Ott
Lengersdorf

Abitur 2022 | *Grundkurs GTR/CAS*

Aufgabensammlung zur zentralen Abiturprüfung
Mathematik am Berufskolleg – Berufliches Gymnasium –
Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung

Nordrhein-Westfalen

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Norbert Lengersdorf
Oberstudienrat am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

Umschlag: Kreis links: www. adpic.de
Kreis rechts: Robert Kneschke – Fotolia.com

* * * * *

13. Auflage 2021

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0478-13
ISBN 978-3-8120-1058-0

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält auf die neue Prüfungsordnung für das Berufskolleg mit gymnasialer Oberstufe in Nordrhein-Westfalen abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur 2022 an beruflichen Gymnasien im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung. **Alle Aufgaben sind entspechend den Abiturvorgaben 2022 ausgewählt worden.**
Die zentrale Abiturprüfung 2022 besteht aus zwei Teilen, einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil A und einem Prüfungsteil B mit Hilfsmittel (GTR/CAS).
Die Aufgaben für den Grundkurs sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten:
Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra.
Dem pandemiebedingten Distanzlernen wird Rechnung getragen durch eine Fokussierung auf inhaltliche Schwerpunkte für die schriftliche Abiturprüfung für das Abitur 2022.

Im Analysis-Teil werden als thematischer Schwerpunkt die ganzrationalen Funktionen und die Exponentialfunktionen und die Modellierung von berufsbezogenen Anwendungen mit Hilfe dieses Funktionstyps verlangt. Dabei handelt es sich um das Modell der vollständigen Konkurrenz mit Betriebsminimum, Konsumentenrente, sowie die Absatzentwicklung.
Die Stochastik behandelt fokussiert die bedingte Wahrscheinlichkeit, die Binomialverteilung mit Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung.
Die Lineare Algebra hat den Schwerpunkt Lineare Gleichungssysteme sowie mehrstufige Produktionsprozesse, Lineare Optimierung mit grafischem Lösungsverfahren.

Die Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.
Die Aufgaben sind als Übungsaufgaben zu verstehen, im Umfang und in den Fragestellungen. Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.

Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.
An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.
Autor und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung 2022

Grundkurs

Aufgaben-teil	Aufgabentyp	Aufgaben-zahl	Dauer	Punkte
Teil A	Eine Aufgabe mit drei Teilaufgaben zur Analysis, Linearen Algebra und Stochastik; Mindestens 2 der Teil-aufgaben mit Anwendungsbezug.	1	max. 45 Minuten	21
Teil B	Eine Aufgabe zur Analysis, eine Aufgabe zur Linearen Algebra und eine Aufgabe zur Stochastik mit Hilfsmitteln für GTR oder CAS.	3	min. 180 Minuten	84
	Darstellungsleistung Teil A und B			5
Summe			225 Minuten	110

Die Aufgaben sowohl im Teil A als auch im Teil B bestehen jeweils aus Teilaufgaben.

Organisation

Beide Prüfungsteile werden zu Beginn ausgegeben.

Zu Beginn der Klausur wird der Prüfungsteil A (Aufgabe ohne Hilfsmittel) bearbeitet; die Zeit beträgt maximal 45 Minuten. SchülerIn bearbeitet alle Aufgaben.

Wenn der Prüfling die Aufgabe und die Lösungen abgegeben hat, werden ihm die für den Prüfungsteil B zugelassenen Hilfsmittel (GTR oder CAS; Formelsammlung) ausgehändigt. SchülerIn bearbeitet alle Aufgaben.

Die Gesamtbearbeitungszeit für beide Prüfungsteile beträgt im Grundkurs 225 Minuten.

Für Prüflinge, die die Aufgaben und die Lösungen des Prüfungsteils A vorzeitig abgeben, verlängert sich entsprechend die Bearbeitungszeit für den Prüfungsteil B.

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist in beiden Prüfungsteilen der Klausur zugelassen.

I Hilfsmittelfreier Teil A der Zentralen Abiturprüfung 2021

Dieser Teil der Abiturprüfung enthält 3 Aufgaben entsprechend den Abiturvorgaben, davon mindestens zwei mit Anwendungsbezug.

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis **Lösungen Seite 18**

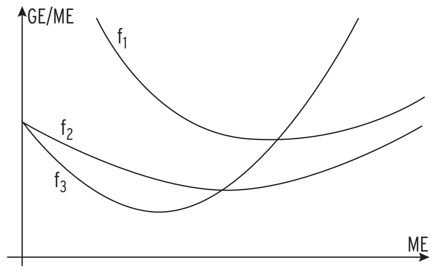
Aufgabe 1 **Punkte**

Zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a, c, d > 0$, $b < 0$,

x in ME, K(x) in GE,

sind in der nebenstehenden Abbildung die Graphen der Grenzkostenfunktion, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion dargestellt.

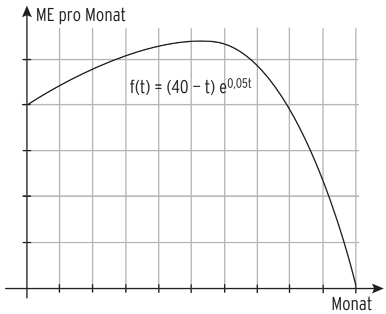


1.1 Ordnen Sie dem jeweiligen Graphen die entsprechende ökonomische Funktion begründet zu. 3

1.2 Beweisen Sie, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge bei $x = -\frac{b}{2a}$ liegt. 3

Aufgabe 2

Die monatlichen Absatzzahlen eines Produkts werden mit $f(t) = (40 - t)e^{0,05t}$, (t in Monaten, f(t) in ME/Monat) modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem das Produkt auf dem Markt abgesetzt werden kann. 2

2.2 Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei t = 20 liegt. 4

($f''(t) = -\frac{1}{400}\, t\, e^{0,05t}$ kann verwendet werden.)

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

Lösungen Seite 19

Aufgabe 3

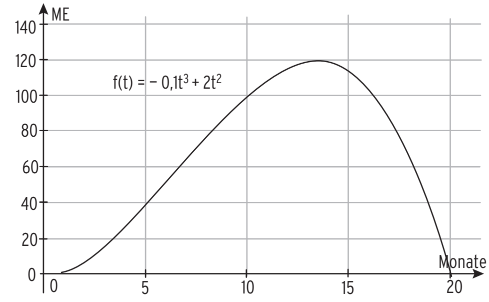
Punkte

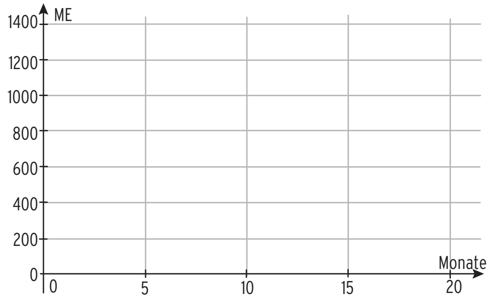
Die monatlichen Absatzzahlen eines neuartigen Produkts werden mit

$f(t) = -\frac{1}{10}t^3 + 2t^2$

(t in Monaten, $f(t)$ in ME/Monat)

modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.





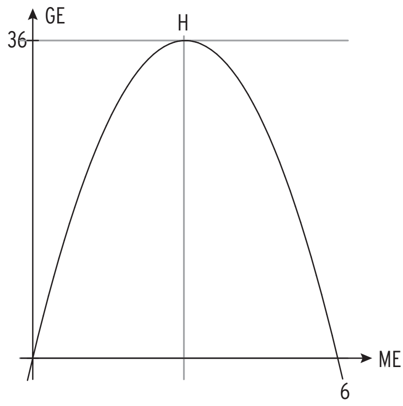
3.1 Bestimmen Sie die in den ersten 20 Monaten insgesamt abgesetzte Menge. 3

3.2 Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem den Graphen der Funktion, die den Gesamtabsatz in Abhängigkeit von der Zeit angibt. 3

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm für die Erlösfunktion unter der Voraussetzung, dass es sich um eine ganzrationale Funktion 2. Grades handelt.

b) Ergänzen Sie den Graphen der 1. Ableitung in das Koordinatensystem. Beschreiben Sie den Verlauf des Ableitungsgraphen mathematisch und ökonomisch.



Hilfsmittelfreier Teil - Analysis **Lösungen Seite 28/29**

Aufgabe 28

Punkte

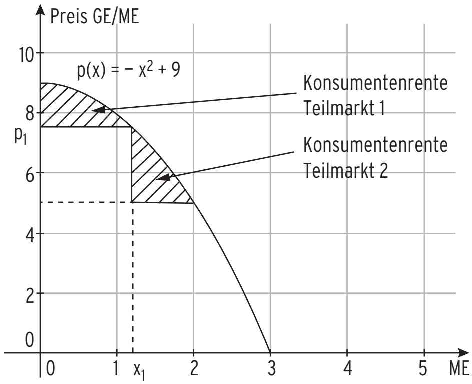
Die Preisentwicklung eines Produkts entspricht der Nachfragefunktion p mit

$p(x) = -x^2 + 9$

x in ME, p(x) in GE/ME.

Das Produkt wird auf dem Teilmarkt 1 für p_1 GE/ME und auf dem Teilmarkt 2 für 5 GE/ME verkauft.

Es werden insgesamt 2 ME abgesetzt (vgl. nebenstehende Abbildung).



1 Beschreiben Sie den Einfluss der Höhe des Preises auf die Konsumentenrente des jeweiligen Teilmarkts. 2

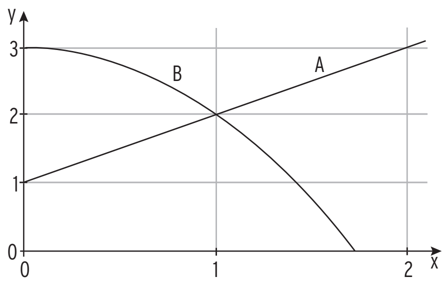
2 Weisen Sie nach, dass die gesamte Konsumentenrente optimal abgeschöpft wird, wenn $x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}}$ (ME) ist. 4

Aufgabe 29

Die Abbildung zeigt die Graphen einer Angebots- und einer Nachfragefunktion.

a) Ordnen Sie begründet zu. Geben Sie die Funktionsterme an.

b) Berechnen Sie die Konsumentenrente und kennzeichnen Sie diese in der Abbildung.



Aufgabe 30

Für die Angebotsfunktion eines Massengutes gilt die Vorschrift der Form: $p_A(x) = ax^2 + b$.

Für die Angebotsfunktion gelten folgende Bedingungen:

Beträgt der Marktpreis des Gutes 10 GE, so wird das Gut nicht mehr angeboten.

Das Marktgleichgewicht wird bei einer Absatzmenge von 60 ME und einem Marktpreis von 64 GE/ME erreicht. Berechnen Sie die Werte für a und b.

Berechnen Sie die Produzentenrente.

Aufgabe 31

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{-1}^{1} (\sqrt{2} \cdot x)^2 \, dx$.

Lösungen – Hilfsmittelfreier Teil der Zentralen Abiturprüfung ab 2017

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis Lösungen

Aufgabe 1 **Aufgaben Seite 8**

1.1 Der Graph der Grenzkostenfunktion schneidet den Graphen der variablen Stückkostenfunktion im Betriebsminimum, den der Stückkostenfunktion im Betriebsoptimum. Also gehört f_3 zur Grenzkostenfunktion. Die kurzfristige Preisuntergrenze ist geringer als die langfristige Preisuntergrenze, so dass f_2 der variablen Stückkostenfunktion und f_1 der Stückkostenfunktion zugeordnet werden kann.

1.2 Minimum der variablen Stückkosten:

$k_v(x) = a\,x^2 + bx + c$; $k_v'(x) = 2ax + b$

Notwendig und hinreichend bei ertragsgesetzlicher Kostenfunktion:

$k_v'(x) = 0$ $\qquad 2ax + b = 0$

$x = -\frac{b}{2a}$

$x = -\frac{b}{2a}$ ist Minimalstelle, da $k_v''(x) = 2a > 0$

Aufgabe 2

2.1 Nullstellenbetrachtung

$f(t) = 0$ $\qquad (40 - t)e^{0,05t} = 0$

da $e^{0,05t} \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ $\qquad t = 40$

Nach 40 Monaten verschwindet das Produkt vom Markt.

2.2 Extremwertbetrachtung: Notwendige Bedingung $f'(t) = 0$:

$f'(t) = 0,05(40 - t)e^{0,05t} - e^{0,05t} = e^{0,05t}\,(0,05(40 - t) - 1)$

(Produkt- und Kettenregel)

$f'(20) = 0$ $\qquad 0,05(40 - 20) - 1 = 0$ wahr

Dazu hinreichend für Maximum: $f''(20) = -\frac{1}{400} \cdot 20 \cdot e^1 = -\frac{e}{20} < 0$

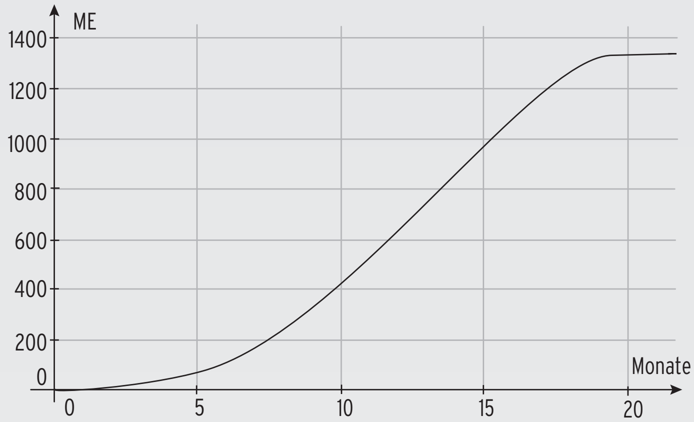
Hilfsmittelfreier Teil - Analysis Lösungen

Aufgabe 3 **Aufgaben Seite 9**

3.1 Die gesamte Absatzmenge der ersten 20 Monate wird mit dem Integral berechnet.

$$\int_0^{20} f(t)dt = \int_0^{20} \left(-\tfrac{1}{10}t^3 + 2t^2\right)dt = \left[-\tfrac{1}{40}t^4 + \tfrac{2}{3}t^3\right]_0^{20} = -4000 + \frac{16000}{3} = 1333{,}3 \ \text{(ME)}$$

3.2



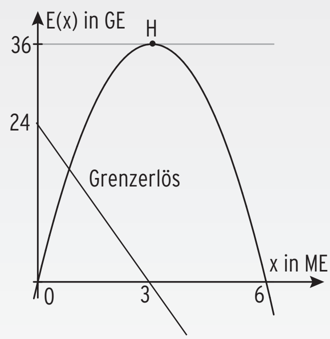
Aufgabe 4

a) Ansatz: $E(x) = ax^2 + bx$ wegen $E(0) = 0$
$E'(x) = 2ax + b$

Bedingungen und LGS:	$E(3) = 36$	$9a + 3b = 36$
		$3a + b = 12 \quad \mid \cdot(-1)$
	$E'(3) = 0$	$6a + b = 0$
Addition ergibt:		$3a = -12 \Leftrightarrow a = -4$
Einsetzen in $6a + b = 0$:		$b = 24$
Funktionsterm für die Erlösfunktion:		$E(x) = -4x^2 + 24x$

Hinweis: $E(6) = 0$ führt auf $36a + 6b = 0 \Leftrightarrow 6a + b = 0$

b) Graph der 1. Ableitung: fallende Gerade, die oberhalb und unterhalb der Abszissenachse im 1. und 4. Quadranten verläuft ($x \geq 0$).
Sie schneidet die x-Achse an der Maximalstelle von E.
Mit jeder zusätzlich verkauften ME wird der zusätzliche Erlös kleiner. Ab 3 ME nimmt der Erlös ab, weil der Grenzerlös E′ ($E'(x) = -8x + 24$) negativ wird.



Hilfsmittelfreier Teil - Lineare Algebra **Lösungen Seite 40/41**

Lösungen Seite 40/41

Aufgabe 13 **Punkte**

Eine Firma stellt aus drei unterschiedlichen Rohstoffen vier Zwischenprodukte her. 5

Aus den Zwischenprodukten entstehen in einer zweiten Produktionsstufe die Endprodukte E_1 und E_2. Die Materialkosten für E_1 und E_2 betragen (42,4 72,2), die Kosten für die Fertigung von je einer ME der Zwischenprodukte und der Endprodukte sind durch folgende Vektoren gegeben: $\vec{k}_Z = (1 \quad 0{,}5 \quad 1 \quad 0{,}6)$; $\vec{k}_E = (6 \quad 8)$.

Für die Zwischenprodukt-Endproduktmatrix B gilt $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Die Endprodukte sollen zu einem Preis am Markt angeboten werden, der mindestens 25% über den variablen Herstellkosten liegt. Bestimmen Sie die Preisuntergrenze für E_1 und E_2.

Aufgabe 14

Eine Firma produziert in einem ersten Schritt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2. Daraus werden in einem zweiten Schritt die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt. Den folgenden Tabellen ist zu entnehmen, wie viele Mengeneinheiten (ME) im jeweiligen Schritt zur Herstellung von jeweils einer ME der Zwischenprodukte bzw. Endprodukte verarbeitet werden:

	Z_1	Z_2
R_1	2	6
R_2	4	4
R_3	6	2

	E_1	E_2	E_3
Z_1	5	2	8
Z_2	5	8	2

a) Ermitteln Sie, wie viele ME von R_3 insgesamt benötigt werden, um jeweils eine ME von E_1, E_2 und E_3 herzustellen. 3

b) Aufgrund von Lieferschwierigkeiten kann die Firma für R_3 nur noch auf einen Lagerbestand von 54 ME zurückgreifen. Berechnen Sie, wie viele ME von Zwischenprodukten noch produziert werden können, wenn die Anzahl der ME von Z_2 um 50% größer sein soll als die Anzahl der ME von Z_1. 3

Aufgabe 15

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Betrachtet wird außerdem eine Matrix $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die Werte von a, b, c und d so, dass $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt. 3

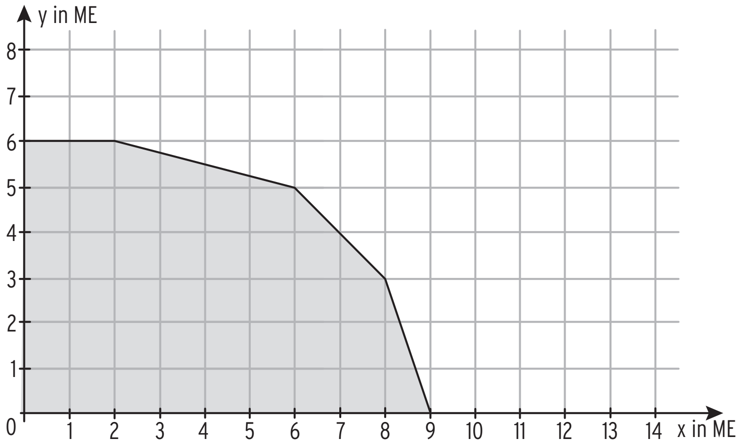
b) Für eine Matrix C kann das Produkt $C \cdot A$, nicht jedoch das Produkt $A \cdot C$ gebildet werden. Beschreiben Sie alle möglichen Formen von C. 2

Hilfsmittelfreier Teil - Lineare Algebra **Lösungen Seite 41**

Lösungen Seite 41

Aufgabe 16 **Punkte**

Bei der Produktion von Baseballschlägern aus Holz und Leichtmetall soll der Gesamtdeckungsbeitrag maximiert werden.
Das Planungspolygon ist in der Abbildung dargestellt.



Dabei steht x für die Menge der Baseballschläger aus Holz und y für die Menge der Baseballschläger aus Leichtmetall.

a) Entscheiden Sie anhand des Planungspolygons begründet, ob es eine optimale Lösung mit y = 7 geben kann, bzw. ob es eine mit x = 8 geben kann. 3

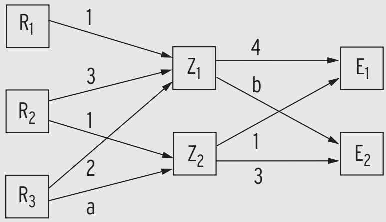
b) Der Deckungsbeitrag der Schläger aus Holz ist höher als der der Schläger aus Leichtmetall.
Entscheiden Sie begründet, in welchem Bereich die optimale Produktionsmenge der hölzernen Schläger liegen muss. 3

Hilfsmittelfreier Teil - Lineare Algebra Lösungen

Aufgabe 1

Aufgaben Seite 30

1.1 Verflechtungsdiagramm



1.2 Aus der Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 13 & 3b+3 \\ 8+a & 2b+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ c & 9 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

folgt z. B.: $8 + a = 12 \Rightarrow a = 4$ $\qquad 3b + 3 = 9 \quad \Rightarrow b = 2$

Einsetzen in $2b + 3a = 16$ ergibt eine wahre Aussage

Fehlende Werte: $a = 4$, $b = 2$, $c = 13$.

Aufgabe 2

a) B ist die zu A inverse Matrix: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

b) Aus $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ folgt $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

Dann gilt: $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

Bem.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden E.

Aufgabe 3

1.1 Mit dem Gauß-Verfahren, kommt man auf die folgende Stufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 6 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 4 & -8 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 6 & -8 & -14 \\ 0 & 4 & -8 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 6 & -8 & -14 \\ 0 & 0 & 8 & -64 \end{array}\right)$$

Dies führt auf den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ -8 \end{pmatrix}$

Anmerkung: Der „Lösungsvektor" kann auch in anderer Schreibweise angegeben werden und es kann auch ein alternatives Lösungsverfahren angewandt werden.

1.2 In LGS 2 ist die dritte Zeile eine Verdoppelung der zweiten, also ist LGS 2 unterbestimmt. Da der Lösungsvektor von LGS 1 jedenfalls die ersten beiden Zeilen von LGS 2 erfüllt und die dritte Zeile in LGS 2 überflüssig ist, ist der Lösungsvektor von LGS 1 in der Lösungsmenge von LGS 2 enthalten.

Aufgabe 4

Aufgaben Seite 31

a) $C_{RE} = A_{RZ} \cdot B_{ZE} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 3 & 1 \\ 16 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 3 & 1 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$

b) Rohstoffkosten für 1 ME von E_1: $\quad (2 \;\; 5 \;\; 3) \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} = 103$

Die Behauptung stimmt, da die Rohstoffkosten für 1 ME von E_1 103 GE betragen, also für 10 ME 1030 GE $>$ 1000 GE.

1 Analysis

Mathematische Formeln Wirtschaft und Verwaltung

Gesamtkostenfunktion K mit	$K(x) = K_v(x) + K_f$
Ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit	$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ a > 0;\ x \geq 0$
K wächst degressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) < 0$
K wächst progressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) > 0$
Funktion der variablen Gesamtkosten	$K_v(x)$
Funktion der gesamten Stückkosten k	$k(x) = \frac{K(x)}{x}$
Funktion der variablen Stückkosten k_v (k_{var})	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
Grenzkostenfunktion	$K'(x)$ Kostenzuwachs
Grenzstückkostenfunktion	$k'(x)$
Betriebsoptimum (Minimalstelle von k)	x_{BO}
Langfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BO})$
Betriebsminimum (Minimalstelle von k_v)	x_{BM}
kurzfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BM})$
Nachfragefunktion (Preis-Absatz-Funktion)	$p_N(x)$
Angebotsfunktion	$p_A(x)$
Gleichgewichtsmenge (Schnittstelle von p_N und p_A)	x_G
Gleichgewichtspreis	$p_G = p_N(x_G) = p_A(x_G)$
Marktgleichgewicht MG	$MG(x_G \mid p_G)$
Konsumentenrente	$KR = \int_0^{x_G} p_N(x)dx - x_G \cdot p_G$
Produzentenrente	$PR = x_G \cdot p_G - \int_0^{x_G} p_A(x)\,dx$
Erlösfunktion	$E(x) = p \cdot x$; p Preis pro ME $E(x) = p_N(x) \cdot x$ $p_N(x)$; Preis abhängig von x
Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$
Grenzgewinnfunktion	$G'(x)$
Gewinnschwelle	x_{GS} 1. positive Nullstelle von G
Gewinngrenze	x_{GG} 2. positive Nullstelle von G
gewinnmaximale Ausbringungsmenge Maximalstelle von G(x)	x_{max}
Cournot'scher Punkt	$C(x_{max} \mid p_N(x_{max}))$
Stückdeckungsbeitrag d = dB	$dB(x) = p - k_v(x)$
Deckungsbeitrag D = DB	$DB(x) = G(x) + K_f = E(x) - K_v(x)$

Bezeichnungen: $\mathbb{R}^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $\mathbb{R}_+^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^{>0}$

$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\} = \mathbb{R}^{\geq 0}$

Produktregel der Ableitung: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Aufgaben zur Abiturvorbereitung- Analysis

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösung Seite 74/75**

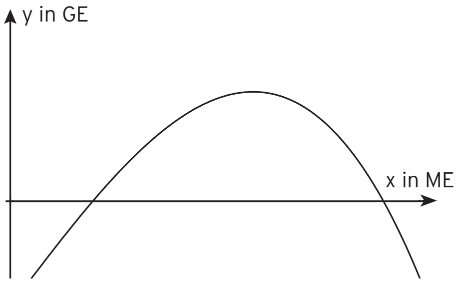
Das Unternehmen Bio-Kosmetic führt eine Pflegeserie für Frauen ein und tritt damit in Konkurrenz zu weiteren Anbietern.

1 Das Unternehmen geht von einem ertragsgesetzlichen Kostenverlauf aus.
die Grenzkostenfunktion K′ lautet: $K'(x) = 3{,}75x^2 - 40x + 120$.
Die Fixkosten betragen 250 GE.
Leiten Sie die Kostenfunktion her.

2 Die Marketingabteilung hat in einer Marktforschung festgestellt, dass bei Produktion und Verkauf von 4 ME Erlöse und Kosten übereinstimmen.
Bestimmen Sie den Preis pro ME und die Erlösfunktion.

3 Das Unternehmen geht von folgender Erlösfunktion aus: $E(x) = 122{,}5x$
Zeigen Sie, dass die Gewinnfunktion G der neuen Pflegeserie lautet:
$G(x) = -1{,}25x^3 + 20x^2 + 2{,}5x - 250$
Berechnen Sie, in welchem Produktionsintervall das Unternehmen mit Gewinn produzieren kann.
Ermitteln Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den maximalen Gewinn.

4 Begründen Sie anhand der dargestellten Gewinnfunktion, welche Auswirkungen eine Veränderung der Fixkosten auf die Gewinnzone, die gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den maximalen Gewinn hat.



5 Für die Absatzentwicklung (in ME pro Tag) stehen zwei Prognosefunktionen zur Diskussion:

$$A_1(t) = 40 - 0{,}15t - 40e^{-0{,}05t}$$
$$A_2(t) = 1{,}5t\, e^{-0{,}02t},$$

wobei t die Zeit in Verkaufstagen darstellt.

5.1 Welche Funktionen prognostiziert einen höheren maximalen Absatz?
Wie groß ist der Unterschied?

5.2 Bestimmen Sie den von A_1 prognostizierten Absatz in ME/Tag zum Zeitpunkt t = 16 und t = 130. Vergleichen Sie.

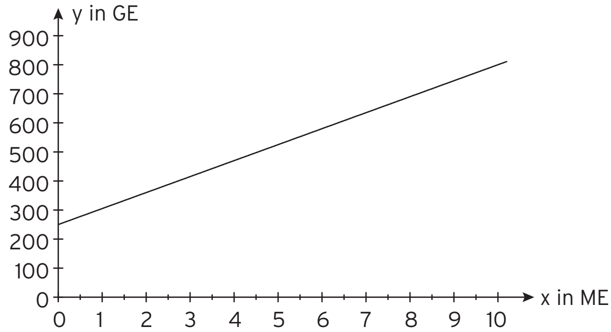
5.3 Der maximale Absatzrückgang sollte frühestens nach 150 Tagen eintreten.
Wird diese Vorgabe jeweils eingehalten?
Wie hoch ist der maximale Absatzrückgang jeweils?

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Analysis

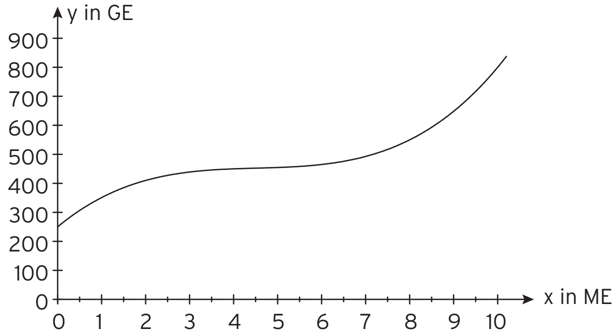
Aufgabe 1 **Seite 2/2**

6 In den folgenden Diagrammen sehen Sie die Graphen von drei Funktionen. Begründen Sie, welcher Graph dem einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion entspricht und welcher nicht.

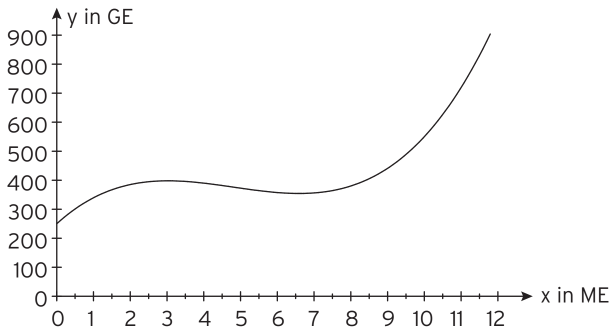
Graph 1



Graph 2



Graph 3



(Teile aus Berufskolleg NRW 2010.)

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Analysis

Aufgabe 2 Lösung Seite 76 - 78

Argoline 3D bietet das Stecksystem für das Modell Haus auf dem Markt an.

Eine Mengeneinheit (ME) entspricht 10000 Stück und eine Geldeinheit (GE) 10000 €.

1 Das Unternehmen geht von einem ganzrationalen Kostenfunktion 3. Grades aus. Die Kosten für 2 ME betragen 23 GE bei einem Kostenzuwachs von 1,5 GE/ME.

Bei 1 ME betragen die variablen Stückkosten 5 GE.

Die Fixkosten betragen 16 GE und die Kapazitätsgrenze liegt bei 7 ME.

1.1 Zeigen Sie: Für das Modell Haus gilt die Kostenfunktion K mit

$$K(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 7{,}5x + 16.$$

Bestimmen Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich.

1.2 Bestimmen Sie die Stückzahl, bei welcher der Kostenzuwachs am geringsten ist.

2 Eine Marktanalyse zeigt, dass bei einem konstanten Preis in GE je ME bei Produktion und Verkauf von 4 ME ein Gewinn von 16 GE erzielt wird.

2.1 Zeigen Sie, dass für die Gewinnfunktion gilt:

$$G(x) = -\,0{,}5x^3 + 3x^2 + 4x - 16$$

2.2 Ermitteln Sie die Gewinnzone.

Berechnen Sie den durchschnittlichen Gewinn über den Bereich von 2 bis 5 ME.

3 Berechnen Sie die kurzfristige und die langfristige Preisuntergrenze, das Betriebsminimum und das Betriebsoptimum.

Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

4 Beschreiben Sie allgemein die Auswirkungen einer Senkung der Fixkosten bei unverändertem Preis auf

a) das Schaubild der Kostenfunktion

b) die Gewinnzone und den maximalen Gewinn

c) das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze

d) das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.

2 Lineare Algebra

Formelsammlung

Lineare Verflechtung

$$\begin{tikzcd} R_i \arrow[r, "A", "\text{Stufe 1}"'] \arrow[rr, bend right, "C"'] & Z_j \arrow[r, "B", "\text{Stufe 2}"'] & E_k \end{tikzcd}$$

R_i: Rohstoffe; Z_j: Zwischenprodukte; E_k: Endprodukte

Verflechtungsmatrizen

Rohstoff-Zwischenprodukt ; Zwischenprodukt-Endprodukt; Rohstoff-Endprodukt-Matrix

A B C

Es gilt der Zusammenhang: $\boxed{C = A \cdot B}$

Verbrauchs-, Produktionsvektoren

$\vec{r}$: Rohstoffvektor $\vec{z}$: Zwischenproduktvektor $\vec{x}$: Endproduktvektor

Es gilt: $\boxed{A \cdot \vec{z} = \vec{r} \qquad B \cdot \vec{x} = \vec{z} \qquad C \cdot \vec{x} = \vec{r}}$

Kostenvektoren (variable Kosten pro Einheit)

Rohstoffkosten: $\vec{k}_R$ Fertigungskosten in Stufe 1: $\vec{k}_Z$ Fertigungskosten in Stufe 2: $\vec{k}_E$

Kostenvektoren sind Zeilenvektoren.

Die **Gesamtkosten für die Produktion $\vec{x}$** setzen sich zusammen aus
Rohstoffkosten + Fertigungskosten in Stufe 1 + Fertigungskosten in Stufe 2 + fixe Kosten

K_R K_Z K_E K_f

Es gilt: $\boxed{K_R = \vec{k}_R \cdot \vec{r} \qquad K_Z = \vec{k}_Z \cdot \vec{z} \qquad K_E = \vec{k}_E \cdot \vec{x}}$

Variable Herstellungskosten $\vec{k}_v$ pro Einheit eines Endproduktes: $\boxed{\vec{k}_v = \vec{k}_R \cdot C + \vec{k}_Z \cdot B + \vec{k}_E}$

Gesamtkosten K für die Produktion $\vec{x}$ gilt bei Fixkosten K_f:

$$\boxed{\begin{aligned} K &= K_v + K_f = \vec{k}_v \cdot \vec{x} + K_f \\ K &= \vec{k}_R \cdot C \cdot \vec{x} + \vec{k}_Z \cdot B \cdot \vec{x} + \vec{k}_E \cdot \vec{x} + K_f \\ K &= \vec{k}_R \cdot \vec{r} + \vec{k}_Z \cdot \vec{z} + \vec{k}_E \cdot \vec{x} + K_f \end{aligned}}$$

Inverse Matrix

Existenz: Die **quadratische** Matrix A ist **invertierbar** (die Inverse A^{-1} existiert), wenn

$\mathrm{Rg}(A) = n$ **oder** das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist **eindeutig lösbar.**

Berechnung: Umformung von $(A \mid E)$ in $(E \mid A^{-1})$

Eigenschaften: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ $\qquad (A^{-1})^{-1} = A$

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\qquad (r \cdot A)^{-1} = \frac{1}{r} \cdot A^{-1}$

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösung Seite 114/115**

Das Ein-Liter-Auto ist kaum noch ein Thema. Niemand dürfte bereit sein, mehrere 10 000 Euro für ein eigenes Gefährt zu zahlen. Eine mögliche Zwischenlösung wird künftig wohl in einem Zwei- oder Drei-Liter-Auto gesehen.
Insgesamt gilt: ME gleich Mengeneinheiten und GE gleich Geldeinheiten.
Der Autozulieferbetrieb Dynamik baut unter anderem für ein Zwei-Liter-Auto in einem zweistufigen Produktionsprozess aus verschiedenen elektronischen Bauteilen (B1, B2 und B3) Fahrdynamikregelung, Motorsteuergerät und Bordcomputer (E1, E2, E3).
Die folgenden Listen geben Auskunft über die Zusammenhänge zwischen den Bauteilen und den Zwischen- bzw. Endprodukten in ME.

	Z1	Z2	Z3
B1	1	0	3
B2	5	2	12
B3	50	15	95

	E1	E2	E3
Z1	2	3	2
Z2	0	4	3
Z3	1	5	1

Kosten der Bauteile in GE/ME			Fertigungskosten der Zwischenprodukte in GE/ME			Fertigungskosten der Endprodukte in GE/ME		
B1	B2	B3	Z1	Z2	Z3	E1	E2	E3
0,03	0,02	0,01	1,5	2,5	2,5	10	15	20

1.1 Aus den obigen Angaben ergibt sich die folgende Bauteile-Endproduktmatrix:

$$M_{BE} = \begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & b \\ 195 & a & 240 \end{pmatrix}$$

1.1.1 Berechnen Sie die Werte für a und b. 5

1.1.2 Erläutern Sie die Bedeutung der Elemente a und b im Sachzusammenhang. 5

Im Folgenden sei a = 685 und b = 28.

1.2 Die Fixkosten der Wochenproduktion betragen 7 525 GE. 8
Berechnen Sie die Gesamtkosten für eine Wochenproduktion von 750 ME von E1, 900 ME von E2 und 500 ME von E3.

1.3 Kurz vor den Betriebsferien meldet das Lager einen Bestand an Zwischenprodukten von Z1 mit 4 300 ME, Z2 mit 4 250 ME und Z3 mit 4 950 ME.

1.3.1 Untersuchen Sie, wie viele Endprodukte mit diesem Lagerbestand noch vor den Betriebsferien produziert werden können. 8

1.3.2 Begründen Sie, dass es trotz höheren Rechenaufwands sinnvoll sein kann, zunächst die Inverse der Verflechtungsmatrix M_{ZE} zu bestimmen. 5

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 1 **Seite 2/2** **Punkte**

1.4 Das Unternehmen Dynamik staffelt seine Preise der Endprodukte nach Auftrag und Kunde. Den Kunden werden bestimmte Rabattkategorien r mit $r \in \mathbb{N}$ zugeordnet – guten Kunden wird eine höhere Kategorie zugeordnet.
Es gilt folgender Preisvektor:
$e_r^T = (26{,}54 - 0{,}5r \quad 69{,}55 - 1{,}5r \quad 49{,}61 - r)$

1.4.1 Berechnen Sie, für welche $r > 0$ die einzelnen Preise ökonomisch sinnvoll sind. 7

1.4.2 Die Gesamtkosten in Höhe von 85 055 GE bei der Wochenproduktion von 750 ME von E1, 900 ME von E2 und 500 ME von E3 sollen trotz Rabatt mindestens gedeckt werden. 7
Leiten Sie den Bereich für r her, der dieser Anforderung genügt.
(Berufskolleg NRW 2011.) $\overline{45}$

Aufgabe 2 **Seite 1/2** **Lösung Seite 115/116**

Punkte

BioKosmetiKuss stellt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus pflanzlichen Rohstoffen (R1, R2 und R3) Zwischenprodukte (Z1, Z2 und Z3) und aus diesen wiederum verschiedene Parfums (E1, E2 und E3) her.
Die folgenden Matrizen geben die benötigten pflanzlichen Rohstoffe je Zwischenprodukt bzw. Zwischenprodukte je Endprodukt (Parfum) in ME an.

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 4 & 1 & b \end{pmatrix} \qquad B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & c \end{pmatrix};\ a, b, c \geq 0$$

Für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix gilt in der aktuellen Produktionsperiode:

$$C_{RE} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 \\ 15 & 23 & 13 \\ 10 & 17 & 7 \end{pmatrix}$$

3.1 Bei der Produktion der Zwischenprodukte und der Parfums treten produktionsbedingte Parameter a, b und c auf, die in den einzelnen Produktionsperioden variieren können.

3.1.1 Berechnen Sie die Werte für a, b und c für die aktuelle Produktionsperiode. 5

3.1.2 Deuten Sie Ihre Ergebnisse aus 3.1.1 im Sachzusammenhang. 3

3.1.3 Stellen Sie die betriebliche Materialverflechtung in Form eines Gozintographen (Verflechtungsdiagramm) dar. 5

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 2 **Seite 2/2** **Punkte**

Im Folgenden seien a = 4, b = 2 und c = 0.

3.2 Folgende Kosten fallen an:

Kosten der pflanzlichen Rohstoffe in GE/ME			Fertigungskosten der Zwischenprodukte in GE/ME			Fertigungskosten der Endprodukte in GE/ME		
R1	R2	R3	Z1	Z2	Z3	E1	E2	E3
4,5	2,8	3,2	8,5	5	6,5	3	2,5	4

Die fixen Kosten einer Wochenproduktion betragen 5000 GE.

3.2.1 Bestimmen Sie die variablen Kosten je ME der Parfums E1, E2 und E3. 8

3.2.2 Aus produktionstechnischen Gründen werden die Parfums E1, E2 und E3 im Verhältnis 1 : 2 : 4 hergestellt. Ermitteln Sie, wie viele ME der Parfums E1, E2 und E3 produziert werden, wenn die Gesamtkosten 47 232 GE pro Woche betragen. (Berufskolleg NRW 2013.) 5

Aufgabe 3 **Seite 1/2** **Lösung Seite 117/118**

Das Unternehmen Argoline produziert Spielzeug. Ganz neu zum Sortiment gehört das Stecksystem Argoline3D, das den leichten Zusammenbau auch komplexer Modelle ermöglicht.

Das Spielsystem Argoline3D besteht im wesentlichen aus den Grundelementen V1 (Verbindungswürfel), S1 (Stecker), P1 (Platte) und R1 (Rohr).

1 In einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus den Grundelementen V1, S1, P1 und R1 die Wandteile W1 und W2 gefertigt und die Beutel B mit 100 Steckern S1 gepackt, da man viele Stecker S1 benötigt, um Wände zusammenzusetzen.
In der zweiten Produktionsstufe werden daraus die häufig nachgefragten Modelle Haus und Turm hergestellt.

Grundelement - Zwischenprodukt

	W1	W2	B
V1	12	9	0
S1	34	24	100
R1	17	12	0
P1	6	4	0

Zwischenprodukt - Endprodukt

	Haus	Turm
W1	12	12
W2	16	34
B	3	4

1.1 Berechnen Sie die Matrix, die die Anzahl der Grundelemente je Endprodukt Haus und Turm angibt.

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 8 **Seite 2/3** **Punkte**

1.1.1 Berechnen Sie die Zahlenwerte für a, b und c. 6

1.1.2 Ergänzen Sie die graphische Darstellung des zweistufigen Produktionsprozesses (Gozintograph) in Anlage 1 mit den entsprechenden Zahlenwerten. 5

1.3 Zur Sommersaison sollen doppelt so viele Verkaufsverpackungen von V1 wie von V2 je Woche hergestellt werden. Gleichzeitig stehen durch einen Engpass bei den Samenarten von S1 nur 1 500 ME und von S2 nur 550 ME je Woche zur Verfügung. Von S3 und S4 sind genügend Mengeneinheiten im Lager vorrätig. Ermitteln Sie, wie viele Mengeneinheiten der Verkaufsverpackungen von V1 und V2 unter diesen Bedingungen maximal je Woche hergestellt werden können. 8

1.2 Aus Kostengründen ist das Mischungsverhältnis der Tütenmischungen geändert worden, so dass jetzt nur noch die drei Samenarten S1, S2 und S3 zu drei Tütenmischungen T1, T2 und T3 verarbeitet werden, aus denen die beiden Verkaufsverpackungen V1 und V2 produziert werden.

Für die neuen Mengenangaben gelten folgenden Matrizen: $\overline{A}_{ST} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\overline{C}_{SV} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 6 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$

Für die Inverse von $\overline{A}_{ST}$ gilt: $\overline{A}_{ST}^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 16 & -4 \\ -1 & -6 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

Die Kosten je ME in GE lassen sich der folgenden Tabelle entnehmen:

Kosten für Samenarten			Fertigungskosten 1. Stufe zu Tüten			Fertigungskosten 2. Stufe zu Verkaufsverpackungen	
S1	S2	S3	T1	T2	T3	V1	V2
2	1	0,5	3	2	3,5	4	3

Für die Verkaufspreise in GE je ME gilt:

Verkaufspreise	
V1	V2
70	65

1.2.1 Leiten Sie aus den obigen Matrizen die Matrix $\overline{B}_{TV} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ her,

die den Verbrauch an Tütenmischungen je ME der Verkaufsverpackungen angibt. 8

1.2.2 Berechnen Sie den Stückdeckungsbeitrag in GE/ME der Verkaufsverpackungen V1 und V2. 10

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 8 **Seite 3/3** **Punkte**

1.2.3 Zur Sommersaison sollen doppelt so viele Verkaufsverpackungen von V1 wie von V2 je Woche hergestellt werden. Gleichzeitig stehen durch einen Engpass bei den Samenarten von S1 nur 1 500 ME und von S2 nur 550 ME je Woche zur Verfügung. Von S3 sind genügend Mengeneinheiten im Lager vorrätig.
Ermitteln Sie, wie viele Mengeneinheiten der Verkaufsverpackungen von V1 und V2 unter diesen Bedingungen maximal je Woche hergestellt werden können. 8

1.3 Die PlantGrow AG stellt auch zwei unterschiedliche Sorten Paprikasamen P1 und P2 her, deren Produktion folgenden Beschränkungen pro Monat unterliegt.

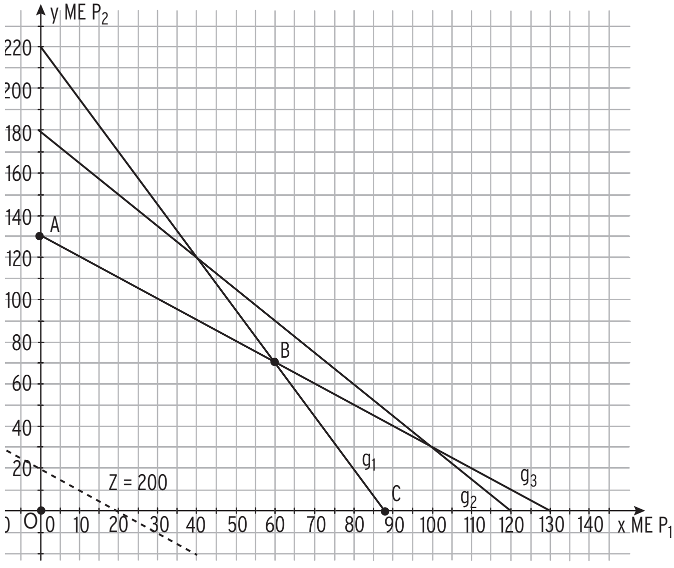
Beschränkung 1: $x + y \leq 130$

Beschränkung 2: $6x + 4y \leq 720$

Beschränkung 3: $5x + 2y \leq 440$

P1 und P2 erzielen jeweils einen Stückdeckungsbeitrag von 10 GE/ME.

Z sei der zu maximierende Gesamtdeckungsbeitrag.



1.3.1 Geben Sie an, welche Beschränkung durch welche der drei Geraden g_1 bis g_3 dargestellt wird. 4

1.3.2 Die Geschäftsführung der PlantGrow AG behauptet: „Produktkombinationen, die zu einem maximalen Deckungsbeitrag führen, entsprechen immer einem der Eckpunkte des Planungsvielecks."
Nehmen Sie zu dieser Aussage der Geschäftsleitung im Sachzusammenhang mathematisch begründet Stellung. 8

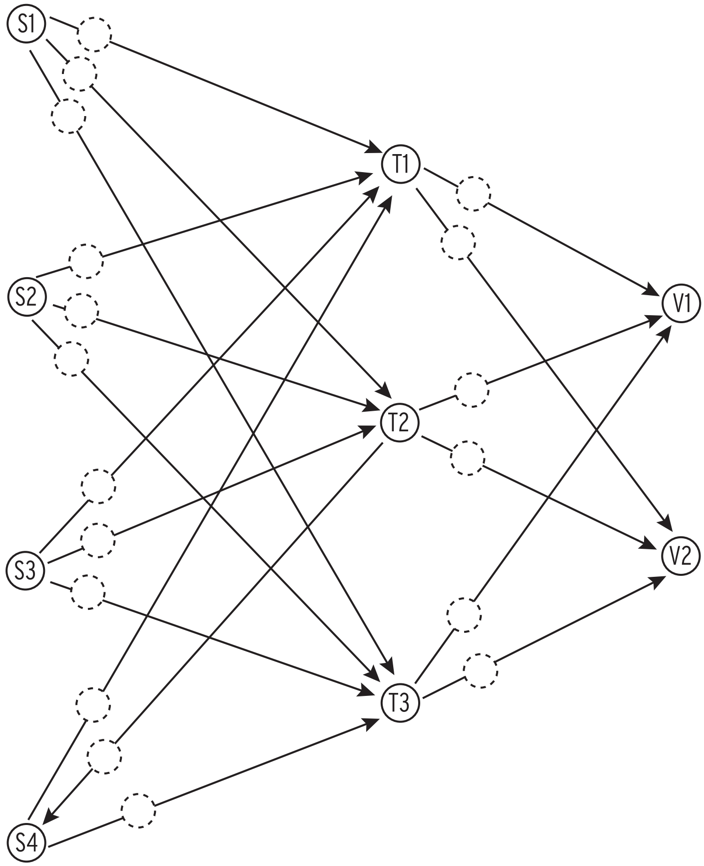
(Berufskolleg NRW 2014)

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 8

Anlage 1

Name des Prüflings: ______________________________



Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 9 **Lösung Seite 126**

Lösung Seite 126

Punkte

Das Unternehmen BIOSAFT produziert Smoothies in einem zweistufigen Produktionsprozess zunächst aus den Rohstoffen Obst (R1), Gemüse (R2) und Wasser (R3) die Zwischenprodukte Obstbasis (Z1), Gemüsebasis (Z2) und eine fruchtige Wasserbasis (Z3), die in einem zweiten Produktionsschritt zu den Endprodukten Obst-Smoothie (E1), Grüner-Smoothie (E2) und Obst-Gemüse-Smoothie (E3) verarbeitet werden.
Folgende Produktionsmengen in Mengeneinheiten (ME) seien bekannt:

$$B_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad C_{RE} = \begin{pmatrix} 34 & 18 & 26 \\ 11 & 28 & 21 \\ 8 & 18 & 36 \end{pmatrix}.$$

1.1 Interpretieren Sie das Element b_{31} der Matrix B_{ZE} anwendungsbezogen.
Bestimmen Sie die fehlende Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A_{RZ}.
Stellen Sie den gesamten Produktionsprozess in einem Verflechtungsdiagramm dar. 8

1.2 Der Discounter OLDI überlegt die Smoothies von BIOSAFT in sein Sortiment aufzunehmen und bietet dem Produzenten je Mengeneinheit Obst-Smoothie einen Preis von 30 Geldeinheiten (GE) und je Mengeneinheit Grüner-Smoothie einen Preis von 27 GE an. Der Auftrag umfasst 500 ME Obst-Smoothie und 200 ME Grüner-Smoothie. BIOSAFT möchte den Auftrag kalkulieren. Folgende Informationen bezüglich der Produktionskosten sind bekannt:

Rohstoffkosten in GE/ME		Herstellungskosten in GE/ME		Verarbeitungskosten in GE/ME	
R1	0,6	Z1	0,5	E1	0,9
R2	0,4	Z2	0,5	E2	0,8
R3	0,1	Z3	0,2	E3	1,1

Bestimmen Sie die variablen Stückkosten je Endprodukt.
Berechnen Sie die variablen Kosten für diesen Auftrag.
Begründen Sie nachvollziehbar, ob BIOSAFT den Auftrag annehmen sollte, wenn die Fixkosten für diesen Auftrag 550 GE betragen. 8

(Berufskolleg NRW 2016.)

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra Lösungen

Lösung Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 100/101**

1.1.1 Bauteile-Zwischenprodukt-Matrix M_{BZ}

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix M_{ZE}; Bauteile-Endprodukt-Matrix M_{BE}

Es gilt: $M_{BZ} \cdot M_{ZE} = M_{BE}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 12 \\ 50 & 15 & 95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & b \\ 195 & a & 240 \end{pmatrix}$

Für a und b gilt dann: $a = 50 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 95 \cdot 5 = 685$

$b = 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 12 \cdot 1 = 28$

Die exemplarische Überprüfung stimmt mit der Vorgabe überein.

1.1.2 a gibt die Anzahl der Bauteile B3 im Endprodukt E2 (Motorsteuergerät) an.

b gibt die Anzahl der Bauteile B2 im Endprodukt E3 (Bordcomputer) an.

1.2 Wochenproduktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix}$

Bauteilekosten je Endprodukt: $(0{,}03 \quad 0{,}02 \quad 0{,}01) \begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & 28 \\ 195 & 685 & 240 \end{pmatrix} = (2{,}54 \quad 9{,}05 \quad 3{,}11)$

Fertigungskosten je Endprodukt: $(1{,}5 \quad 2{,}5 \quad 2{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (5{,}5 \quad 27 \quad 13)$

Fertigungskosten der Endprodukte: $(10 \quad 15 \quad 20)$

Für die variablen Kosten je Endprodukt gilt:

$(2{,}54 \quad 9{,}05 \quad 3{,}11) + (5{,}5 \quad 27 \quad 13) + (10 \quad 15 \quad 20) = (18{,}04 \quad 51{,}05 \quad 36{,}11)$

Für die Gesamtkosten einer Wochenproduktion gilt:

$(18{,}04 \quad 51{,}05 \quad 36{,}11) \begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix} + 7525 = 85055$

Die Gesamtkosten einer Wochenproduktion betragen 85 055 GE.

1.3 Ansatz: $M_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4300 \\ 4250 \\ 4950 \end{pmatrix}$

Lösung des Gleichungssystems mit dem Gaußverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4300 \\ 0 & 4 & 3 & 4250 \\ 1 & 5 & 1 & 4950 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4300 \\ 0 & 4 & 3 & 4250 \\ 0 & 7 & 0 & 5600 \end{array}\right) * \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 350 \end{array}\right) **$$

Durch Rückwärtseinsetzen aus * oder Gaußverfahren bis ** ergibt sich: Es können noch 600 ME von E1, 800 ME von E2 und 350 ME von E3 produziert werden.

1.3.2 Die Berechnung der Inversen hat genau dann einen Vorteil, wenn die Produktionsmengen nicht nur für einen Lagerbestand, sondern für unterschiedliche Lagerbestände bestimmt werden sollen. So reduziert sich der weitere Rechenaufwand lediglich auf eine einfache Multiplikation der Inversen von M_{ZE} mit den Vektoren der jeweiligen Lagerbestände. Das Lösen von Gleichungssystemen ist dann nur einmal notwendig.

Lösung Aufgabe 1 **Seite 2/2**

1.4.1 Die Preise müssen mit Rabattgewährung größer als Null sein:

$26{,}54 - 0{,}5r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r < 53{,}08$

$69{,}55 - 1{,}5r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r < 46{,}37$

$49{,}61 - r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r < 49{,}61$

Die Rabattgewährung r soll nur ganzzahlig ($\in \mathbb{N}$) sein; es gilt somit $0 \leq r \leq 46$.

1.4.2 Sinnvoller Bereich für r:

Es gilt: $G \geq 0$ mit $G = E - K$

$$G = e_r^T \cdot \vec{x} - K = (26{,}54 - 0{,}5r \quad 69{,}55 - 1{,}5r \quad 49{,}61 - r)\begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix} - 85055 \geq 0$$

$$19905 - 375r + 62595 - 1350r + 24805 - 500r - 85055 \geq 0$$

$$22250 - 2225r \geq 0$$

$$r \leq 10$$

Für die Wahl der Rabattkategorie r gilt: $0 \leq r \leq 10$

Lösung Aufgabe 2 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 101/102**

3.1 $A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 4 & 1 & b \end{pmatrix}$; $B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & c \end{pmatrix}$; $a, b, c \geq 0$; $C_{RE} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 \\ 15 & 23 & 13 \\ 10 & 17 & 7 \end{pmatrix}$

3.1.1 Es gilt: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$

Daraus folgt: $(1 \quad a \quad 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 15 \qquad 1 + 2a + 6 = 15 \quad \Leftrightarrow a = 4$

$(4 \quad 1 \quad b)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 10 \qquad 4 + 2 + 2b = 10 \quad \Leftrightarrow b = 2$

$(1 \quad 2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ c \end{pmatrix} = 7 \qquad 1 + 6 + c = 7 \quad \Leftrightarrow c = 0$

3.1.2 Deutung im Sachzusammenhang:

a= 4: Für eine ME des Zwischenproduktes Z2 werden 4 ME des pflanzlichen Rohstoffs R2 benötigt.

b = 2: Für eine ME des Zwischenproduktes Z3 werden 2 ME des pflanzlichen Rohstoffs R3 benötigt.

c = 0: Für eine ME des Endproduktes E3 werden keine ME des Zwischenproduktes Z3 verbraucht.

Aufgabensatz 2 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel — Lösungen Seite 172 – 176

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Analysis — **Punkte**

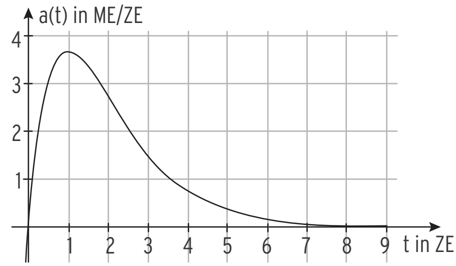
1.1 Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x}$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$.

1.1.1 Gegeben ist die Gleichung $\frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} = \frac{2}{a}$. Bestimmen Sie eine Lösung für x. 2

1.1.2 Bestimmen Sie alle Werte für a so, dass der vertikale Abstand der Graphen von f_a und f_a' an der Stelle $x = 0$ mindestens 3 beträgt. 3

1.2 Die PRINTFIX AG fertigt innovative und hochwertige 3D-Drucker. Der momentane Absatz in Mengeneinheiten pro Zeiteinheit (ME/ZE) kann durch den Graphen a des Produktlebenszyklus $a(t) = 10t \cdot e^{-t}$ mit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschrieben werden.

Bestimmen Sie ausschließlich mit Hilfe der notwendigen Bedingung den Zeitpunkt, an dem die PRINTFIX AG die meisten 3D-Drucker pro ZE absetzt. 3



Stochastik

In einer Urne U_1 befinden sich vier rote und zwei gelbe Kugeln, in einer Urne U_2 zwei rote, eine gelbe und eine blaue Kugel.

1.3 Eine der beiden Urnen wird zufällig ausgewählt. Anschließend wird daraus zweimal hintereinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden kann, dass beide entnommenen Kugeln rot sind. 2

1.4 Eine der beiden Urnen wurde zufällig ausgewählt; aus dieser wurde eine Kugel zufällig entnommen. Die entnommene Kugel ist gelb oder blau. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel aus der Urne U_1 stammt. 3

Lineare Algebra

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.5 Entscheiden Sie für jeden der Terme $A + B$ und $A \cdot B$, ob er definiert ist. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung. 2

1.6 Bestimmen Sie für die Matrix $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Werte von a, b, c und d so, dass $B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt. 3

Aufgabensatz 2 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Die Firma VELOTRITT GmbH stellt Fahrräder des unteren Preissegments her, die über Discountmärkte und das Internet vertrieben werden. Einige Bauteile dieser Fahrräder werden bei unterschiedlichen Lieferanten zugekauft.
In allen Aufgaben gilt ME ≙ Mengeneinheiten und GE ≙ Geldeinheiten.

Aufgabe 2 – Analysis (28 Punkte) **Punkte**

Die VELOTRITT GmbH plant die Markteinführung der neuen Kinderradserie *Kiddystunt*.

2.1 Zur Vorbereitung der Markteinführung wurden detaillierte Marktuntersuchungen durchgeführt, denen zufolge in den ersten drei Jahren mit einem prognostizierten Verlauf der Absatzentwicklung entsprechend der Funktion

$$a(t) = 400 + (150t - 50) \cdot e^{-0{,}1t};\ t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$$

zu rechnen ist. Dabei entspricht a(t) der Absatzmenge in ME pro Monat und t der seit der Markteinführung vergangenen Zeit in Monaten.

2.1.1 Berechnen Sie die Absatzmenge pro Monat, mit der ein Jahr nach Markteinführung zu rechnen ist. 3

2.1.2 Zeigen Sie, dass die erste und die zweite Ableitungsfunktion von a den folgenden Gleichungen entsprechen. 6

$$a'(t) = e^{-0{,}1t}(155 - 15t) \qquad \text{und} \qquad a''(t) = e^{-0{,}1t}(1{,}5t - 30{,}5)$$

2.1.3 Berechnen Sie den Monat, in welchem die Funktion a ihren Wendepunkt besitzt. 6
Hinweis: Auf den Nachweis der hinreichenden Bedingung wird verzichtet!

2.1.4 Interpretieren Sie die in 2.1.3 berechnete Wendestelle ökonomisch. 2

2.1.5 Bestimmen Sie die monatliche Absatzmenge, die sich laut Prognose langfristig einstellen wird. 3

2.2 Die Beleuchtungsanlagen für die neue Kinderradserie Kiddystunt werden von der BLENDOLUX KG geliefert. In der Abteilung Controlling ist man sich bei BLENDOLUX unsicher, ob die Kostenfunktion $K(x) = 4x^3 - 90x^2 + 700x + 400$ die tatsächliche Kostenentwicklung modelliert. Dazu wurden betriebliche Zahlen erhoben. 8
Die Kapazitätsgrenze für die Beleuchtungsanlagen liegt bei 18 ME.
Überprüfen Sie, ob die obige Kostenfunktion den erhobenen Bedingungen genügt.

- Es entstehen Fixkosten in Höhe von 400 GE.
- Bei 8 ME betragen die Gesamtkosten 2 288 GE.
- Die Grenzkosten sind bei 7,5 ME minimal.
- Die Gesamtkosten an der Kapazitätsgrenze betragen 7 168 GE.
- Bei einer Produktion von 2 ME betragen die Grenzkosten 388 GE/ME.
- Bei einer Produktionsmenge von 5 ME betragen die durchschnittlichen Kosten 430 GE/ME.

Aufgabensatz 2

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 3 – Lineare Algebra (28 Punkte) Punkte

Die VELOTRITT GmbH stellt die Rahmen der Fahrradmodelle City und Tour in Eigenfertigung her. Um sich von der Konkurrenz abzuheben, werden für diese Rahmen jedes Jahr neue modische Lackierungen produziert. Dabei werden in einem zweistufigen Produktionsprozess zunächst aus den drei Ausgangsfarben R1, R2 und R3 die drei Modefarben Z1, Z2 und Z3 gemischt und aus diesen dann die Lackierungen für die Modelle City (E1) und Tour (E2) hergestellt.

Es gelten folgende Mengenbeziehungen (in ME) mit $a, b \in \mathbb{R}^{\geq 0}$:

	Z1	Z2	Z3
R1	2	3	1
R2	0	2	2
R3	3	5	4

	E1	E2
Z1	1	2
Z2	3	7
Z3	a	5

	E1	E2
R1	13	b
R2	10	24
R3	26	61

3.1 Berechnen Sie die Zahlenwerte für a und b in den Tabellen mithilfe der Matrizenrechnung. 2

3.2 Im Folgenden seien a = 2 und b = 30.

3.2.1 Die VELOTRITT GmbH benötigt für einen Auftrag 15 ME der Lackierung E1 und 18 ME der Lackierung E2. Berechnen Sie, wie viele ME der drei Modefarben Z1, Z2 und Z3 für diesen Auftrag erforderlich sind. 3

3.2.2 Für eine Sonderlackierung können im Rahmen eines alternativen Produktionsprozesses die Modefarben Z1, Z2 und Z3 auch entsprechend der folgenden Matrix gemischt werden: 8

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Wegen Sanierungsarbeiten am Boden der Lagerhalle muss das Rohstofflager kurzfristig geräumt werden. Der Lagerbestand von R1 beträgt 999 ME, der von R2 beträgt 826 ME und von R3 befinden sich noch 2 411 ME im Lager. Bestimmen Sie den ökonomisch sinnvollen Lösungsvektor, mit welchem der Lagerbestand im Rahmen des alternativen Produktionsprozesses ohne Rest aufgebraucht wird.

Aufgabensatz 2 Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 3 – Lineare Algebra **Punkte**

3.3 Die VELOTRITT GmbH produziert leicht modifizierte Fahrradrahmen der Modelle Tour und City unter dem Label einer Fremdmarke. Die Produktion erfolgt in drei Arbeitsgängen an den Maschinen M1, M2 und M3. Der Zeitbedarf für die Herstellung der Rahmen der Modelle sowie die zeitlichen Beschränkungen der Maschinen sind folgender Tabelle zu entnehmen:

	City (h/ME)	Tour (h/ME)	Maximale Laufzeit (h/Woche)
M1	2	1	36
M2	1	1	22
M3	0	1,5	27

Für die Rahmen des Modells City erzielt die VELOTRITT GmbH einen Deckungsbeitrag von 48GE/ME, bei Tour sind es 64 GE/ME.

3.3.1 Geben Sie die Restriktionen und die Zielfunktion des zu maximierenden Deckungsbeitrages an. 5

Hinweis: Wählen Sie x_1 für die ME der Rahmen des Modells City und x_2 für die ME der Rahmen des Modells Tour.

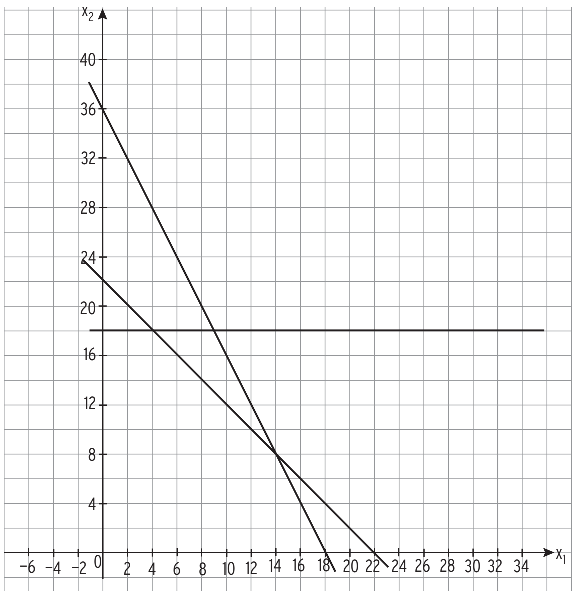
3.3.2 In Abbildung in Anlage 1 sind die Randgeraden der einschränkenden Bedingungen dargestellt. Zeichnen Sie in Anlage 1 den Planungsbereich ein, der sich aus den genannten Restriktionen ergibt. 3

3.3.3 Ermitteln Sie mittels der Abbildung in Anlage 1 grafisch die Produktionszahlen der Modelle City und Tour, die den maximalen Deckungsbeitrag liefern. 4

3.3.4 Geben Sie den maximalen Deckungsbeitrag und die Auslastungszeiten der Maschinen M1, M2 und M3 an. 3

Anlage 1:

Planungsvieleck zu den Aufgaben 2.3.2 und 2.3.3.



(Berufskolleg NRW 2015.)

Aufgabensatz 2 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabe 4 – Stochastik (28 Punkte)

		Punkte
	Die VELOTRITT GmbH bezieht die notwendigen Beleuchtungsanlagen (Front- und Rücklichter) von der Blendolux KG.	
4.1	Die Blendolux KG garantiert, dass der Ausschussanteil ihrer Produkte höchstens 4 % beträgt. Für eine Qualitätskontrolle wählt ein Mitarbeiter zufällig 100 Beleuchtungsanlagen aus. Gehen Sie davon aus, dass $p = 0{,}04$ gilt.	
4.1.1	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 6 Beleuchtungsanlagen Ausschussware sind.	4
4.1.2	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Beleuchtungsanlagen Ausschussware sind.	3
4.1.3	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als eine Beleuchtungsanlage Ausschussware ist.	3
4.1.4	Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 3, aber weniger als 7 Beleuchtungsanlagen Ausschussware sind.	4
4.2	Ein Mitarbeiter der VELOTRITT GmbH möchte die Angaben der BLENDOLUX KG prüfen, da er vermutet, dass der Ausschussanteil von 4 % in Wirklichkeit höher ist.	
4.2.1	Der Mitarbeiter möchte diese Vermutung mittels eines einseitigen Hypothesentests mit einem Signifikanzniveau von 10%bestätigen, indem er 100 Beleuchtungsanlagen überprüft. Entwickeln Sie auf Grundlage der Angaben einen Hypothesentest mit zugehöriger Entscheidungsregel.	10
4.2.2	Der Mitarbeiter entdeckt 6 beschädigte Beleuchtungsanlagen. Beurteilen Sie diesen Sachverhalt auf der Grundlage des Hypothesentests.	4

(Teile aus Berufskolleg NRW 2015)

Aufgabensatz 2 Lösungen

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Analysis

1.1.1 Gleichung $\frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} = \frac{2}{a}$ auflösen nach x: $e^{a \cdot x} = 2$

Logarithmieren $a \cdot x = \ln(2) \Rightarrow x = \frac{\ln(2)}{a}$

1.1.2 Ableitung von f_a mit der Kettenregel: $f_a'(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} \cdot a = e^{a \cdot x}$

Vertikaler Abstand in x = 0: $f_a(0) - f_a'(0) = \frac{1}{a} - 1$ $(e^{a \cdot 0} = 1)$

Ungleichung für a: $\frac{1}{a} - 1 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{a} \geq 4 \quad | \cdot a$

$4a \leq 1 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{4}$ $(0 < a < 1)$

Für $0 < a \leq \frac{1}{4}$ beträgt der gesuchte vertikale Abstand mindestens 3.

1.2 Größter Absatz pro ZE (größter momentaner Absatz):

$a'(t) = 10 \cdot e^{-t} + 10t \cdot e^{-t} \cdot (-1) = (10 - 10t) \cdot e^{-t}$

Bed.: $a'(t) = 0 \Leftrightarrow 10 - 10t = 0$

wegen $e^{-t} > 0$: $t = 1$

Zum Zeitpunkt 1 ZE wird der größte momentane Absatz erzielt.

1.3 $P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$; Zwei rote aus Urne U_1 oder zwei rote aus Urne U_2 ; Ziehen mit ZL

$P(rr) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ (Term genügt)

1.4 bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{g \vee b}(U_1) = \frac{P((g \vee b) \cap U_1)}{P(g \vee b)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{12}{30}$

1.5 A + B: nicht definiert (unterschiedliche Anzahlen der Zeilen)

A ·B: definiert; Anzahl der Spalten von A stimmt mit Anzahl der Zeilen von B überein

1.6 $B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \Rightarrow C = B^{-1}$

Damit: $\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \frac{1}{6}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$

Vergleich ergibt $a = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{6}$, $d = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Variante: $B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ a + 2c & b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vergleich ergibt $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$.

Einsetzen von a in $a + 2c = 0$ ergibt $c = -\frac{1}{6}$

und einsetzen von b in $b + 2d = 1$ ergibt $d = \frac{1}{2}$

Aufgabensatz 2 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS Lösungen

Aufgabe 2 – Analysis (24 Punkte)

2.1 $a(t) = 400 + (150t - 50) \cdot e^{-0{,}1t}$; $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$

$a(t)$: Absatzmenge in ME pro Monat, t in Monaten

2.1.1 **Absatzmenge pro Monat nach einem Jahr, also für t = 12:** $a(12) = 927{,}08...$

Ein Jahr nach Markteinführung ist mit einem Absatz von 927 ME pro Monat zu rechnen.

2.1.2 **Ableitungsfunktionen von a**

Mit Produkt und Kettenregel: $a'(t) = -0{,}1 \cdot (150t - 50) \cdot e^{-0{,}1t} + 150 \cdot e^{-0{,}1t}$

$a'(t) = e^{-0{,}1t}(155 - 15t)$

$a''(t) = -0{,}1 \cdot e^{-0{,}1t}(155 - 15t) + e^{-0{,}1t}(-15)$

$a''(t) = e^{-0{,}1t}(1{,}5t - 30{,}5)$

2.1.3 **Wendestelle**

Notwendige Bedingung: $a''(t) = 0$ $\quad e^{-0{,}1t}(1{,}5t - 30{,}5) = 0$

Satz vom Nullprodukt, $e^{-0{,}1t} > 0$: $\quad 1{,}5t - 30{,}5 = 0$ für $t = 20{,}33...$

Nach 20 Monaten (im 21. Monat seit Markteinführung) hat die Funktion a ihren Wendepunkt. (Kein Nachweis mit der hinreichenden Bedingung verlangt.)

2.1.4 **Interpretation ökonomisch**

Bis t = 20,33 ändern sich die Absatzzahlen progressiv fallend, danach degressiv fallend. Stark abnehmender Verlauf wechselt in t = 20,33 in schwächer abnehmenden Verlauf. t = 20,33 ist die Stelle mit dem stärksten Absatzrückgang.

2.1.5 **Langfristige Prognose**

Wegen $(150t - 50) \cdot e^{-0{,}1t} \to 0$ für $t \to \infty$ gilt: $\lim\limits_{t \to \infty} a(t) = 400$

(Die Gerade mit y = 400 ist waagrechte Asymptote des Graphen von a.)

Langfristig ist mit einer monatlichen Absatzmenge von 400 ME zu rechnen.

2.2 $K'(x) = 12x^2 - 180x + 700$; $K''(x) = 24x - 180$; $K'''(x) = 24$

- Fixkosten in Höhe von 400 GE: $K(0) = 400$ wahr
- Bei 8 ME Gesamtkosten von 2 288 GE: $K(8) = 2288$ wahr
- Grenzkosten bei 7,5 ME minimal: $K''(7{,}5) = 0 \wedge K'''(7{,}5) = 24 > 0$ wahr
  K‘ hat in x = 7,5 eine Minimalstelle.
- Gesamtkosten an der Kapazitätsgrenze 7168 GE: $K(18) = 7\,168$ wahr
- Bei 2 ME Grenzkosten von 388 GE/ME: $K'(2) = 388$ wahr
- Bei 5 ME durchschnittliche Kosten von 430 GE/ME: $\frac{K(5)}{5} = \frac{2150}{5} = 430$ wahr

Aufgabensatz 2 Grundkursfach Mathematik
Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR Lösungen

Aufgabe 3 – Lineare Algebra

3.1 Bestimmung von a und b

Multiplikation von Zeile 1 der (R, Z)-Matrix mit der Spalte 1 der (Z, E)-Matrix ergibt:

$2 + 9 + a = 13 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$

Multiplikation von Zeile 1 der (R, Z)-Matrix mit der Spalte 2 der (Z, E)-Matrix ergibt:

$4 + 21 + 5 = b \quad \Leftrightarrow \quad b = 30.$

Hinweis zur Alternative: Es gilt $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$

3.2.1 Es gilt: $B_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 171 \\ 120 \end{pmatrix}$

Für diesen Auftrag sind 51 ME Z1, 171 ME Z2 und 120 ME Z3 erforderlich.

3.2.2 $M_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Bedingung: $M_{RZ} \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 999 \\ 826 \\ 2411 \end{pmatrix}$ ergibt das LGS $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 999 \\ 0 & 2 & 2 & 826 \\ 4 & 7 & 3 & 2411 \end{array}\right)$

Auflösung mit dem Gauß-Verfahren: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 999 \\ 0 & 2 & 2 & 826 \\ 0 & 1 & 1 & 413 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 999 \\ 0 & 2 & 2 & 826 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

Lösungsvektor: $z_3 = t$ einsetzen ergibt: $2z_2 + 2t = 826$

$z_2 = 413 - t$

einsetzen ergibt: $2z_1 + 3(413 - t) + t = 999 \Leftrightarrow z_1 = t - 120$

Die Lösung ist ökonomisch sinnvoll, wenn die Elemente der Lösung nicht negativ

sind: $z_3 = t \geq 0$; $\quad z_2 = 413 - t \geq 0$ für $t \leq 413$

$z_1 = t - 120 \geq 0$ für $t \geq 120$

$\vec{z} = \begin{pmatrix} t - 120 \\ 413 - t \\ t \end{pmatrix}$ ökonomisch sinnvoll für $120 \leq t \leq 413$

Aufgabensatz 2 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR Lösungen

Aufgabe 3 – Lineare Algebra Fortsetzung

3.3.1 Restriktionen und Zielfunktion

x_1, x_2 ME der Rahmen des Modells City bzw. Tour

Nichtnegativitätsbedingung: $x_1, x_2 \geq 0$

Einschränkende Bedingungen (Restriktionen):

$2x_1 + x_2 \leq 36$	aufgelöst nach x_2:	$x_2 \leq -2x_1 + 36$	(1)
$x_1 + x_2 \leq 22$		$x_2 \leq -x_1 + 22$	(2)
$1{,}5x_2 \leq 27$		$x_2 \leq 18$	(3)

Zielfunktion: $Z = 48x_1 + 64x_2$ Z soll maximiert werden.

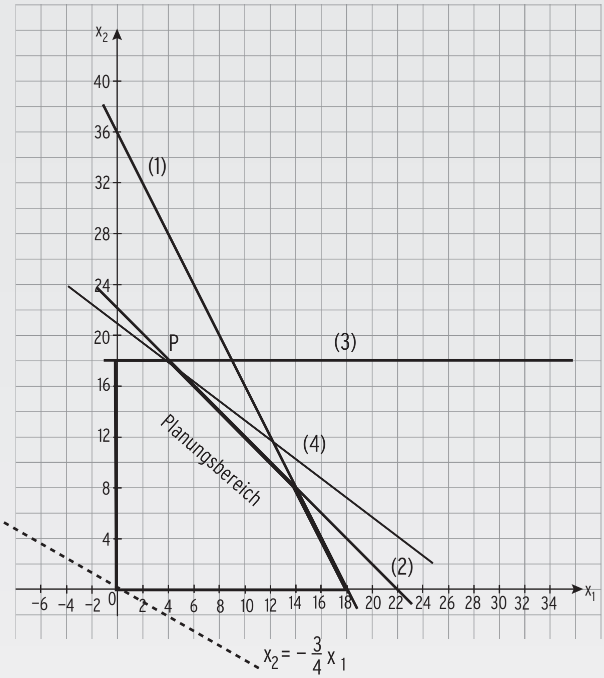
3.3.2 $Z = 48x_1 + 64x_2$

umgeformt:

$x_2 = -\frac{48}{64}x_1 + \frac{Z}{64}$

$x_2 = -\frac{3}{4}x_1 + \frac{Z}{64}$ (4)

Mit Hilfe der Parallelverschiebung der Zielfunktionsgeraden ergibt sich die optimale Mengenkombination im Punkt P(4 | 18). (Schnittpunkt von (2) und (3))



3.3.3 Produktionszahlen mit maximalem Deckungsbeitrag: $x_1 = 4$; $x_2 = 18$

3.3.4 Maximaler Deckungsbeitrag in GE: $Z = 48 \cdot 4 + 64 \cdot 18 = 1344$

Auslastungszeiten	für M_1:	$2 \cdot 4 + 18 = 26$	10 Stunden frei
	für M_2:	$4 + 18 = 22$	ausgelastet
	für M_3:	$1{,}5 \cdot 18 = 27$	ausgelastet

Um den maximalen Deckungsbeitrag zu erhalten, müssen 4 ME vom Modell City und 18 ME vom Modell Tour hergestellt werden.

Aufgabensatz 2 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR Lösungen

Aufgabe 4 – Stochastik

4.1 X:Anzahl der defekten Beleuchtungsanlagen; X ist $B_{100;\,0{,}04}$-verteilt

4.1.1 Genau 6 Beleuchtungsanlagen sind Ausschussware:

$P(X = 6) = 0{,}1052 = 10{,}52\ \%$

4.1.2 Höchstens 2 Beleuchtungsanlagen sind Ausschussware: $P(X \leq 2) = 0{,}2321 = 23{,}21\ \%$

4.1.3 Mehr als eine Beleuchtungsanlage ist Ausschussware:

$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0{,}0872 = 0{,}9128 = 91{,}28\ \%$

4.1.4 Mehr als 3, aber weniger als 7 Beleuchtungsanlagen sind Ausschussware:

$P(3 < X < 7) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) = 0{,}8936 - 0{,}4295 = 0{,}4641 = 46{,}41\ \%$

4.2.1 Es ist: H_1: $p > 0{,}04$ (Mehr als 4 % der Teile sind Ausschussware.)

H_0: $p \leq 0{,}04$ (4 % und weniger Teile sind Ausschussware.)

Die Nullhypothese würde nur verworfen werden, wenn bei einer Überprüfung die Anzahl an Ausschussteilen signifikant nach oben abweicht. Daher handelt es sich um einen rechtsseitigen Test.

Mit $p = 0{,}04$, $n = 100$ und $\alpha = 0{,}1$ ergibt sich:

$P(X \geq k) < 0{,}1 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq k - 1) < 0{,}1$

$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) \approx 1 - 0{,}8936 = 0{,}1064 > 0{,}1$

$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475 < 0{,}1$

Für den Ablehnungsbereich der Nullhypothese gilt somit: $\overline{A} = \{8; 9; \ldots; 100\}$.

Befinden sich mindestens 8 defekte Beleuchtungsanlagen unter den getesteten 100, so darf der Mitarbeiter die Nullhypothese verwerfen und seine Vermutung, dass der Ausschussanteil über 4 % liegt, als bestätigt ansehen.

4.2.2 Da die Anzahl der beschädigten Beleuchtungsanlagen nicht im Ablehnungsbereich der Nullhypothese liegt, kann der Mitarbeiter seine Hypothese, dass mehr als 4 % der Beleuchtungseinheiten defekt sind, nicht mit ausreichender Signifikanz belegen. Gleichzeitig ist jedoch damit die Nullhypothese nicht bewiesen

IV Zentrale Abiturprüfungen

Sie erfüllen die Abiturvorgaben 2022 vollumfänglich.

Zentrale Abiturprüfung 2017 Berufliches Gymnasium

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Lösungen Seite 183 - 187

Aufgabe 1 (18 Punkte) **Punkte**

1.1 Analysis

Gegeben sind die zwei Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x + 18$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 9x + 18$$

In der folgenden Abbildung sind die Graphen der Ableitungen von f und g im Bereich [0; 10] dargestellt.

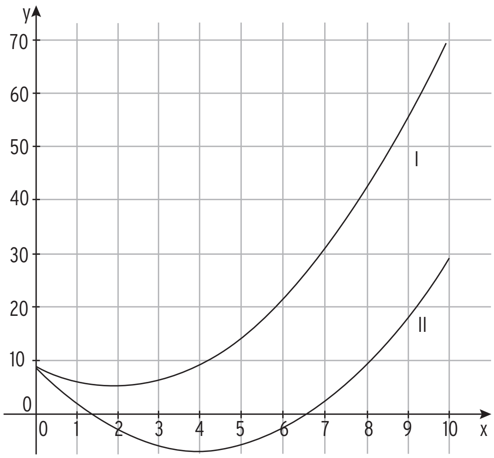


Abbildung 1

1.1.1 Entscheiden Sie Sie begründet, welcher Graph die Ableitung von f und welcher Graph die Ableitung von g darstellt. 4

1.1.2 Prüfen Sie, welcher der beiden Graphen nicht zu der Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion gehören kann. 2

Zentrale Abiturprüfung 2017 — Berufliches Gymnasium

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

1.2 Lineare Algebra **Punkte**

Ein Unternehmen stellt aus drei Bauteilen B1, B2 und B3 zwei Endprodukte E1 und E2 her. Die Stückliste ist in der folgenden Tabelle dargestellt.

	E1	E2
B1	1	2
B2	3	1
B3	0	2

1.2.1 Berechnen Sie den Materialbedarf an Bauteilen für einen Auftrag über 10 Stück von Endprodukt E1 und 15 Stück von Endprodukt E2. 2

1.2.2 Der Lagerbestand an Bauteilen beträgt 80 Stück von B1 und 80 Stück von B2 sowie 40 Stück von B3.

Bestimmen Sie die Anzahl der Endprodukte E1, die das Unternehmen mit diesem Lagerbestand maximal herstellen kann, wenn 20 Stück von E2 hergestellt werden.

4

1.3 Stochastik

Bei der laufenden Produktion sind erfahrungsgemäß 90 % der Bauteile einwandfrei. Zu Prüfzwecken wird eine Stichprobe entnommen.

1.3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

E_1: Die ersten zwei Bauteile sind einwandfrei.

E_2: Genau zwei der ersten drei Bauteile sind defekt. 3

1.3.2 Die Standardabweichung für die binomialverteilte Anzahl der defekten Bauteile in der Stichprobe beträgt $\sigma = 3$.

Bestimmen Sie den Stichprobenumfang. 3

Zentrale Abiturprüfung 2021
Grundkursfach Mathematik
Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel Lösungen Seite 235 - 240

Aufgabenstellung

Die *Snowsporting GmbH* ist ein deutscher Hersteller von Wintersportartikeln und vertreibt diese weltweit. Neben verschiedenen Arten von Ski, Bindungen und Skistöcken werden zusätzlich Snowboards, Skischuhe, Skibekleidung und sonstige Accessoires mit dem Label Snowsporting als Handelsware verkauft

Aufgabe 1 (21 Punkte)

1.1 **Analysis**

Das Unternehmen geht davon aus, dass sich die Absatzzahlen des neu einzuführenden Skimodells Allmountain Cross gemäß der Funktion a entwickeln:

$a(t) = 6 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t} + 0{,}5 \quad \text{mit } t \geq 0$

Hierbei gibt t die Anzahl der Monate nach Produkteinführung (t = 0) und a(t) die abgesetzten Mengeneinheiten pro Monat (ME/Monat) an. Dabei entspricht 1 ME 1000 Paar Ski.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion a.

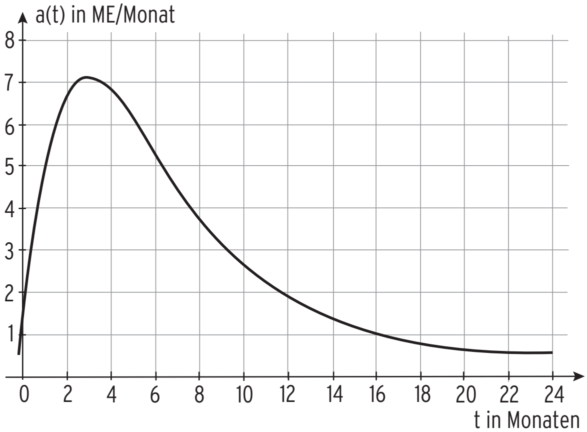


Abbildung 1

1.1.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Funktion a ihr Maximum erreicht. Nutzen Sie ohne Nachweis: $a''(t) = \left(-4 + \frac{2}{3} \cdot t\right) \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t}$ (6 Punkte)

1.1.2 Nehmen Sie Stellung zur Aussage: „Langfristig wird der Absatz des Modells je Monat etwa 1000 Paar Ski betragen.“ (3 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2021 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

1.2 **Lineare Algebra/Analytische Geometrie**

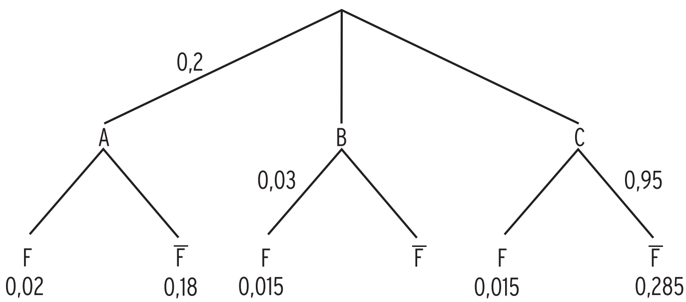
Das Unternehmen produziert aus den Komponenten K_1, K_2 und K_3 die Hauptbestandteile H_1, H_2 und H_3. Im nächsten Schritt werden aus diesen Hauptbestandteilen die drei Skistockmodelle S_1, S_2 und S_3 gefertigt.
Die Matrizen A_{KH}, B_{HS} und C_{KS} geben an, wie viele Mengeneinheiten (ME) von H_1 bis H_3 beziehungsweise wie viele ME von K_1 bis K_3 in je eine ME von S_1 bis S_3 beziehungsweise in je eine ME von H_1 bis H_3 eingehen.

Das Verflechtungsdiagramm in Anlage 1 gibt die jeweilige Teileverwendung in den beiden Produktionsstufen an.

1.2.1 Ergänzen Sie alle fehlenden Werte in den Matrizen und dem Verflechtungsdiagramm in Anlage 1. (6 Punkte)

1.3 **Stochastik**

Die Snowsporting GmbH produziert ein besonders erfolgreiches Skimodell an drei verschiedenen Standorten A, B und C.
Eine interne Qualitätsanalyse hat ergeben, dass immer wieder ein bestimmter Produktionsfehler F entsteht und Ski mit diesem Fehler aus Sicherheitsgründen nicht verkauft werden dürfen.
Das folgende Baumdiagramm stellt den Sachverhalt dar:



1.3.1 Ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten des obigen Baumdiagramms in Anlage 2. (4 Punkte)

1.3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Skimodell den Produktionsfehler F aufweist. (2 Punkte)

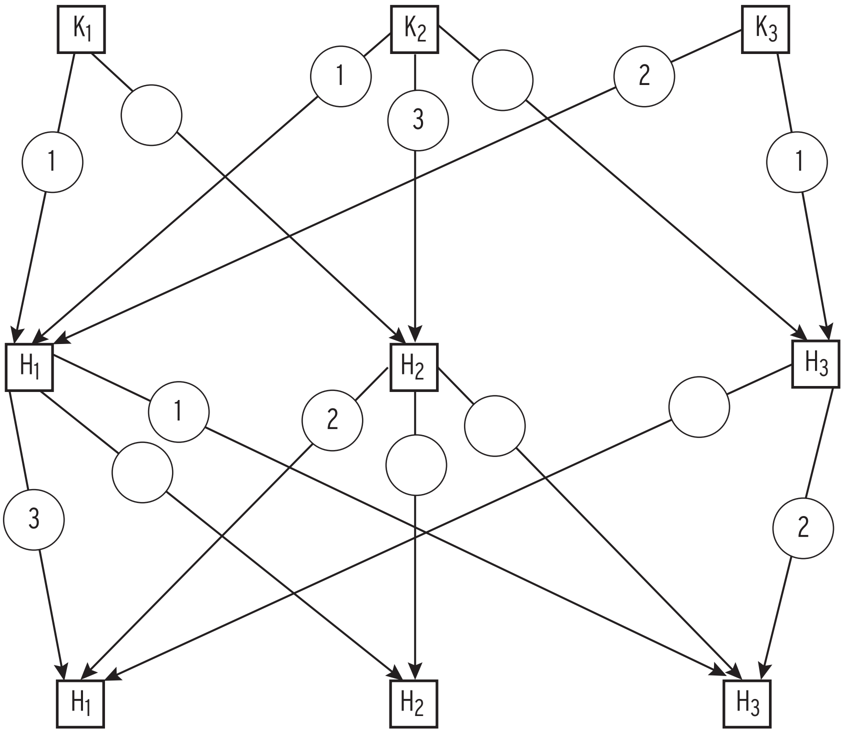
Zentrale Abiturprüfung 2021 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

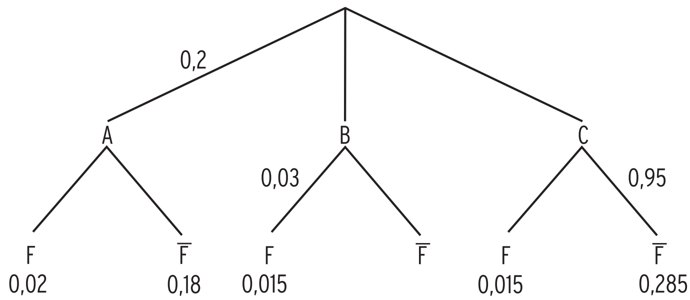
Anlage 1 zu Aufgabe 1.2.1

Name des Prüflings: ____________________________________

$$A_{KH} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \_\_ & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_{HS} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & 1 \\ 2 & \_\_ & 1 \\ 1 & \_\_ & 2 \end{pmatrix} \quad C_{KS} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & \_\_ \\ 10 & 11 & 6 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$



Anlage 2 zu Aufgabe 1.3.1



Zentrale Abiturprüfung 2021 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil B: Hilfsmittel GTR/CAS

Aufgabenstellung Lösungen Seite 204 - 208

Die *Snowsporting GmbH* ist ein deutscher Hersteller von Wintersportartikeln und vertreibt diese weltweit. Neben verschiedenen Arten von Ski, Bindungen und Skistöcken werden zusätzlich Snowboards, Skischuhe, Skibekleidung und sonstige Accessoires mit dem Label Snowsporting als Handelsware verkauft.

In allen Aufgaben gilt: ME ≙ Mengeneinheiten und GE ≙ Geldeinheiten

Aufgabenstellung

Aufgabe 2 – Analysis (28 Punkte)

Das Top-Skimodell Wizzard soll erstmalig in der Saison 2021/22 auf den Markt kommen. Das Modell Swing hat sich bereits auf dem Markt etabliert.

2.1 Die *Snowsporting GmbH* geht davon aus, dass die Kostensituation für das Modell Wizzard durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion 3. Grades entsprechend der Gleichung $K(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 5{,}25 \cdot x + 12{,}5$ beschrieben werden kann.
Hierbei gibt $x \geq 0$ die produzierte Menge in ME und K(x) die Kosten in GE an.
Die Kapazitätsgrenze wird bei 5 ME erreicht.

2.1.1 Berechnen Sie ...

(1) die Gesamtkosten sowie die Grenzkosten bei einer Produktion von 3 ME.

(2) die Produktionsmenge, bei der die Kostenfunktion von einem degressiven in einen progressiven Kostenanstieg wechselt.

(3) die variablen Stückkosten bei einer Produktion von 1,5 ME. (8 Punkte)

2.1.2 Zeigen Sie, dass der Graph der Kostenfunktion K streng monoton steigt. (3 Punkte)

2.1.3 Ermitteln Sie alle Produktionsmengen, bei denen die Grenzkosten 3 GE/ME betragen. (4 Punkte)

2.1.4 Berechnen Sie die Grenzkosten und beurteilen Sie deren ökonomische Bedeutung bei einer Produktionsmenge von 4 ME und einem konstanten Preis von 30 GE/ME. (4 Punkte)

2.2 Die *Snowsporting GmbH* verwendet für das erste Halbjahr des kommenden Geschäftsjahres zur Prognose der Absatzrate in ME/Monat ihres Modells Swing die Funktion a. Dabei gibt $0 \leq t \leq 6$ die Zeit in Monaten seit Beginn des Geschäftsjahres an: $a(t) = (3000 \cdot t^3 + 6000 \cdot t^2 + 3000 \cdot t) \cdot e^{-0{,}9 \cdot t}$

2.2.1 Ermitteln Sie die Wendestellen des Graphen von a und deuten Sie diese im Sachzusammenhang. (5 Punkte)

2.2.2 Für das Modell Swing hat die Geschäftsleitung folgende Zielvorgabe gesetzt:
„Über einen Zeitraum von mindestens drei Monaten soll die Absatzrate über 5 000 ME/Monat liegen."
Überprüfen Sie, ob die Funktion a dieser Zielvorgabe entspricht. (4 Punkte)