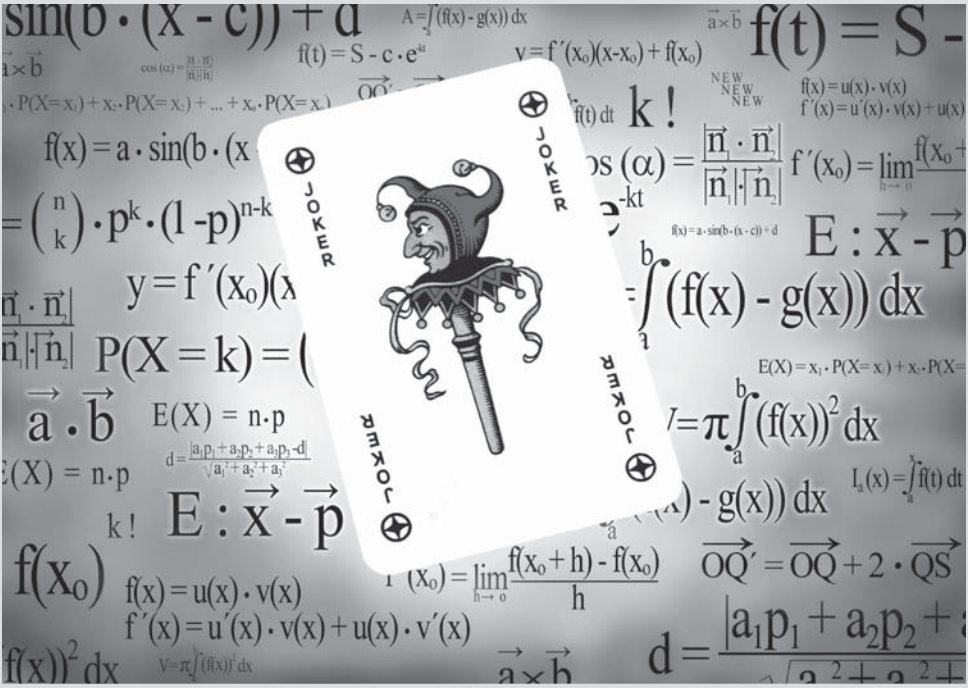
Ott
Rosner

Optimale Vorbereitung auf die Mathematik-Prüfung

zur Fachhochschulreife (am Berufskolleg)

Verständliche Zusammenfassungen
und Basisübungen



Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner

Lehrer an der Kaufm. Schule in Schwäbisch Hall

stefan_rosner@hotmail.com

* * * * *

3. Auflage 2018

Gesamtherstellung:

MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de

lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-0297- 4

3. Parabel schneidet die *x*-Achse, eine Gerade bzw. eine weitere Parabel

Hierdurch erhält man stets eine quadratische Gleichung, welche durch die **abc- oder pq-Formel** gelöst wird. Dabei wird der **Term unter der Wurzel** als **Diskriminante (D)** bezeichnet. Deren **Vorzeichen** entscheidet über die Anzahl an Lösungen der Gleichung und damit über die Anzahl der Schnittstellen.

abc-Formel : $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

pq-Formel : $-\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$

Parabel und *x* - Achse (im Fall **D > 0**)

Beispiel: $y = x^2 - x - 2$

Ansatz : $\mathbf{x^2 - x - 2 = 0}$ ***(0 für y einsetzen)***

abc-Formel oder pq-Formel

$x_{1/2} = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{1 \pm \sqrt{\mathbf{9\ (D > 0)}}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$

$x_{1/2} = -(-0,5) \pm \sqrt{(-0,5)^2 - (-2)} = 0,5 \pm \sqrt{\mathbf{2,25\ (D > 0)}} = 0,5 \pm 1,5$

$x_1 = -1;\ x_2 = 2$ (**2** Lösungen) $x_1 = 0,5 - 1,5 = -1;\ x_2 = 0,5 + 1,5 = 2$

Parabel und Gerade (im Fall **D = 0**)

Beispiel: $y = x^2 - x + 1,25$ (Parabel); $y = x + 0,25$ (Gerade)

Ansatz : $\mathbf{x^2 - x + 1,25 = x + 0,25}$ ***(gleichsetzen)***

$x^2 - 2x + 1 = 0$

abc-Formel oder pq-Formel

$x_{1/2} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 \pm \sqrt{\mathbf{0\ (D = 0)}}}{2} = \dfrac{2 \pm 0}{2} = 1$

$x_{1/2} = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1} = 1 \pm \sqrt{\mathbf{0\ (D = 0)}} = 1 \pm 0$

$x_{1/2} = 1$ (**1** Lösung) $x_{1/2} = 1 \pm 0 = 1$

Parabel und weitere Parabel (im Fall **D < 0**)

Beispiel: $y = x^2 - x + 1,25;\quad y = -x^2 + 3x - 1,75$

Ansatz : $\mathbf{x^2 - x + 1,25 = -x^2 + 3x - 1,75}$ ***(gleichsetzen)***

$2x^2 - 4x + 3 = 0$

abc-Formel oder pq-Formel

$x^2 - 2x + 1,5 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{\mathbf{-8\ (D < 0)}}}{4}$

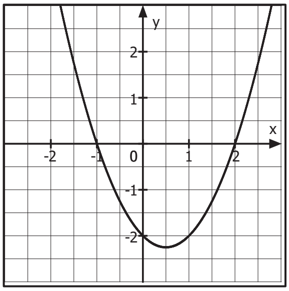
$x_{1/2} = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1,5} = 1 \pm \sqrt{\mathbf{-0,5\ (D < 0)}}$

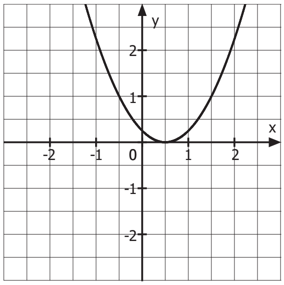
(**0** Lösungen)

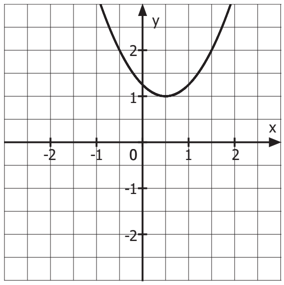
www.mvurl.de/scop

Übersicht: Gegenseitige Lage in Abhängigkeit von der Diskriminante (D)

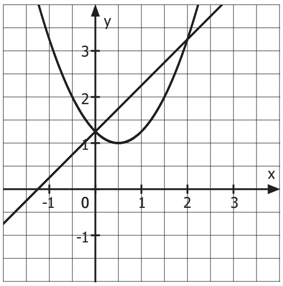
Parabel und *x*-Achse

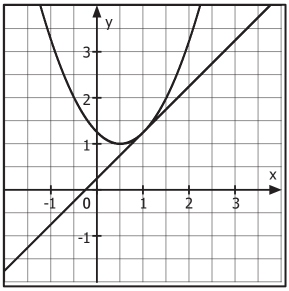


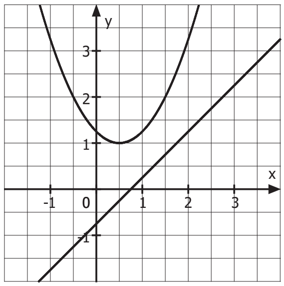




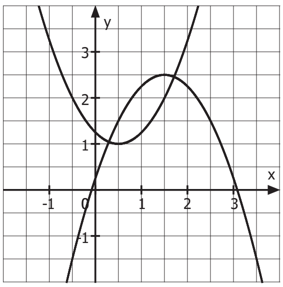
Parabel und Gerade

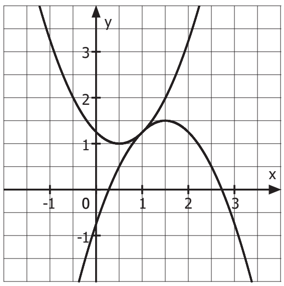


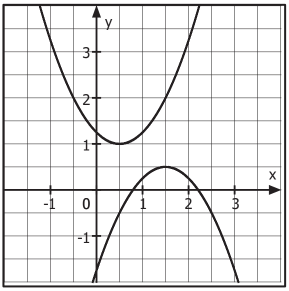




Parabel und weitere Parabel





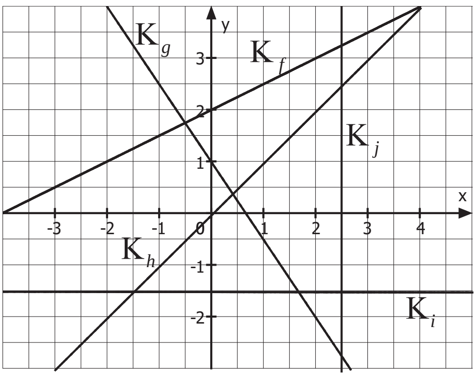
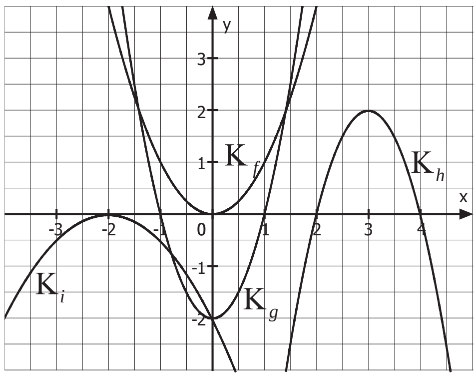


D > 0 **2** Lösungen, **2** Schnittstellen	**D = 0** **1** Lösung, **1** Schnittstelle (Berührstelle)	**D < 0** **0** Lösungen, **0** Schnittstellen

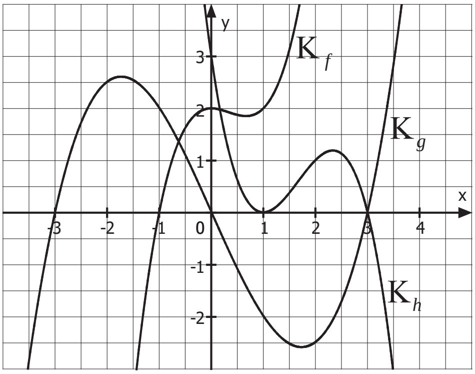
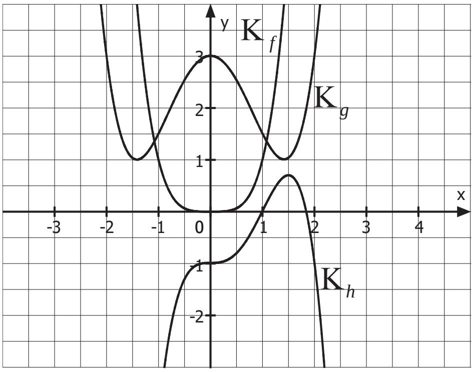
Hinweis: Umrahmt ist jeweils die auf der Vorseite berechnete Situation.

2. Funktionen

2.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

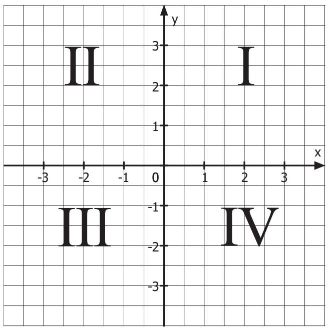
1. Grades (Geraden)	2. Grades (Parabeln)
Hauptform : $\boldsymbol{y = mx + b}$	**Allg.:** $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$
Vorgehen zum Einzeichnen: $y = \frac{\text{hoch / runter}}{\text{rechts}} \cdot x +$ „*y-Achsen-abschnitt*“	Scheitelpunkt-Ansatz: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s \mid y_s)$
Steigung aus 2 Punkten: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$a > 0$: nach oben geöffnet bzw. Verlauf von II nach I
Steigungswinkel aus Steigung bestimmen: $m = \tan(\alpha)$	$a < 0$: nach unten geöffnet bzw. Verlauf von III nach IV
Parallele Geraden: $m_1 = m_2$ (gleiche Steigung)	Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 \mid c)$
Senkrechte (orthogonale) Geraden: Steigungen sind negative Kehrwerte voneinander: $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ bzw. $m_1 \cdot m_2 = -1$	Bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^2 + c$ (nur gerade Hochzahlen)
1. Winkelhalbierende: $y = x$ $(m = 1)$ 2. Winkelhalbierende: $y = -x$ $(m = -1)$	
	
K_f: $y = \frac{1}{2}x + 2$ K_g: $y = -\frac{3}{2}x + 1$ K_h: $y = x$ (1. Winkelhalbierende) K_i: $y = -1{,}5$ K_j: $x = 2{,}5$	K_f: $f(x) = x^2$ K_g: $g(x) = 2x^2 - 2$ K_h: $h(x) = -2(x-3)^2 + 2$ K_i: $i(x) = -0{,}5x^2 - 2x - 2$

~~www.mvurl.de/vuzo~~

3. Grades	4. Grades
Allg.: $\boldsymbol{f(x)=ax^3+bx^2+cx+d}$	**Allg.:** $\boldsymbol{f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}$
$a>0$: Verlauf von III nach I	$a>0$: Verlauf von II nach I
$a<0$: Verlauf von II nach IV	$a<0$: Verlauf von III nach IV
Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0\mid d)$	Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0\mid e)$
Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung: $f(x)=ax^3+cx$ (nur ungerade Hochzahlen)	Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x)=ax^4+cx^2+e$ (nur gerade Hochzahlen)
	
K_f: $f(x)=x^3-x^2+2$ K_g: $g(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x$ K_h: $h(x)=-x^3+5x^2-7x+3$	K_f: $f(x)=x^4$ K_g: $g(x)=0{,}5x^4-2x^2+3$ K_h: $h(x)=-x^4+2x^3-1$

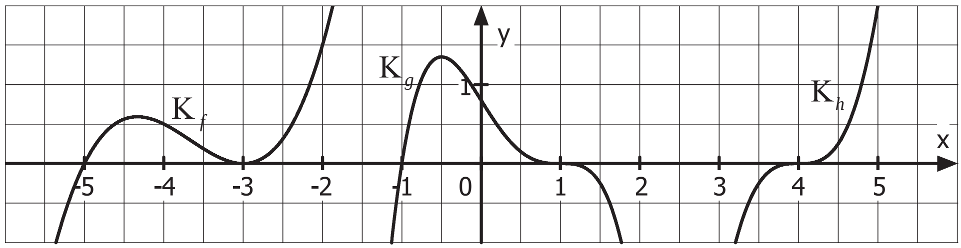
Tipp (für alle ganzrationalen Funktionen)
$\boldsymbol{a>0}$: Verlauf von ... nach **I** („endet **oben**“)
$\boldsymbol{a<0}$: Verlauf von ... nach **IV** („endet **unten**“)

Die Quadranten



2.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen

Beispiele



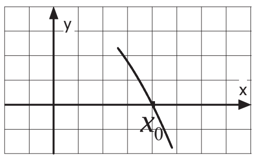
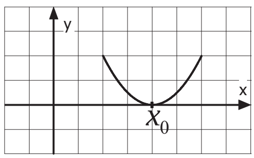
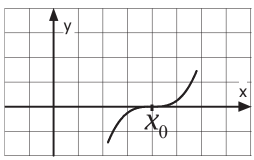
$K_f: f(x) = 0{,}5 \cdot (x+5) \cdot (x+3)^2$ $\quad K_g: g(x) = -0{,}8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$ $\quad K_h: h(x) = 2 \cdot (x-4)^3$

Aufbau des Nullstellenansatzes (am Beispiel)

$$g(x) = -0{,}8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$$

Verlauf von III nach IV	$x_0 = -1$ ist einfache Nullstelle	$x_{1/2/3} = +1$ ist dreifache Nullstelle

Übersicht (für ganzrationale Funktionen)

Vielfachheit Nullstelle	**Faktor im Nullstellenansatz**	**Skizze**	**Beschreibung**
Einfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0) \cdot \ldots$		Schaubild **schneidet** x-Achse (mit Vorzeichenwechsel VZW)
Doppelte Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^2 \cdot \ldots$		Schaubild **berührt** x-Achse (ohne VZW)
Dreifache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^3 \cdot \ldots$		Schaubild **schneidet** und **berührt** x-Achse (mit VZW)

www.mvurl.de/ehue

4. Differenzialrechnung

4.1 Ableitungsregeln

Nr.	Beispiel	Vorgehen
	Elementarregeln	
1	$f(x) = x^5$ $f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4$ $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x \quad (= 2 \cdot x^1)$ $f(x) = x \quad (= x^1)$ $\downarrow$ $f'(x) = 1 \quad (= 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1)$	$f(x) = x^{Exponent}$ $f'(x) = Exponent \cdot x^{Exponent-1}$ (Potenzregel)
2	$f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$	*Abschreiben*
3	$f(x) = \sin(x)$ $f'(x) = \cos(x)$	$\sin$ $\nearrow \quad \searrow$ $-\cos \qquad \cos$ $\nwarrow \quad \swarrow$ $-\sin$ *(Im Uhrzeigersinn!)*
4	$f(x) = \cos(x)$ $f'(x) = -\sin(x)$	
	Vorgehensregeln	
5	$f(x) = \mathbf{3} \cdot x^2$ $f'(x) = \mathbf{3} \cdot 2x = 6x$	*„Zahlen“ mit $\cdot$ oder $:$ „bleiben“* (Faktorregel)
6	$f(x) = x^2 \mathbf{+2}$ $f'(x) = 2x$	*„Zahlen“ mit $+$ oder $-$ „verschwinden“*
7	$f(x) = x^2 - 4x$ $f'(x) = 2x - 4$	*$+$ und $-$ Zeichen unterteilen die Funktion in Teilfunktionen, welche einzeln abgeleitet werden* (Summenregel)

Nr.	Beispiel	Vorgehen
Anwendungen der Kettenregel		
8	$f(x) = e^{2x}$ $f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$	$f(x) = e^{kx}$ $f'(x) = k \cdot e^{kx}$
9	$f(x) = \sin(2x)$ $f'(x) = 2 \cdot \cos(2x)$	$f(x) = \sin(kx)$ $f'(x) = k \cdot \cos(kx)$
10	$f(x) = \cos(2x)$ $f'(x) = -2 \cdot \sin(2x)$	$f(x) = \cos(kx)$ $f'(x) = -k \cdot \sin(kx)$

Die allgemeine Kettenregel, aus welcher sich die Regeln 8-10 ergeben, lautet:

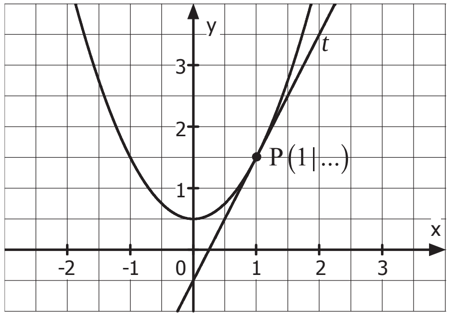
$$f(x) = u(v(x))$$

$$f'(x) = \underbrace{u'(v(x))}_{\textit{Äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{v'(x)}_{\textit{Innere Ableitung}}$$

4.2 Tangente

1. Aufgabentyp (Tangente im Kurvenpunkt)

Gegeben ist die Funktion
f mit $f(x) = x^2 + 0{,}5$.
Bei dem x-Wert 1 wird eine Tangente und an das Schaubild angelegt.
Berechnen Sie deren Gleichung.



Vorgehen: Ermittlung einer Tangente im Kurvenpunkt (geg. $f(x)$ und x-Wert des Kurvenpunktes)	
1. *y*-Wert des Kurvenpunktes berechnen (Einsetzen in $f(x)$)	$f(1) = 1^2 + 0{,}5 = 1{,}5 \quad \rightarrow \mathrm{P}(1 \mid 1{,}5)$
2. Tangentensteigung berechnen (Einsetzen in $f'(x)$)	$f'(x) = 2x$ $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \quad (= m_t)$
3. Tangentengleichung berechnen (Einsetzen in $y = m \cdot x + b$)	$y = m_t \cdot x + b$ $1{,}5 = 2 \cdot 1 + b$ $1{,}5 = 2 + b \quad \mid -2$ $-0{,}5 = b$ $\Rightarrow$ Tangente: $y = 2x - 0{,}5$

Alternative: Durch Einsetzen in die nachfolgende **Punkt-Steigungs-Form** (siehe Merkhilfe) kann alles in einem Schritt ausgeführt werden:

Formel (allg.): $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$ (mit u als Berührstelle)

Einsetzen: $y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$
$y = 2 \cdot (x - 1) + 1{,}5$
$y = 2x - 0{,}5$ (Tangente)

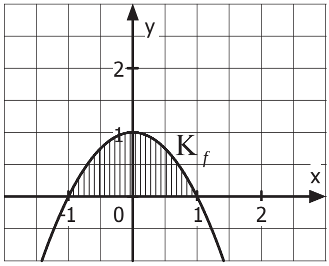
www.mvurl.de/pm16

5.2 Flächen zwischen Schaubild und *x*-Achse

1. Fläche oberhalb der *x*-Achse

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 1$.
Welchen Inhalt besitzt die schraffierte Fläche?



Ansatz

$$\mathbf{A} = \int_a^b f(x)\,dx = [\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

Lösung

$$\mathrm{A} = \int_{-1}^{1} \left(-x^2+1\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}\cdot 1^3 + 1 - \left(-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 + (-1)\right) \approx 1{,}333 \text{ FE}$$

Rechte Grenze nach oben, linke nach unten — *aufleiten* — *Rechte und linke Grenze in Stammfunktion einsetzen, voneinander subtrahieren*

Merkregel

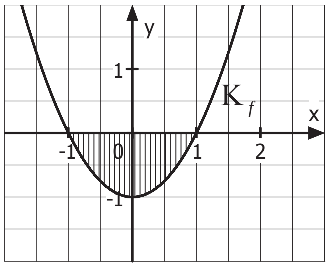
$$\mathbf{A} = \int_{\text{linke Grenze}}^{\text{rechte Grenze}} (\textbf{Funktionsterm})\, dx$$

2. Fläche unterhalb der *x*-Achse

Unterschied

$$\mathrm{A} = -\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

Minuszeichen beachten!
Sonst: negatives Ergebnis



Hinweis: Falls Sie für das Integral ein negatives Ergebnis erhalten, können Sie für den Wert des Flächeninhaltes einfach den entsprechenden positiven Wert nehmen.

www.mvurl.de/gign

3. Zusammengesetzte Fläche

Beispiel : Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{3}x$. Welchen Inhalt besitzt die schraffierte Fläche?

Vorgehen (am Beispiel)

1. Nullstellen bestimmen

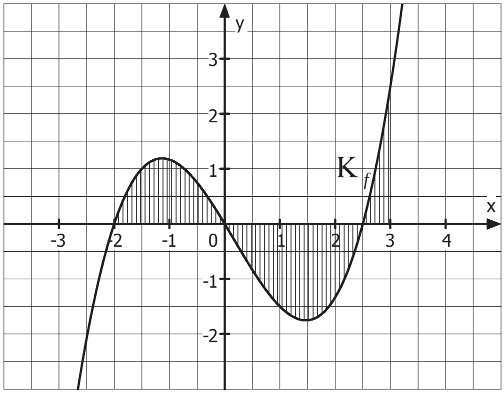
$f(x) = 0 \quad \to x_1 = -2;\ x_2 = 0;\ x_3 = 2{,}5$

2. Teilflächeninhalte bestimmen

$A_1 = \int_{-2}^{0} f(x)dx \approx 1{,}56;$

$A_2 = \int_{0}^{2{,}5} -f(x)\ dx \approx 2{,}82;$

$A_3 = \int_{2{,}5}^{3} f(x)\ dx \approx 0{,}57$



3. Gesamtflächeninhalt bestimmen

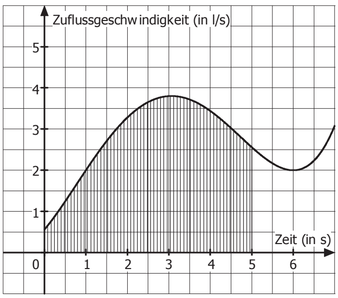
$A = A_1 + A_2 + A_3 \approx 1{,}56 + 2{,}82 + 0{,}57 = 4{,}95$

Von Nullstelle zu Nullstelle integrieren!
Ansonsten werden positive und negative Integralwerte zu einer **„Flächenbilanz“** verrechnet.

4. Interpretation von Flächeninhalten

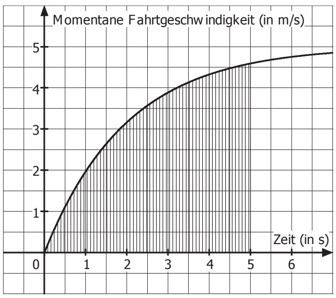
Der Inhalt der markierten Fläche gibt an …

Beispiel 1



… welche Wassermenge (in l) innerhalb von 5 s zugeflossen ist.

Beispiel 2



… welche Strecke (in m) innerhalb von 5 s zurückgelegt wurde.

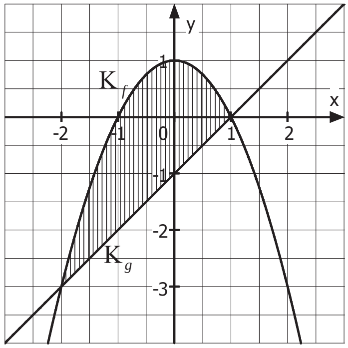
Tipp : Einheit Integral („Fläche“) = Einheit Funktion · Einheit Variable (z.B. $m = \frac{m}{s} \cdot s$)

5.3 Flächen zwischen zwei Schaubildern

1. Einzelfläche

Beispiel

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = -x^2 + 1$ und g mit $g(x) = x - 1$.
Welchen Inhalt besitzt die schraffierte Fläche?



Ansatz

$$\mathbf{A} = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

Lösung

Rechte Grenze nach oben, linke nach unten

Oberer Funktionsterm minus unterer Funktionsterm

eventuell vereinfachen

aufleiten

$$\text{A} = \int_{-2}^{1} \left((-x^2 + 1) \; - \; (x - 1) \right) dx \; = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2 \right) dx \; = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^{1}$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \; - \; \left(-\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) \right) \; = \; 4{,}5 \text{ FE}$$

Rechte und linke Grenze in Stammfunktion einsetzen, voneinander subtrahieren

Merkregel

$$\mathbf{A} = \int_{\text{linke Grenze}}^{\text{rechte Grenze}} (\textbf{oberer Funktionsterm} - \textbf{unterer Funktionsterm}) \, dx$$

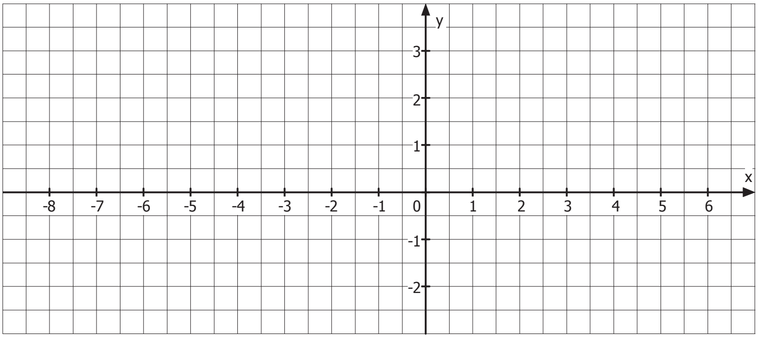
Bemerkung (Lage zur x - Achse)

Bei einer Fläche, die zwischen zwei Schaubildern liegt, ist es hingegen völlig unerheblich, ob sich diese oberhalb oder unterhalb der x-Achse befindet.

Aufgabe 12 : Skizzieren Sie die Schaubilder in das Koordinatensystem.

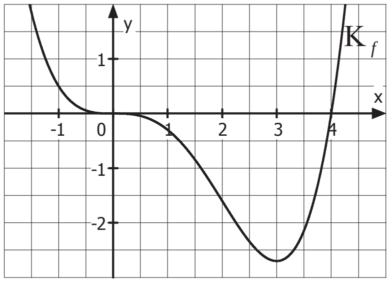
$K_f : f(x) = -(x+7)^2$ $\qquad$ $K_g : g(x) = (x+5)^2 \cdot (x+3)^2$

$K_h : h(x) = x^3$ $\qquad$ $K_i : i(x) = -(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)\cdot(x-6)$



Aufgabe 13

Ermitteln Sie die Funktionsgleichung zum nebenstehenden Schaubild mit Hilfe des Nullstellenansatzes.



Aufgabe 14 : Untersuchen Sie auf Asymptoten wie im Beispiel.

Funktion	**Asymptote**	**für $x \to +\infty$**	**für $x \to -\infty$**
a) $f(x) = e^x - 2$	$y = -2$	☐	☒
b) $f(x) = 1 + e^{-x}$	________	☐	☐
c) $f(x) = 2e^{-x+1} - 2x - 1$	________	☐	☐
d) $f(x) = e^x - x + 1$	________	☐	☐
e) $f(x) = e^{-x} - 2e^{-x} + x$	________	☐	☐

Aufgabe 15 : Ergänzen Sie die folgenden Sätze.

a) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -2e^x - 1$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = e^x$ durch Spiegelung an der ___-Achse, durch Streckung um den Faktor ___ in ___-Richtung und durch Verschiebung um ___ nach ________.

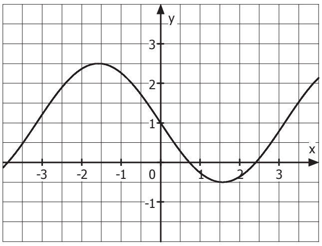
b) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = e^{-x} - 2$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = e^x$ durch Spiegelung an der ___-Achse und Verschiebung um ___ nach ________.

c) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -4\sin(x) + 1$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = \sin(x)$ durch Spiegelung an der ___-Achse, durch Streckung um den Faktor ___ in ___-Richtung und durch Verschiebung um ___ nach ________.

d) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = \sin(2x) + 4$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = \sin(x)$ durch Streckung um den Faktor ___ in ___-Richtung (Periodenlänge = ___) und durch Verschiebung um ___ nach ________.

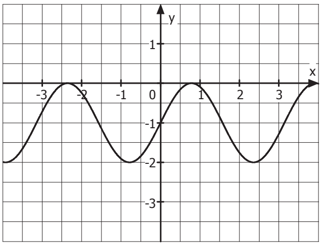
Aufgabe 16 : Ermitteln Sie jeweils eine mögliche zugehörige Funktionsgleichung.

a)



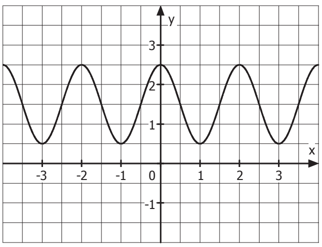
$f(x) =$ ________________

b)



$f(x) =$ ________________

c)



$f(x) =$ ________________

3. Gleichungen

Aufgabe 17

Lösen Sie die Gleichungen.

a) $-x^2 = 3 - 4x$ **b)** $x^3 - 2x^2 = x^2$ **c)** $6x - x^4 = 4x$

d) $1 - e^{4x+3} = -4$ **e)** $\cos(x) - 1 = 0$ **f)** $3e^x(e^x - 1) = -e^x$

g) $\frac{3}{2}x^4 - 2 = x^4$ **h)** $2x^4 - 24x^2 = -72 + 2x^2$ **i)** $2e^{2x} - 17e^x + 8 = 0$

j) $0 = 2\sin(x)$ **k)** $2e^{2x} - e^x = 2e^x$ **l)** $2x \cdot (x^2 - 1) = 0{,}5 - 2x$

m) $(e^x - 1) \cdot (1 - 2x^3) = 0$ **n)** $(e^{5x-2} - 7) \cdot (x^2 - 4) = 0$ **o)** $\cos(x) - 0{,}5 = 0$

Geben Sie bei den trigonometrischen Gleichungen jeweils 2 Lösungen an.

Aufgabe 18

Entscheiden Sie, welchem Gleichungstyp bzw. Lösungsvorgehen die Gleichungen zugeordnet werden können.

Nr.	Gleichung	Typ 1 Gegen-operation	Typ 2 S. v. Nullpr.	Typ 3 abc- bzw. pq-Formel	Typ 4 Substitution führt zu $\ldots u^2 + \ldots u + \ldots = 0$
1	$3x^3 = -2$	☐	☐	☐	☐
2	$x^3 - 2x = 0$	☐	☐	☐	☐
3	$-x^4 - 2x^2 = x^3$	☐	☐	☐	☐
4	$-x^2 - 5 = -x$	☐	☐	☐	☐
5	$4x^4 = 3$	☐	☐	☐	☐
6	$-x^4 - 2x^2 = 2$	☐	☐	☐	☐
7	$-x = -2x + 1$	☐	☐	☐	☐
8	$2e^{1-2x} - 1 = 3$	☐	☐	☐	☐
9	$2e^{2x} = 3e^x$	☐	☐	☐	☐
10	$e^{2x} - e^x - 2 = 0$	☐	☐	☐	☐

c)
Schnitt von: $y = -x^2 - 4x - 4$ und x-Achse.
Bild rechts

Schnitt von: $y = -x^2 - 3x$ und $y = x + 4$
Bild links

Schnitt von: $y = -0{,}5x^2 - 3x - 2$
und $y = 0{,}5x^2 + x + 2$
Bild mittig

Hinweis: In allen Fällen erhält man einen Berührpunkt, da die Diskriminante den Wert 0 hat.

Aufgabe 9

$f(x) = -x^3 - 2x + 2$; Grad 3; $S_y(0\,|\,2)$;
von II nach IV; weder noch

$f(x) = 2x^3 + x$; Grad 3; $S_y(0\,|\,0)$;
von III nach I; symm. zum Ursprung

$f(x) = -x^4 - 2x^2 - 1$; Grad 4; $S_y(0\,|\,-1)$;
von III nach IV; symm. zur y-Achse

$f(x) = -x^4 + 1$; Grad 4; $S_y(0\,|\,1)$;
von III nach IV; symm. zur y-Achse

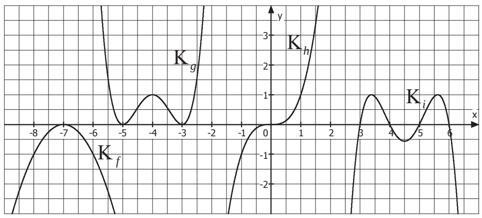
Aufgabe 10
Hinweis: Prüfen Sie Grad, Schnittpunkt mit y-Achse, Verlauf und Symmetrie.

a) A: $f_3(x)$ B: $f_6(x)$ C: $f_4(x)$
b) A: $f_3(x)$ B: $f_5(x)$ C: $f_6(x)$

Aufgabe 11

K_f: $f(x) = 5 \cdot (x+6) \cdot (x+5) \cdot (x+4)$
K_g: $f(x) = -2 \cdot (x+2) \cdot x^3$
K_h: $f(x) = 3 \cdot (x-2) \cdot (x-4)^2$
K_i: $f(x) = -(x-7)^3$

Aufgabe 12



Aufgabe 13

Ablesen: $N_{1/2/3}(0\,|\,0)$; $N_4(4\,|\,0)$; $P(-1\,|\,0{,}5)$

$f(x) = a \cdot x^3 \cdot (x-4)$

Weiteren Punkt $P(-1\,|\,0{,}5)$ einsetzen:

$$\begin{aligned} 0{,}5 &= a \cdot (-1)^3 \cdot (-1-4) \\ 0{,}5 &= a \cdot (-1) \cdot (-5) \\ 0{,}5 &= 5a \qquad |:5 \\ 0{,}1 &= a \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x) = 0{,}1 \cdot x^3 \cdot (x-4)$

Aufgabe 14

	Asymptote	für $x \to +\infty$	für $x \to -\infty$
a)	$y = -2$	☐	☒
b)	$y = 1$	☒	☐
c)	$y = -2x - 1$	☒	☐
d)	$y = -x + 1$	☐	☒
e)	$y = x$	☒	☐

Aufgabe 15

a) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -2e^x - 1$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = e^x$ durch Spiegelung an der x-Achse, durch Streckung um den Faktor 2 in y-Richtung und durch Verschiebung um 1 nach unten.

b) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = e^{-x} - 2$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = e^x$ durch Spiegelung an der y-Achse und Verschiebung um 2 nach unten.

c) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -4\sin(x) + 1$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = \sin(x)$ durch Spiegelung an der x-Achse, durch Streckung um den Faktor 4 in y-Richtung und durch Verschiebung um 1 nach oben.

d) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = \sin(2x) + 4$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = \sin(x)$ durch Streckung um den Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung (Periodenlänge $= \frac{2\pi}{2} = \pi$) und durch Verschiebung um 4 nach oben.

Aufgabe 16

$f(x) = a \cdot \sin(k \cdot x) + b,$
$f(x) = a \cdot \cos(k \cdot x) + b;$

a) Man erkennt, dass das Schaubild zu einer an der x-Achse gespiegelten Sinuskurve gehört.

• $b = 1$ Mittellinie auf Höhe 1
$\left(\text{oder mit } \frac{2{,}5 + (-0{,}5)}{2} = \frac{2}{2} = 1\right)$
• $a = -1{,}5$ (max. Abstand von 1,5 zur Mittellinie)
$\left(\text{oder mit } \frac{2{,}5 - (-0{,}5)}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5\right)$
$a < 0$: Spiegelung an x-Achse
• $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$
$\Rightarrow f(x) = -1{,}5 \cdot \sin(x) + 1$

b) Man erkennt, dass das Schaubild zu einer Sinuskurve gehört.
• $b = -1$ Mittellinie auf Höhe -1
$\left(\text{oder mit } \frac{0 + (-2)}{2} = \frac{-2}{2} = -1\right)$
• $a = 1$ (max. Abstand von 1 zur Mittellinie)
$\left(\text{oder mit } \frac{0 - (-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1\right)$
• $k = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$
$\Rightarrow f(x) = \sin(2x) - 1$

c) Man erkennt, dass das Schaubild zu einer Kosinuskurve gehört.
• $b = 1{,}5$ Mittellinie auf Höhe $1{,}5$
$\left(\text{oder mit } \frac{2{,}5 + 0{,}5}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5\right)$
• $a = 1$ (max. Abstand von 1 zur Mittellinie) $\left(\text{oder mit } \frac{2{,}5 - 0{,}5}{2} = \frac{2}{2} = 1\right)$
• $k = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{2} = \pi$
$\Rightarrow f(x) = \cos(\pi \cdot x) + 1{,}5$