit gilt $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

www.mvurl.de/bqc2

Analysis

K: $f(x) = -e^{2x} + 4e^{x}$

1.1 Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = -e^{0} + 4e^{0} = -1 + 4 = 3 \Rightarrow S_y(0|\,3)$

Schnittpunkt mit x-Achse:

$f(\ln(4)) = -e^{2\cdot\ln(4)} + 4\cdot e^{\ln(4)} = -(e^{\ln(4)})^2 + 4\cdot 4 = -4^2 + 16 = 0 \Rightarrow N(\ln(4)|\,0)$

Hinweis: $e^{\ln(4)} = 4$

1.2 Ableitung: $f'(x) = -2e^{2x} + 4e^{x} = 2e^{x}\cdot(2 - e^{x})$ (Kettenregel und Ausklammern)

$f''(x) = -4e^{2x} + 4e^{x}$

Bedingung für Extremstelle: $f'(x) = 0$ $2e^{x}\cdot(2 - e^{x}) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $2e^{x} = 0 \vee 2 - e^{x} = 0 \Rightarrow 2 = e^{x}$

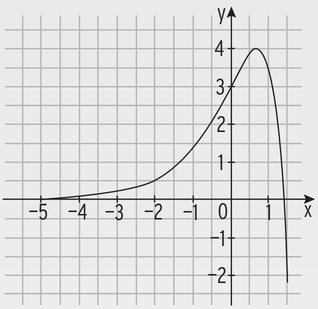
Lösung: $(e^{x} \neq 0)$ $x = \ln(2)$

Mit $f''(\ln(2)) = -4e^{2\cdot\ln(2)} + 4\cdot e^{\ln(2)} = -16 + 8 = -8 < 0$ und

$f(\ln(2)) = -e^{2\cdot\ln(2)} + 4e^{\ln(2)} = -2^2 + 4\cdot 2 = 4$

erhält man den Hochpunkt $H(\ln(2)\,|\,4)$.

1.3 Schaubild K:



1.4 Fläche A von K mit den Koordinatenachsen: $\int_0^{\ln(4)} f(x)\,dx$ $(= 4{,}5)$

Mittelwert von f auf $[0; \ln(4)]$: $m = \frac{1}{\ln(4)}\cdot\int_0^{\ln(4)} f(x)\,dx$ $\left(= \frac{4{,}5}{\ln(4)} \approx 3{,}246\ldots\right)$

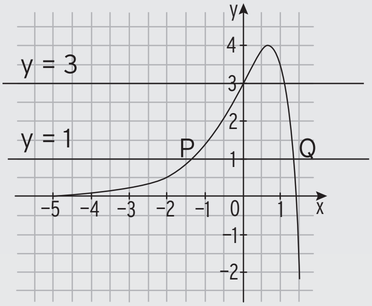
Verhältnis: $\frac{A}{m} = \ln(4) = 1{,}3862\ldots$

Die Aussage ist falsch, da der Flächeninhalt A nur etwa das 1,4-fache des Mittelwertes ist.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

1.5.1 Am Schaubild ist ersichtlich: Um zwei Schnittstellen zu erhalten, von denen eine positiv und eine negativ ist,
sind für c nur folgende Werte möglich:
$0 < c < 3$



1.5.2 Für c = 1 gilt: f(x) = 1 $\quad -e^{2x} + 4e^x = 1$

$$e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$$

Substitution $u = e^x$: $\quad u^2 - 4u + 1 = 0$

Lösungen in u mit Formel: $u_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$

$$u_1 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}\ ;\ u_2 = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

Rücksubstitution: $\quad u = e^x = 2 - \sqrt{3}\ ; \quad u = e^x = 2 + \sqrt{3}$

Lösungen in x: $\quad x_1 = \ln(2 - \sqrt{3}); \quad x_2 = \ln(2 + \sqrt{3})$

Die x-Werte haben den selben Betrag: $\ln(2 - \sqrt{3}) = -\ln(2 + \sqrt{3})$

Die Punkte $P(\ln(2 - \sqrt{3}) \mid 1)$ und $Q(\ln(2 + \sqrt{3}) \mid 1)$ haben denselben Abstand von der y-Achse und diese halbiert somit $\overline{PQ}$.

1.6 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = f(x) + f(-x)$

Symmetrie zur y-Achse: $g(-x) = g(x)$

Symmetrie zum Ursprung: $g(-x) = -g(x)$

Es gilt: $g(-x) = f(-x) + f(-(-x)) = f(-x) + f(x) = g(x)$

Somit ist das Schaubild von g symmetrisch zur y-Achse.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Anwendungsorientierte Analysis

2.1 x: Anzahl von Jahren ab 2012 (d.h. $x = 0$ entspricht dem Jahr 2012)

Im Jahr 2012 beträgt der Abstand des Gletscherendes zum Fundort der Ausrüstung 7 km. Die angegebene Gerade modelliert den um durchschnittlich 0,2 km pro Jahr abnehmenden Abstand, denn die Steigung der angegebenen Gerade beträgt $-0{,}2$.

2.2.1 $v(71) = 0{,}1319\ldots$ (in km/Jahr) $(71 = 2021 - 1950)$

Im Jahr 2021 bewegt sich der Gletscher mit einer Geschwindigkeit von etwa 132 Meter pro Jahr talwärts.

2.2.2 Mittelwert der Funktion v auf [0; 71]:

$$\frac{1}{71} \cdot \int_0^{71} (7{,}56 \cdot 10^{-6} \cdot t^2 - 2{,}27 \cdot 10^{-4} \cdot t + 0{,}11)\,dt$$

$$= \frac{1}{71} \cdot \left[\frac{7{,}56 \cdot 10^{-6}}{3} \cdot t^3 - \frac{2{,}27 \cdot 10^{-4}}{2} \cdot t^2 + 0{,}11 \cdot t\right]_0^{71}$$

$$= \frac{1}{71} \cdot \left(\frac{7{,}56 \cdot 10^{-6}}{3} \cdot 71^3 - \frac{2{,}27 \cdot 10^{-4}}{2} \cdot 71^2 + 0{,}11 \cdot 71\right) = 0{,}1146\ldots$$

Somit hat sich der Gletscher von 1950 bis 2021 um durchschnittlich etwa 115 m pro Jahr talabwärts bewegt.

www.mvurl.de/quyn

2.2.3 Wie viele Jahre x dauert es von 2012 an, bis die kleinen Ausrüstungsteile, die bei der Bergung im Eis verblieben sind, vom Gletscherende freigegeben werden?

Erläuterung: Über $\int_{62}^{62+x} v(t)\,dt$ wird der vom Gletscher in dieser Zeit zurückgelegte Weg talwärts berechnet.

$-0{,}2 \cdot x + 7$ berechnet den Abstand des Gletscherendes vom ursprünglichen Fundort.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Anwendungsorientierte Analysis

www.mvurl.de/yo74

3.1 Die Periodendauer von v beträgt: $T = \frac{2\pi}{5} = 1{,}2566...$ (in s).

Bis zum ersten Mal der Umkehrpunkt P2 erreicht wird, was an negativen Funktionswerten von v deutlich wird, verstreicht eine halbe Periode von ca. 0,63 Sekunden.

3.2 $a(t) = v'(t) = 2{,}5 \cdot \cos(5t)$; (in $\frac{m}{s^2}$)

a(t) gibt die momentane Beschleunigung der Kugel an.

Momentane Beschleunigung nach 0,2 s: $a(0{,}2) = 1{,}3507$ ...

Durchschnittliche Beschleunigung innerhalb der ersten 0,2 s:

$\frac{v(0{,}2)}{0{,}2} = 2{,}1036...\left(\text{in } \frac{m}{s^2}\right)$

Hinweis: Auch über den Mittelwert der Funktion a im angegeben Zeitraum gelangt man zu dieser Berechnung:

$$\frac{1}{0{,}2} \cdot \int_0^{0{,}2} (a(t))\,dt = \frac{1}{0{,}2} \cdot [v(t)]_0^{0{,}2} = \frac{1}{0{,}2} \cdot (v(0{,}2) - v(0)) = \frac{1}{0{,}2} \cdot v(0{,}2)$$

3.3.1 Die Geschwindigkeit v ist die momentane Änderungsrate der zurückgelegten Wegstrecke, welche durch die Funktion b angegeben wird.

Damit ist b eine Stammfunktion von v: $b(t) = -0{,}1 \cdot \cos(5t) + c$.

Nach einer Viertel Periode $\left(t = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10}\right)$ befindet sich das Pendel genau unter dem Aufhängepunkt und hat keine Auslenkung: $b\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0$.

Um c zu bestimmen wird eine Punktprobe durchgeführt:

$-0{,}1 \cdot \cos(5 \cdot \frac{\pi}{10}) + c = 0 \Rightarrow c = 0;$

Man erhält: $b(t) = -0{,}1 \cdot \cos(5t)$

3.3.2 α wird über das Verhältnis von Auslenkwinkel zur entsprechenden Länge des Kreisbogens berechnet.

Umfang des Kreises: $U = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}4 = 0{,}8\pi$ (entspricht 360°)

Aus der Funktion b ergibt sich eine maximale Länge des Kreisboges von 0,1.

Es gilt: $\frac{\alpha}{360°} = \frac{0{,}1}{0{,}8\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{0{,}1}{0{,}8\pi} \cdot 360° = \frac{45°}{\pi} = 14{,}3239\ ...°$

Damit beträgt der Winkel etwa 14,3°.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 4**

Anwendungsorientierte Analysis

4.1 $c = f(0)$ gibt den Anfangsbestand an; nach 1600 Jahren ist noch der halbe

Anfangsbestand $\frac{c}{2}$ vorhanden: $\frac{c}{2} = c \cdot e^{k \cdot 1600}$

Dividieren durch c ($c > 0$): $\frac{1}{2} = e^{1600k}$

Logarithmieren: $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 1600k$

Lösung: $k = -0{,}0004332...$

www.mvurl.de/li45

Somit: $f(t) = c \cdot e^{-0{,}0004332 \cdot t}$

Aus $f(20) = 99{,}14$ folgt: $c \cdot e^{-0{,}0004332 \cdot 20} = 99{,}14 \Rightarrow c = 100{,}002...$

Insgesamt erhält man: $f(t) = 100{,}002 \cdot e^{-0{,}0004332 \cdot t}$

4.2 $f(t)$ beschreibt die zum Zeitpunkt t vorhandene Masse an Radium 226 in g.

$f(0) - f(t)$ ist die Masse an Radium in g, die von Beobachtungsbeginn bis zum Zeitpunkt t zerfallen sind.

Durch $\frac{f(0) - f(t)}{f(0)} = 0{,}9$ bzw. $f(0) - f(t) = 0{,}9 \cdot f(0)$ kann somit der Zeitpunkt bestimmt werden, an dem 90 % der zu Beobachtungsbeginn vorhandenen Radiummasse zerfallen sind.

4.3.1 Momentane Änderungsrate:

1. Ableitung mit der Kettenregel: $f'(t) = -0{,}06498 \cdot e^{-0{,}0004332 \cdot t}$; $t \geq 0$

f' ist streng monoton steigend (da $f''(t) > 0$

oder der Graph von f' strebt von unten an die t-Achse für $t \to \infty$)

Zeitpunkt an dem am meisten Radium zerfällt: $t = 0$

Änderungsrate: $f'(0) = -0{,}06498 \cdot e^0 = -0{,}06498$ (in g pro Jahr)

4.3.2 Der Bestand zum Zeitpunkt t beträgt $f(t)$ mit $f(t) = 150e^{-0{,}0004332 \cdot t}$.

$(-4{,}332 \cdot 10^{-4} = -0{,}0004332)$

a Jahre später beträgt der Bestand $f(t + a)$.

Anteil: $\frac{f(t+a)}{f(t)} = \frac{150 \cdot e^{-0{,}0004332 \cdot (t+a)}}{150 \cdot e^{-0{,}0004332 \cdot t}} = \frac{e^{-0{,}0004332 \cdot t} \cdot e^{-0{,}0004332 \cdot a}}{e^{-0{,}0004332 \cdot t}}$

$\frac{f(t+a)}{f(t)} = e^{-0{,}0004332 \cdot a}$

Somit hängt der Anteil nur von a ab.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 3 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Stochastik

www.mvurl.de/9qyd

1.1.1 Beim Aufprall auf einen Stift sind nur zwei Ausgänge (links oder rechts) möglich. Die Wiederholungen sind stochastisch unabhängig (konstante Wahrscheinlichkeiten). Somit liegt eine Bernoulli-Kette vor.

X: Anzahl, wie oft die Kugel die Stifte rechts passiert.

Mögliche Werte für X: 0, 1, 2, 3, 4.

1.1.2 X (wie in 1.1.1) ist binomialverteilt mit den Parametern n = 4 und p = 0,5.

$P(A) = P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}6875 = 0{,}3125$

$\overline{B}$: Die Kugel wird viermal nach rechts oder viermal nach links abgelenkt

$P(B) = 1 - P(X = 0) - P(X = 4) = 0{,}875 \ \left(= 1 - 2 \cdot 0{,}5^4\right)$

1.2 Bei n Versuchen mindestens ein mangelhaftes Brett:

P(mind. ein mangelhaftes Brett) = 1 − P(kein mangelhaftes Brett) = $1 - 0{,}95^n$

Bedingung: $1 - 0{,}95^n > 0{,}9 \ \Rightarrow \ 0{,}95^n < 0{,}1$

Die Gleichung $0{,}95^n = 0{,}1$ hat die Lösung $n = \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}95)} = 44{,}8...$

Man muss also mindestens 45 Bretter überprüfen. Die Aussage ist falsch.

Alternative Lösung:

Durch $1 - 0{,}95^{45} = 0{,}9005... > 0{,}9$ kann direkt gezeigt werden, dass nur mind. 45 Bretter ausreichen und die Aussage falsch ist.

1.3 n = 8; k = 4 (Kugel im mittleren Fach);

p = unbekannte Wahrscheinlichkeit, dass Kugel nach links abprallt

Bedingung: $P(X = 4) = \binom{8}{4} \cdot p^4 \cdot (1 - p)^4 = 0{,}1 \ \Leftrightarrow \ 70 \cdot p^4 \cdot (1 - p)^4 = 0{,}1$

$\Leftrightarrow \ p^4 \cdot (1 - p)^4 = \frac{1}{700} \ \Leftrightarrow \ (p \cdot (1 - p))^4 = \frac{1}{700} \ \Leftrightarrow p \cdot (1 - p) = \sqrt[4]{\frac{1}{700}} \approx 0{,}19443$

Quadratische Gleichung: $p - p^2 = 0{,}19443 \ \Rightarrow \ p^2 - p + 0{,}19443 = 0$

Lösungen in p mit Formel: $p_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0{,}19443}}{2}$

$p_1 \approx 0{,}264; \qquad p_2 \approx 0{,}735$

Aufgrund der Schrägstellung muss $p > 0{,}5$ gelten. Somit ist p = 0,735... die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 3 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik

2.1 $P(A) = 0{,}76^2 \cdot 0{,}24^3 = 0{,}007984...$ (Die Reihenfolge ist bekannt.)

X: Anzahl der Wähler

$n = 4$; $P(B) = P(X \leq 3) = 1 - 0{,}76^4 = 0{,}6663...$

$n = 20$; $P(C) = P(11 < x < 18) = P(X \leq 17) - P(X \leq 11) = 0{,}8594...$

2.2 y: Anzahl der Nichtwähler

Bedingung: $y + 3y = 136 \Rightarrow y = 34$

X: Anzahl der Wähler unter 136 Wahlberechtigten

$X = 136 - 34 = 102$; $P(X = 102) = 0{,}07593...$

www.mvurl.de/gpa6

2.3.1 M: Wähler hat Partei M gewählt mit $P(M) = 0{,}26$;

B: Wähler hat per Briefwahl abgestimmt mit $P(B) = 0{,}29$

Zusätzlich gilt: $P_B(M) = 0{,}08$

Aus $P_B(M) = \frac{P(B \cap M)}{P(B)}$ folgt $P(B \cap M) = P_B(M) \cdot P(B) = 0{,}08 \cdot 0{,}29 = 0{,}0232$

Aus $P(B \cap M) + P(\overline{B} \cap M) = P(M)$ folgt

$P(\overline{B} \cap M) = P(M) - P(B \cap M) = 0{,}26 - 0{,}0232 = 0{,}2368$

Es liegt eine Fragestellung zu einer bedingten Wahrscheinlichkeit vor, da nur die Wähler der Partei M die Grundmenge darstellen

$P_M(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}2368}{0{,}26} = 0{,}91 = 91\,\%$

2.3.2 $P(B \cap M) + P(\overline{B} \cap M) = P(M)$

$\Leftrightarrow 0{,}29 \cdot y + 0{,}71 \cdot 0{,}3 = 0{,}26$

$\Rightarrow\ y = P_B(M) = \frac{47}{290} = 0{,}162... > 0{,}08$

Damit ist die Aussage wahr.

Alternative: Mit $P(B \cap M) = P_B(M) \cdot P(B)$ und $P(\overline{B} \cap M) = P_{\overline{B}}(M) \cdot P(\overline{B})$

erhält man $0{,}29 \cdot P_B(M) + 0{,}71 \cdot P_{\overline{B}}(M) = 0{,}26$

Einsetzen von $P_{\overline{B}}(M) = 0{,}30$ ergibt $0{,}29 \cdot P_B(M) + 0{,}71 \cdot 0{,}30 = 0{,}26$

und damit $P_B(M) = 0{,}162 > 0{,}08$

Damit ist die Aussage wahr.

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 4 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Lineare Algebra: Prozesse und Matrizen

1 RE-Matrix $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$; RZ-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & a \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; ZE-Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.1 Der Wert 5 gibt an, dass für die Herstellung von 1 ME des Endproduktes E_2 5 ME des Rohstoffs R_1 benötigt werden.

$$\vec{r} = C \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 110 \\ 140 \end{pmatrix}$$

Es werden 140 ME von R_1, 110 ME von R_2 und 140 ME von R_3 benötigt.

1.2 $A \cdot B = C$

$$\begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & a \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+6 & 2a+3 & 2a \\ 2b & b+a & a \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

www.mvurl.de/zwqy

Gleichsetzen entsprechender Einträge ergibt $a = 1$ und $b = 3$.

(Proben in den weiteren Einträgen ergeben wahre Aussagen)

1.3 $C \cdot \vec{p} = \vec{r} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 25 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 295 \\ 235 \\ 280 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7x + 2y + 125 \\ 6x + y + 100 \\ 2x + 6y + 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 295 \\ 235 \\ 280 \end{pmatrix}$

aus Zeile 1: $7x + 2y = 170$ (I) aus Zeile 2: $6x + y = 135$ (II)

(I) − 2 · (II): $-5x = -100 \Rightarrow x = 20$

Einsetzen in (II): $6 \cdot 20 + y = 135 \Rightarrow y = 15$

(Probe in Zeile 3 ergibt eine wahre Aussage.)

Es werden 20 ME von E_1 und 15 ME von E_3 hergestellt.

1.4 $\overrightarrow{k_v} = (30 \quad 15 \quad 45)$; $\vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$; $K_f = 500$;

Gesamtkosten $K = \overrightarrow{k_v} \cdot \vec{p} + K_f = (30 \quad 15 \quad 45) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} + 500 = 2000$

Preisvektor mit Preisen, welche zueinander im selben Verhältnis wie die variablen Herstellungskosten stehen: $\vec{u} = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) = (2u_2 \quad u_2 \quad 3u_2)$

Damit der Gewinn 10 % der Gesamtkosten beträgt, müssen die Erlöse 2200 € betragen: $\vec{u} \cdot \vec{p} = 2200 \Leftrightarrow (2u_2 \quad u_2 \quad 3u_2) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = 2200$

$$100u_2 = 2200 \Rightarrow u_2 = 22$$

Der Verkaufspreis für 1 ME von E_1 muss 44 €, für 1 ME von E_2 22 € und für 1 ME von E_3 66 € betragen.

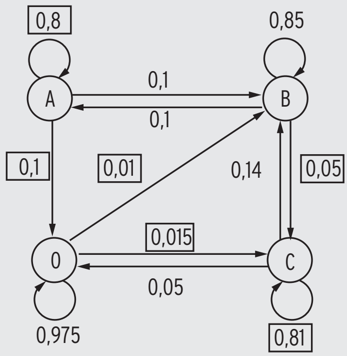
Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 4 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Lineare Algebra: Prozesse und Matrizen **Seite 1/2**

www.mvurl.de/cynd

2.1 Ausfüllen mithilfe der Übergangsmatrix M



2.2 14 % der Mitglieder der Fitnesskette C wechseln innerhalb eines Jahres in die Fitnesskette B.

Zu A kommen ausschließlich Kunden, die zuvor schon bei einer Kette angemeldet waren (kein Wechsel von Zustand O zu Zustand A).

2.3 Die Kundenzahl 10 000 setzt sich zusammen aus 3 · 1400 + 5800.

$$\overrightarrow{v_{2021}} = M \cdot \overrightarrow{v_{2020}} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1400 \\ 1400 \\ 1400 \\ 5800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1260 \\ 1584 \\ 1291 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Anzahlen nach einem Jahr: A = 1260, B = 1584, C = 1291

2.4 Bedingung: $M \cdot \vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ b \\ 0{,}3 - b \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ b \\ 0{,}3 - b \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen der Einträge in der ersten Zeile führt auf:

$0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}1b = 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}1b = 0{,}02 \Rightarrow b = 0{,}2$

(Probe in den weiteren Zeilen führt jeweils auf eine wahre Aussage.)

Stabilitätsvektor der stationären Verteilung: $\begin{pmatrix} 0{,}1 \cdot 10000 \\ 0{,}2 \cdot 10000 \\ 0{,}1 \cdot 10000 \\ 0{,}6 \cdot 10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1000 \\ 6000 \end{pmatrix}$

Lösungen Hauptprüfung 2020/2021

Teil 4 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Lineare Algebra: Prozesse und Matrizen **Seite 2/2**

2.5 Bedingung: $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x \\ 10000 - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 950 \\ \dots \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 150 + 0{,}8x \\ 9750 - 3{,}65x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 950 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen der Einträge in der dritten Zeile führt auf:

$150 + 0{,}8x = 950 \;\Rightarrow\; x = 1000$

Anzahl der Kunden ohne Vertrag im Vorjahr: $10000 - 4 \cdot 1000 = 6000$

Anzahl der Kunden ohne Vertrag im Jahr danach: $9750 - 3{,}65 \cdot 1000 = 6100$

Prozentuale Zunahme: $\frac{100}{6000} \approx 0{,}0167$ somit ca. 1,67 %

Hauptprüfung 2021/2022

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1** **Lösungen Seite 261 - 272**

Analysis **Punkte**

1.1 Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f ist gegeben durch $f(x) = 2 \cdot e^x$. 4

Ordnen Sie die Werte

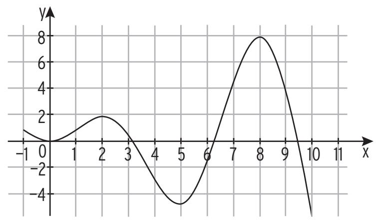
$f(0)$, $f'(1)$ und $\int_0^1 f(x)\,dx$

nach deren Größe in aufsteigender Reihenfolge.

1.2 Die Funktion g ist gegeben durch

$g(x) = x \cdot \sin(x); \quad -1 \leq x \leq 10$.

Die Abbildung zeigt das Schaubild K_g von g.



1.2.1 Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von K_g mit der ersten Winkelhalbierenden $y = x$. Geben Sie die Anzahl der Berührpunkte an. 3

1.2.2 Zeigen Sie, dass die Funktion G mit 3

$G(x) = -x \cdot \cos(x) + \sin(x); -1 \leq x \leq 10,$

eine Stammfunktion von g ist.

Geben Sie zudem die Stammfunktion von g an, deren Schaubild den Punkt $(0 \mid 7)$ enthält.

1.3 Ermitteln Sie eine Gleichung der quadratischen Funktion h, die die beiden folgenden Eigenschaften hat: 5

- Der Graph von h schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x + 1$ im Punkt $(0 \mid 1)$ unter einem rechten Winkel.
- Die x und die y-Koordinate des Extrempunkts des Graphen von h stimmen überein.

$\overline{15}$

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik **Punkte**

2 Eine ideale Münze zeigt nach jedem Wurf entweder Kopf oder Zahl an.

2.1 Man wirft die Münze solange bis sie Zahl zeigt, jedoch höchstens dreimal.

2.1.1 Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, das dieses Zufallsexperimt volständig beschreibt. 2

2.1.2 Bestimmen Sie, wie oft man die Münze im Mittel wirft. 2

2.2 Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie. 4

(1) Wird die Münze fünfmal hintereinander geworfen, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „genau einmal Zahl" größer als $\frac{1}{8}$.

(2) Es gibt eine Anzahl von Würfen für die Folgendes gilt: Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "genau dreimal Zahl" ist gleich der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "genau zweimal Zahl".

8

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik

Ein Stapel besteht aus sechs zufällig angeordneten Karten. Davon zeigen zwei Karten das Bild "Bube", zwei das Bild "Dame" und zwei das Bild "König". Die oberste Karte des Stapels wird von einem Spieler gezogen und deren Bild wird notiert. Vor dem nächsten Zug wird die Karte wieder in den Stapel zurückgelegt und dieser neu gemischt.
Der Spieler zieht dreimal nacheinander die oberste Karte des Stapels.

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse: 5

E_1: Der Spieler hat drei verschiedene Bilder gezogen.

E_2: Der Spieler hat genau einmal einen Buben gezogen.

E_3: Der Spieler hat mindestens einmal einen Buben oder mindestens zwei mal einen König gezogen.

2.2 Im Folgenden beträgt der Einsatz 5 Euro. 3

Der Spieler erhält nur dann eine Auszahlung, falls mindestens zweimal das gleiche Bild gezogen wird. Die Auszahlung beträgt 18 Euro, falls der Spieler dreimal das gleiche Bild zieht.
Ermitteln Sie die Auszahlung, die der Spieler im verbleibenden Fall erhalten muss, damit es sich um ein faires Spiel handelt.

8

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Die Matrix S ist gegeben durch

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

E bezeichnet die Einheitsmatrix vom Format 2×2.

3.1 Im Folgenden ist $\vec{x}$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ ein Vektor, sodass $S \cdot \vec{x} = \vec{x}$ gilt.

3.1.1 Vereinfachen Sie den Ausdruck 2

$(S^4 + S^3 + S^2 + S - E) \cdot \vec{x}$

soweit wie möglich.

3.1.2 Bestimmen Sie einen solchen Vektor $\vec{x}$. 2

3.2 Eine quadratische Matrix heißt *stochastische Matrix*, falls alle ihre Elemente nicht negativ sind und für jede Spalte die Summe der Elemente den Wert 1 hat. Somit ist S eine stochastische Matrix. 3

Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

"Ist M eine beliebige stochastische Matrix vom Format 2×2, so ist $S \cdot M$ eine stochastische Matrix."

$\overline{7}$

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 3**

3 Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3.1 Berechnen Sie die Inverse von A. 2

3.2 Begründen Sie, dass die Gleichung $B \cdot \vec{x} = A \cdot \vec{y}$ 2

für jede Wahl von $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

keine eindeutige Lösung $\vec{x}$ besitzt.

3.3 Untersuchen Sie, ob die Matrizengleichung 3

$A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$

gilt, ohne eine der vier Matrizen A^2, B^2, $A + B$ und $A - B$ dabei zu berechnen.

$\overline{7}$