

Ott
Rosner

Mathematik

Fachhochschulreife im
Berufskolleg 2027
Prüfungsvorbereitung
Baden-Württemberg



mit Erklärungsvideos

Merkur 
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser

Roland Ott

Oberstudienrat

Stefan Rosner

Studienrat an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG behält sich eine Nutzung ihrer Inhalte für kommerzielles Text- und Data Mining (TDM) im Sinne von § 44b UrhG ausdrücklich vor. Für den Erwerb einer entsprechenden Nutzungserlaubnis wenden Sie sich bitte an copyright@merkur-verlag.de.

* * * * *

Die urheberrechtliche Genehmigung für die Veröffentlichung der Prüfungsaufgaben erfolgte durch das Institut für Bildungsanalysen Baden-Württemberg (IBBW).

6. Auflage 2026

© 2021 by Merkur Verlag Rinteln

Gesamtherstellung:

MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de

lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0382-06

ISBN 978-3-8120-1245-4

Ablauf der Prüfung zur Fachhochschulreife in Mathematik

Zu Beginn: SchülerIn erhält beide Aufgabenteile, jedoch keine Hilfsmittel

Phase 1: Bearbeitung des hilfsmittelfreien Teils

Teil	Thema	Auswahl	Richtzeit	Punkte
1	Analysis	keine	ca. 60 min	30

Nach endgültiger Abgabe von Teil 1 erhält SchülerIn die Hilfsmittel

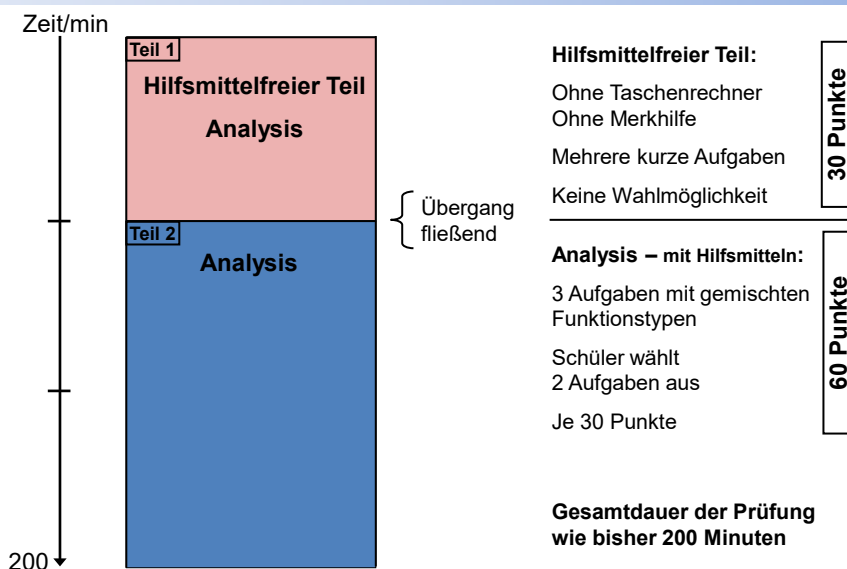
Phase 2: Bearbeitung der Teile mit Hilfsmitteln (WTR + Merkhilfe)

Teil	Thema	Auswahl	Richtzeit	Punkte
2	Analysis	SchülerIn wählt zwei aus drei Aufgaben	ca. 140 min	60

Hinweise

- Die Prüfung dauert insgesamt maximal 200 Minuten.
Die maximal erreichbare Punktzahl beträgt 90 Punkte.

Prüfungsmodus – FHSR ab 2018



**Vorgaben für die Prüfung zur
Fachhochschulreife in Mathematik im Schuljahr 2026/2027**

Zur Prüfung werden der **Fachlehrkraft** vorgelegt:

- eine Aufgabe zum hilfsmittelfreien Pflichtteil (je 30 Punkte) mit Aufgaben aus der Analysis
- ein hilfsmittelgestützter Prüfungsteil mit 3 Aufgaben aus der Analysis mit jeweils 30 Punkten (Schülerwahl 2 aus 3 wie bisher auch)

I Teil 1 der Fachhochschulreife-Prüfung ohne Hilfsmittel

1 Übungsaufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1

Lösungen Seite 18

- 1.1 Lösen Sie die Gleichung: $-2x^3 + 6x = 2x$.
- 1.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 2 - \frac{1}{4}x^2$ in $x = 2$.
- 1.3 Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 1$ besitzt einen Wendepunkt. Bestimmen Sie die Koordinaten.
- 1.4 Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 1 \\ x - y &= 3. \end{aligned}$$
- 1.5 Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^0 (x^3 + 2) dx$.
- 1.6 Bestimmen Sie die Art und Lage der Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^2(x - 2)(x + 1)$.
- 1.7 Das Schaubild von f mit $f(x) = 2\sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$, wird um 3 nach links verschoben und um 1 nach unten verschoben. Wie lautet die Gleichung der entstandenen Kurve?
- 1.8 Bilden Sie die erste Ableitung von f mit $f(x) = e^{2x-3} - 2x + 1$.
- 1.9 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^4 + 3$ und $g(x) = 2x^2$. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Schaubilder von f und g .

Aufgabe 2

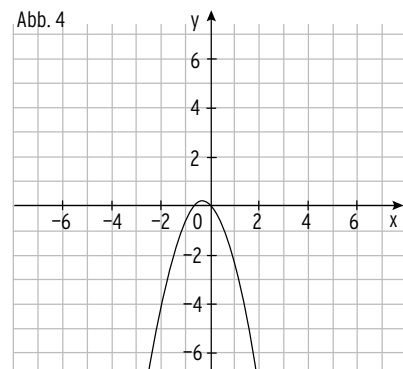
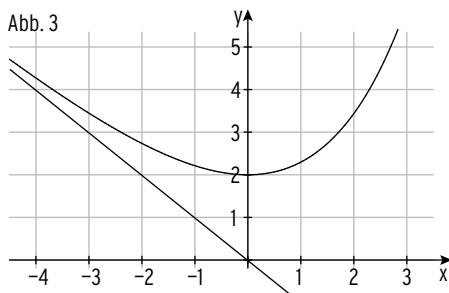
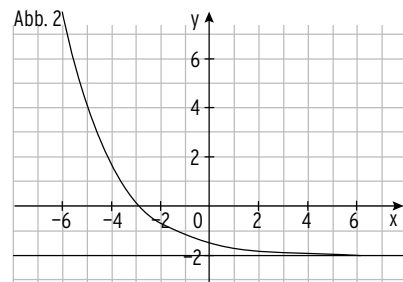
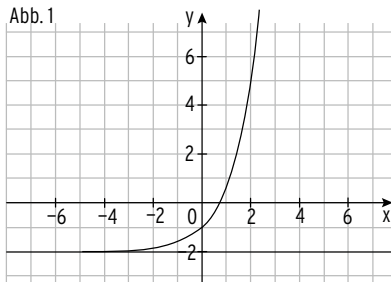
Lösungen Seite 19/20

- 2.1 Bestimmen Sie zwei Lösungen der Gleichung: $4\sin(2x) = 0$.
- 2.2 Welche Gerade schneidet das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \cos(\frac{1}{4}x) - 1$; $x \in \mathbb{R}$, in $x = 2\pi$ senkrecht?
- 2.3 Zeigen Sie: Das Schaubild K_f der Funktion f mit $f(x) = e^{-\frac{1}{3}x} - x + 1$ besitzt keinen Wendepunkt.
Ist K_f eine Linkskurve? Begründen Sie Ihre Antwort.
- 2.4 Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x - y &= -2 \end{aligned}$$
- 2.5 Bestimmen Sie $u \neq 0$, so dass $\int_u^0 (x + 2) dx = 0$
- 2.6 Bestimmen Sie die Gleichung der nicht waagrechten Wendetangente an das Schaubild von f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$; $x \in \mathbb{R}$.
- 2.7 Wie entsteht das Schaubild von f mit $f(x) = 2\cos(3x) - 1$; $x \in \mathbb{R}$, aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = \cos(x)$.
- 2.8 Bestimmen Sie die Stammfunktion von f mit $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}x)$; $x \in \mathbb{R}$, deren Schaubild die y -Achse in 3 schneidet.
- 2.9 Zeigen Sie, die Gleichung $e^{2x} + e^x = 2$ hat genau eine Lösung.
- 2.10 Geben Sie die Nullstellen des Polynoms p mit $p(x) = x^3 - 100x$; $x \in \mathbb{R}$ an.
Erstellen Sie ohne weitere Rechnung eine Skizze des Schaubilds von p .

Aufgabe 3

Lösungen Seite 20/21

Gegeben sind die Schaubilder von vier Funktionen, jeweils mit sämtlichen Asymptoten:



Drei dieser vier Schaubilder werden beschrieben durch die Funktionen f , g und h mit $f(x) = ae^{0,5x} - x$, $g(x) = -2 + be^{-0,5x}$, $h(x) = cx^2 - x$

a) Ordnen Sie den Funktionen f , g und h das jeweils passende Schaubild zu.

Begründen Sie Ihre Zuordnung.

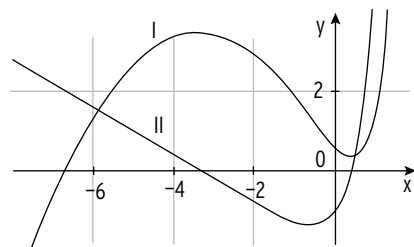
b) Bestimmen Sie die Werte für a , b und c .

Aufgabe 4

Die Abbildung zeigt die Graphen einer Funktion und der zugehörigen Ableitungsfunktion.

Entscheiden Sie, welcher der Graphen I und II die Ableitungsfunktion darstellt.

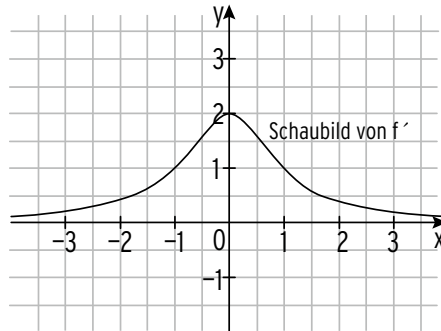
Begründen Sie Ihre Entscheidung.



Aufgabe 5

Lösungen Seite 21

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f .
Welcher der folgenden Aussagen über die Funktion f sind wahr, falsch oder unentscheidbar? Begründen Sie Ihre Antworten.



1. f ist streng monoton wachsend für $-3 < x < 3$.
2. Das Schaubild von f hat mindestens einen Wendepunkt.
3. Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y -Achse.
4. Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in [-3; 3]$.

Aufgabe 6

Eine nicht lineare Funktion h hat keine Nullstelle. Der Graph von h nähert sich für $x \rightarrow -\infty$ asymptotisch der Geraden mit der Gleichung $y = -3$.
Geben Sie einen möglichen Funktionsterm von h an und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen.

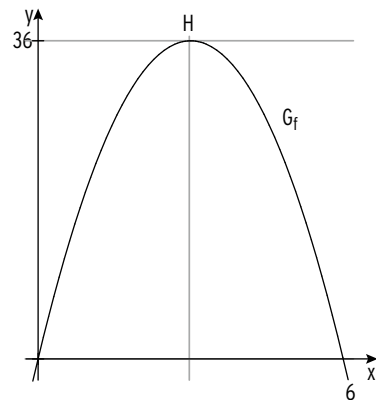
Aufgabe 7

- a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \sin(x) + x$ bei $x = \pi$ einen Sattelpunkt aufweist.
- b) Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = 3 \cdot e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von g , die beiden Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = 4$ begrenzen eine Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Aufgabe 8

Lösungen Seite 22

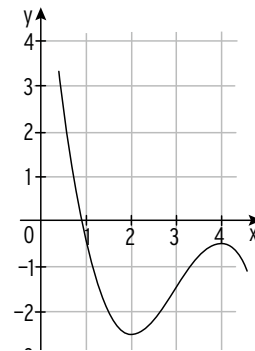
- Bestimmen Sie den Funktionsterm für die abgebildete ganzrationale Funktion 2. Grades.
- Ergänzen Sie den Graphen der 1. Ableitung in das Koordinatensystem. Beschreiben Sie den Verlauf des Ableitungsgraphen mathematisch.



Aufgabe 9

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -0,5x^3 + 4,5x^2 - 12x + 7,5$; $x \in \mathbb{R}$.

- Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Gleichung $0 = -0,5x^3 + 4,5x^2 - 12x + 7,5$ nur genau eine Lösung hat.
- Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f .



Aufgabe 10

Lösungen Seite 23

Das Rechteck ABCD mit $A(-2 | 0)$, $B(2 | 0)$, $C(2 | 2)$ und $D(-2 | 2)$ wird durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$; $x \in \mathbb{R}$, in zwei Teilflächen zerlegt. Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.

Aufgabe 11

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = e^{4x}$ und $g(x) = e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass sich die Schaubilder der Funktionen f und g genau einmal schneiden.

Aufgabe 12

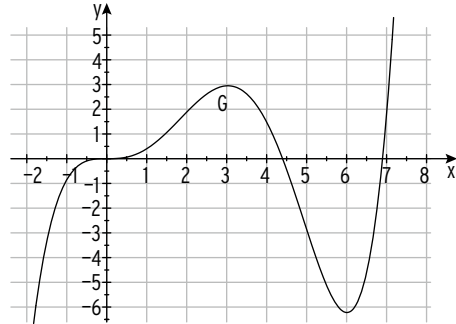
Bestimmen Sie die Stammfunktion von g mit $g(x) = 2e^{-4x} + 4x - 3$; $x \in \mathbb{R}$, deren Schaubild die y -Achse bei 6 schneidet.

Aufgabe 13

Lösungen Seite 23

Die Kurve G ist das Schaubild einer ganzrationalen Funktion g.
Bezogen auf den unten gezeichneten Ausschnitt sind von den folgenden Aussagen einige falsch. Geben Sie diese an und begründen Sie Ihre Antwort.

- a) $g'(0) = 0$
- b) $g'(4) > 0$
- c) $g''(0) = 0$
- d) G hat genau 3 Wendepunkte.
- e) $g''(6) < 0$
- f) G hat genau 3 Kurvenpunkte mit waagrechter Tangente.
- g) G hat genau 3 Extrempunkte.
- h) $\int_{-1}^3 g(x) dx < 0$



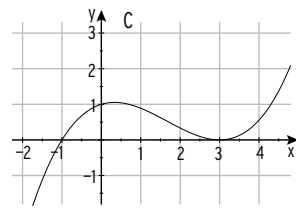
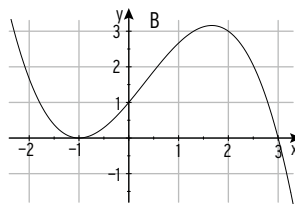
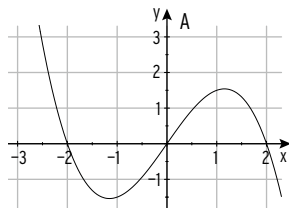
Aufgabe 14

Lösungen Seite 24

Von einer Funktion g kennt man den Funktionsterm nur teilweise.

Man weiß: $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + cx + 1$.

Es ist bekannt, dass zwei der dargestellten Kurven A, B und C nicht Schaubild von g sein können. Begründen Sie, welche dies sind.



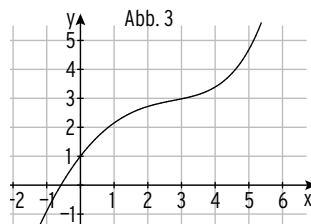
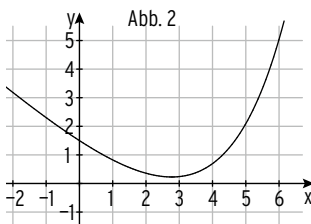
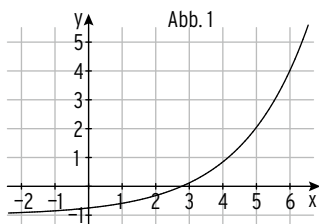
Geben Sie den Term einer Funktion an, deren Schaubild mit der Kurve B im gezeichneten Abschnitt übereinstimmt.

Die Kurve C in obiger Abbildung ist das Schaubild der Ableitungsfunktion h' einer Funktion h, deren Schaubild durch den Ursprung geht. Skizzieren Sie das Schaubild von h zusammen mit der Kurve C in ein Koordinatensystem.

Aufgabe 15

Lösungen Seite 24

Die folgenden Abbildungen zeigen das Schaubild einer Funktion h , ihrer Ableitungsfunktion h' und einer Stammfunktion H von h .



Ordnen Sie die Schaubilder den Funktionen H , h und h' zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

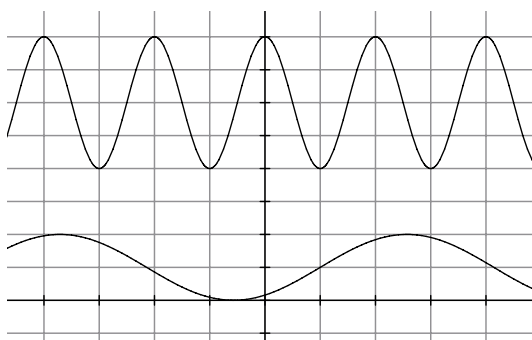
Aufgabe 16

Lösungen Seite 25

Die Abbildung zeigt die Schaubilder zweier Funktionen. Zeichnen Sie

ein Koordinatensystem so ein, dass das obere Schaubild zu der Funktion g mit $g(x) = 2\cos(\pi x) + 2$; $x \in \mathbb{R}$ gehört.

Ermitteln Sie bezüglich Ihres Koordinatensystems den Funktionsterm der zum unteren Schaubild gehörenden Funktion.



Aufgabe 17

Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f . Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

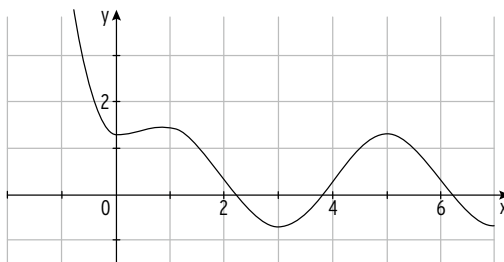
Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der Eigenschaften des gegebenen Schaubildes.

• $f'(0,5) > f'(2,5)$

• $f''(1) > 0$

• $\int_0^4 f(x) dx > 0$

• Jede Stammfunktion von f hat für $0 \leq x \leq 7$ zwei Maximalstellen.



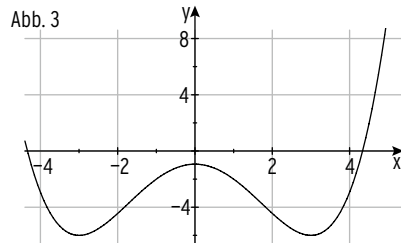
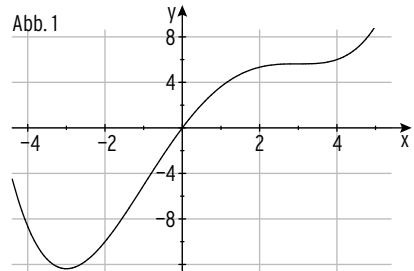
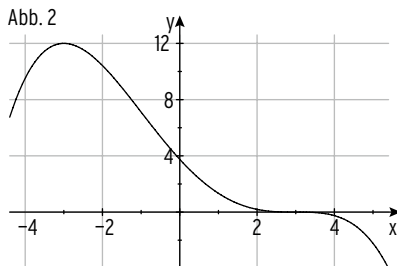
Aufgabe 18

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 - 9x + 27); x \in \mathbb{R}.$$

Die Abbildung zeigt die Graphen von drei Funktionen.

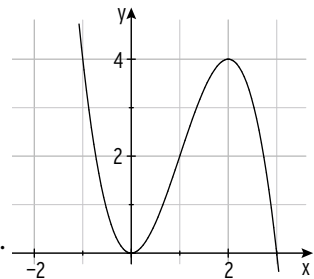
Eine Funktion ist eine Stammfunktion von f . Entscheiden Sie. Begründen Sie Ihre Wahl, indem Sie jeweils zwei Argumente angeben, die zum Ausschluss eines Graphen führen.



Aufgabe 19

Welche der folgenden Aussagen zum abgebildeten Schaubild einer Funktion f sind richtig, welche falsch? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

- a) $\int_0^3 f(x) dx = 12$
- b) Eine Stammfunktion von f besitzt zwei Wendestellen.
- c) Die durchschnittliche Änderungsrate für $x \in [0; 2]$ ist größer als die momentane Änderungsrate bei $x = 1$.

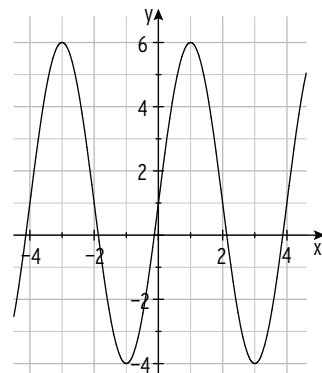


Aufgabe 20

Gegeben ist das Schaubild einer trigonometrischen Funktion mit der Gleichung:

$$h(x) = a \cdot \sin(bx) + c.$$

Bestimmen Sie mithilfe der Zeichnung passende Werte für a , b und c .



Aufgabe 21

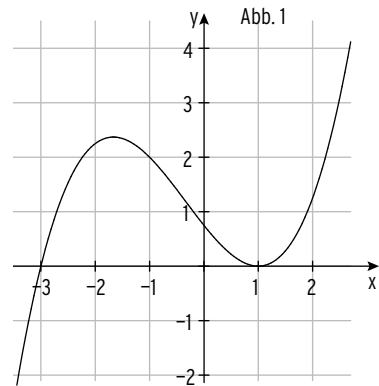
Lösungen Seite 27

Abbildung 1 zeigt das Schaubild $K_{g'}$ der 1. Ableitung der Funktion g .

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen für den abgebildeten Abschnitt richtig, falsch oder nicht entscheidbar sind.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

- Das Schaubild der Funktion g hat einen Punkt, in dem die Tangente die Steigung 3 hat.
- Die Funktion g hat zwei Extremstellen.
- Die Funktion g hat für $x = 1$ eine Nullstelle.
- Das Schaubild der 2. Ableitung von g hat einen Tiefpunkt mit negativem y -Wert.

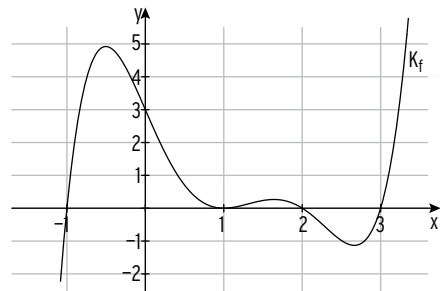


Aufgabe 22

Die folgende Abbildung zeigt das Schaubild K_f einer Funktion f .

Begründen Sie, weshalb K_f nicht das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 4. Grades sein kann.

Bestimmen Sie den Funktionsterm einer Funktion g vom Grad 4, deren Schaubild mit den Koordinatenachsen die gleichen gemeinsamen Punkte wie K_f besitzt.



Aufgabe 23

Die Funktion g hat folgende Eigenschaften:

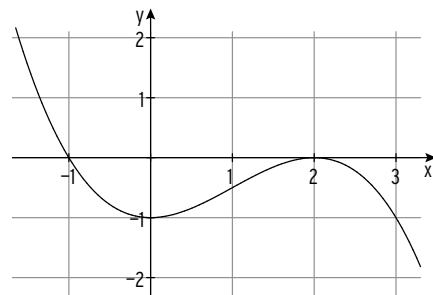
- $g(1) = -1$ und $g'(1) = 0$
- $g'(0) > 0$
- $g''(-2) > 0$
- $\int_0^6 g(x) dx = 0$

Welche Bedeutung hat jede einzelne Eigenschaft für das Schaubild von g ?

Aufgabe 24

Gegeben ist das Schaubild einer Polynomfunktion f 3. Grades.

Bestimmen Sie einen passenden Funktionsterm.



Lösungen der Übungsaufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1

Aufgabe Seite 9

- 1.1 Gleichung in Nullform: $-2x^3 + 6x = 2x \Leftrightarrow -2x^3 + 4x = 0$
 Ausklammern: $2x(-x^2 + 2) = 0$
 Satz vom Nullprodukt: $x = 0 \vee -x^2 + 2 = 0$
 $-x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2}$
 Lösungen: $x_1 = 0; x_{2|3} = \pm \sqrt{2}$
- 1.2 $f(x) = 2 - \frac{1}{4}x^2; f'(x) = -\frac{1}{2}x$
 $f(2) = 1; f'(2) = -1$ einsetzen in $y = mx + b$: $1 = -1 \cdot 2 + b$ ergibt $b = 3$
 Gleichung der Tangente: $y = -x + 3$
- 1.3 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 1; f'(x) = -x^2 + 6x; f''(x) = -2x + 6; f'''(x) = -2 \neq 0$
 Wendepunkt: $f''(x) = 0 \quad -2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
 $f(3) = 17$ ergibt $W(3 | 17)$
- 1.4 Additionsverfahren: $2x + 5y = 1$
 $x - y = 3 \quad \cdot (-2) \quad \leftarrow$ ergibt $7y = -5 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{7}$
 Einsetzen in $x - y = 3$ ergibt $x - (-\frac{5}{7}) = 3 \Leftrightarrow x = 3 - \frac{5}{7} = \frac{16}{7}$
 Lösung: $(\frac{16}{7}; -\frac{5}{7})$
- 1.5 $\int_{-1}^0 (x^3 + 2) dx = [\frac{1}{4}x^4 + 2x]_{-1}^0 = 0 - (\frac{1}{4} - 2) = \frac{7}{4}$
- 1.6 $f(x) = \frac{1}{5}x^2(x - 2)(x + 1)$ Art und Lage der Nullstellen:
 $x = 0$ doppelte Nullstelle (K_f berührt die x-Achse)
 $x = 2; x = -1$ einfache Nullstelle (K_f schneidet die x-Achse)
- 1.7 $f(x) = 2\sin(x); x \in \mathbb{R}$
 K_f wird um 3 nach links verschoben: $y = 2\sin(x + 3)$ (Ersetze x durch $(x + 3)$)
 und um 1 nach unten verschoben: $y = 2\sin(x + 3) - 1$
- 1.8 Mit der Kettenregel: $f'(x) = 2 \cdot e^{2x-3} - 2$
- 1.9 Gleichsetzen: $f(x) = g(x) \quad -x^4 + 3 = 2x^2$
 Nullform: $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$
 Substitution: $x^2 = u \quad u^2 + 2u - 3 = 0$
 Mit Formel oder $u^2 + 2u - 3 = (u - 1)(u + 3)$: $u_1 = -3; u_2 = 1$
 Rücksubstitution: $u_2 = x^2 = 1 \Rightarrow x_{1|2} = \pm 1$
 $(u_1 = x^2 = -3 \text{ hat keine Lösung})$
 Schnittpunkte der Schaubilder $S_1(-1 | 2); S_2(1 | 2)$ (vgl. Symmetrie)

Aufgabe 2

Aufgabe Seite 10

2.1 $4\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0$ für $2x = 0; \pi; 2\pi; \dots$

Lösungen: $x_1 = 0; x_2 = \frac{\pi}{2}$ (oder auch $x = \pi; x = -\frac{\pi}{2}; \dots$)

2.2 $f(x) = \cos(\frac{1}{4}x) - 1; x \in \mathbb{R}; f'(x) = -\frac{1}{4}\sin(\frac{1}{4}x)$

Senkrecht schneiden bedeutet negativer Kehrwert der Steigung:

$$f'(2\pi) = -\frac{1}{4}\sin(\frac{1}{4} \cdot 2\pi) = -\frac{1}{4}\sin(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{4} \cdot 1 = -\frac{1}{4}$$

Steigung der Geraden: $m = \frac{-1}{-\frac{1}{4}} = 4$

$$f(2\pi) = -1; y = 4x + b; -1 = 4 \cdot 2\pi + b \Rightarrow b = -1 - 8\pi$$

Gerade durch $P(2\pi | -1)$ mit Steigung 4: $y = 4x - 1 - 8\pi$

2.3 $f(x) = e^{-\frac{1}{3}x} - x + 1; f'(x) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x} - 1; f''(x) = \frac{1}{9}e^{-\frac{1}{3}x}$

K_f hat keinen Wendepunkt, da $f''(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f''(0) = \frac{1}{9} > 0 \quad K_f \text{ ist eine Linkskurve, da } f''(x) > 0$$

2.4 $x + 2y = 1$ (I) $\wedge x - y = -2$ (II) (I) - (II) ergibt $3y = 3 \Rightarrow y = 1$

einsetzen von $y = 1$ in $x + 2y = 1$ ergibt $x = -1$

Lösung: $(-1; 1)$

2.5 $\int_0^1 (x+2) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^1 = 0 - (\frac{1}{2}u^2 + 2u) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}u^2 - 2u = 0$

Ausklammern: $u \cdot (-\frac{1}{2}u - 2) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $u = 0; u = -4$

$u \neq 0$ nach Aufgabe, also einzige Lösung $u = -4$.

2.6 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2; f'(x) = x^3 + 3x^2; f''(x) = 3x^2 + 6x; f'''(x) = 6x + 6;$

Wendepunkt: $f''(x) = 0 \quad 3x^2 + 6x = 0$

$$3x(x+2) = 0 \text{ für } x_1 = 0; x_2 = -2$$

$$f'(0) = 0 \text{ (Tangente ist waagrecht); } f'(-2) = 4$$

Mit $f(-2) = -6$ und dem Ansatz: $y = mx + b; -6 = 4 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 2$

Gleichung der nicht waagrechten Wendetangente: $y = 4x + 2$

2.7 Das Schaubild von f mit $f(x) = 2\cos(3x) - 1; x \in \mathbb{R}$, entsteht aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = \cos(x)$ durch Streckung in y -Richtung mit Faktor 2, Streckung in x -Richtung mit Faktor $\frac{1}{3}$ und Verschiebung um 1 nach unten.

2.8 Stammfunktion von f mit $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}x); x \in \mathbb{R}; F(x) = -\frac{3}{2\pi}\cos(\frac{\pi}{3}x) + c$

durch $(0 | 3): F(0) = -\frac{3}{2\pi} + c = 3 \Rightarrow c = 3 + \frac{3}{2\pi}$

Stammfunktion: $F(x) = -\frac{3}{2\pi}\cos(\frac{\pi}{3}x) + 3 + \frac{3}{2\pi}$

Aufgabe 2**Aufgabe Seite 10**

2.9 Gleichung in Nullform: $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

Substitution: $e^{2x} = u^2$; $e^x = u$: $u^2 + u - 2 = 0$

Lösungen in u: $u_{1|2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} = -\frac{1}{2} \pm 1,5$

$u_1 = 1$; $u_2 = -2$

Wegen $e^x > 0$ gibt es nur für $u > 0$ eine Lösung, also genau eine Lösung.

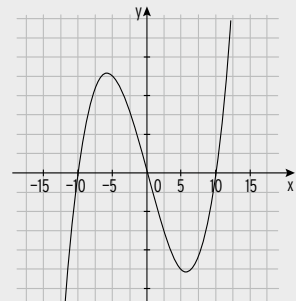
2.10 Nullstellen von p: $p(x) = 0$ $x^3 - 100x = 0$

Ausklammern: $x \cdot (x^2 - 100) = 0$

Nullprodukt: $x = 0$ oder $x^2 - 100 = 0$

Lösungen: $x_1 = 0$; $x_{2|3} = \pm 10$

Skizze des Schaubilds von p

**Aufgabe 3****Aufgabe Seite 11**

a) und b)

Abb. 4: Parabel mit $h(x) = cx^2 - x$
geht durch den Ursprung und durch $P(-2 | -4)$

$-4 = c(-2)^2 - (-2)$ damit $c = -\frac{3}{2}$

Abb. 2: Graph einer Exponentialfunktion mit $g(x) = -2 + be^{-0,5x}$

waagrechte Asymptote: $y = -2$ für $x \rightarrow \infty$

verläuft durch $S(0 | -1,5)$, also $-1,5 = -2 + b \Rightarrow b = 0,5$

Abb. 3: Graph einer Exponentialfunktion mit $f(x) = ae^{0,5x} - x$

schiefe Asymptote: $y = -x$ für $x \rightarrow -\infty$

verläuft durch $S(0 | 2)$, also $2 = a$

Aufgabe 4**Aufgabe Seite 11**

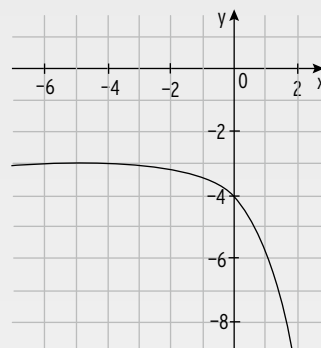
Graph II

Begründung: Graph I schneidet für ein $x \in [-7; -6]$ die x-Achse.

Würde Graph I die Ableitungsfunktion darstellen, so müsste Graph II für dieses $x \in [-7; -6]$ einen Extrempunkt haben. Da dies nicht der Fall ist, stellt Graph II die Ableitungsfunktion dar.

Aufgabe 5**Aufgaben Seite 12**

1. f ist streng monoton wachsend für $-3 < x < 3$. Wahr, da $f'(x) > 0$ für alle x
2. Das Schaubild von f hat mindestens einen Wendpunkt.
wahr, da das Schaubild von f' mindestens einen Hochpunkt hat.
3. Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.
falsch, da $f'(-x) = f'(x)$ gilt
4. Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in [-3; 3]$.
nicht entscheidbar, das Schaubild von f ist festgelegt bis auf einen konstanten Summanden.

**Aufgabe 6**

$$h(x) = -e^x - 3$$

Der Graph nähert sich von unten an die Asymptote ($y = -3$) an.

Aufgabe 7

- a) Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente. Somit muss gelten: $f''(\pi) = 0$ und $f'''(\pi) \neq 0$ und $f'(\pi) = 0$
 f mit $f(x) = \sin(x) + x$; $f'(x) = \cos(x) + 1$; $f''(x) = -\sin(x)$; $f'''(x) = -\cos(x)$

Die Bedingungen werden überprüft:

$$\begin{aligned} f''(\pi) &= 0 & -\sin(\pi) &= 0 \\ f'''(\pi) &\neq 0 & -\cos(\pi) &= 1 \neq 0 \\ f'(\pi) &= 0 & \cos(\pi) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Da alle Bedingungen erfüllt sind, liegt hier ein Sattelpunkt vor.

- b) Inhalt dieser Fläche: $A = \int_0^4 3 \cdot e^{-x} dx = [-3e^{-x}]_0^4 = -3 \cdot e^{-4} + 3 \cdot e^0$

$$A = -3 \cdot e^{-4} + 3$$

Aufgabe 8**Aufgaben Seite 13**a) Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx$ wegen $f(0) = 0$

$$f'(x) = 2ax + b$$

Bedingungen und LGS: $f(3) = 36$

$$9a + 3b = 36$$

$$3a + b = 12 \quad | \cdot (-1)$$

$$f'(3) = 0$$

$$6a + b = 0$$

Addition ergibt:

$$3a = -12 \Leftrightarrow a = -4$$

Einsetzen in $6a + b = 0$:

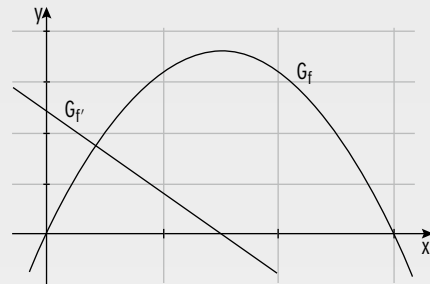
$$b = 24$$

Funktionsterm: $f(x) = -4x^2 + 24x$ Hinweis: $f(6) = 0$ führt auf $36a + 6b = 0 \Leftrightarrow 6a + b = 0$ **oder:** $f(x) = ax \cdot (x - 6)$ Punktprobe mit $H(3 | 36)$: $36 = a \cdot 3 \cdot (-3) \Rightarrow a = -4$

$$f(x) = -4x \cdot (x - 6)$$

b) Graph der 1. Ableitung: fallende Gerade

Sie schneidet die x-Achse an der

Maximalstelle von f , in $x = 3$.**Aufgabe 9**

a) In der dargestellten Abbildung sieht man eine Nullstelle. Anhand des Graphen erkennt man, dass die Funktion f zwei Extrempunkte besitzt. Diese liegen unterhalb der x -Achse. Da eine Funktion 3-ten Grades nur höchstens zwei Extrempunkte besitzt, werden außerhalb des hier dargestellten Bereiches keine weiteren Extrema liegen. Somit werden für $x \rightarrow -\infty$ die Funktionswerte immer größer und für $x \rightarrow \infty$ immer kleiner. Deshalb wird es keine weitere Nullstelle geben.

b) Es ist $f'(x) = -1,5x^2 + 9x - 12$; $f''(x) = -3x + 9$; $f'''(x) = -3$

$$f''(x) = 0$$

$$-3x + 9 = 0$$

$$3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$$

 $f'''(x) = -3 \neq 0$; $x = 3$ ist Wendestelle

$$f(3) = -1,5$$

Der Wendepunkt ist $W(3 | -1,5)$.

Aufgabe 10**Aufgaben Seite 13**

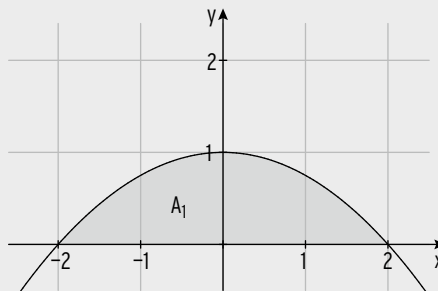
Das Rechteck ABCD hat einen Flächeninhalt von $4 \cdot 2 = 8$. Unterhalb des Graphen von f liegt eine Fläche von

$$A_1 = 2 \cdot \int_0^2 f(x) dx = \frac{8}{3}$$

$$\text{NR: } \int_0^2 f(x) dx = \left[-\frac{1}{12}x^3 + x \right]_0^2 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

Also liegt eine Fläche von $8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$ oberhalb des Graphen.

Damit ist das Verhältnis der beiden Teilflächen 1 : 2 (oder umgekehrt)

**Aufgabe 11**

Gleichsetzen: $f(x) = g(x)$

$$e^{4x} = e^{2x}$$

Nullform:

$$e^{4x} - e^{2x} = 0$$

Ausklammern

$$e^{2x}(e^{2x} - 1) = 0$$

Satz vom Nullprodukt: $e^{2x} \neq 0$

$$e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1$$

Einzig Lösung (Schnittstelle)

$$x = 0$$

Die Schaubilder von f und g schneiden sich genau einmal.

Aufgabe 12

Stammfunktion von g mit $g(x) = 2e^{-4x} + 4x - 3$: $G(x) = -\frac{1}{2}e^{-4x} + 2x^2 - 3x + d$

Punktprobe mit $(0 | 6)$: $6 = -\frac{1}{2}e^{-4 \cdot 0} + d$

$$6 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + d \Rightarrow d = 6,5$$

Gesuchte Stammfunktion G mit $G(x) = -\frac{1}{2}e^{-4x} + 2x^2 - 3x + 6,5$

Aufgabe 13**Aufgabe Seite 14**

Aussage b) ist falsch, da G bei $x = 4$ monoton fällt, also $g'(4) < 0$ sein müsste.

Aussage e) ist falsch, da G bei $x = 6$ einen TP hat und somit $g''(6) > 0$ sein müsste.

Aussage g) ist falsch, da $O(0 | 0)$ ein Sattelpunkt und somit kein Extrempunkt ist.

Ferner hat G nur noch zwei weitere Punkte mit waagrechter Tangente.

Aussage h) ist falsch, da die von G , der x -Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 3$ eingeschlossene Fläche einen größeren Flächeninhalt besitzt als die Fläche, die von G , der x -Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = -1$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 14**Aufgabe Seite 14**

Kurve A kann nicht das Schaubild der Funktion g sein,

- da das Schaubild von g nicht durch den Ursprung gehen kann.

oder - Kurve A ist symmetrisch zu O, also müsste $b = 0$ und $d = 0$ sein.

Kurve C kann nicht das Schaubild der Funktion g sein,

da der Koeffizient vor x^3 von g negativ ist. Das Schaubild von g verläuft also vom 2. in den 4. Quadranten: $y \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow \infty$.

Punktprobe mit $P(3 | 0)$: $f(3) = 0$: $-\frac{1}{3} \cdot 3^3 + \frac{1}{3} \cdot 3^2 + 3c + 1 = 0 \Rightarrow c = \frac{5}{3}$

Funktionsterm: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1$

oder: Lösung mit dem Nullstellen-Ansatz: $f(x) = a(x+1)^2(x-3)$

Punktprobe mit z. B. $(0 | 1)$ ergibt $a = -\frac{1}{3}$.

Funktionsterm: $f(x) = -\frac{1}{3}(x+1)^2(x-3)$

Hinweise zum Schaubild von h:

h' hat eine einfache Nullstelle in $x = -1$

mit VZW von - nach +.

$\Rightarrow h$ hat eine Minimalstelle in $x = -1$.

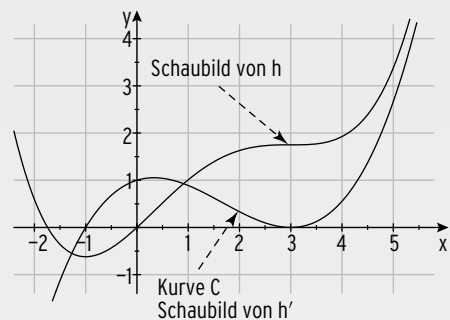
h' hat eine Extremstelle in $x \approx 0,5$.

$\Rightarrow h$ hat eine Wendestelle in $x \approx 0,5$.

h' hat eine Extremstelle in $x = 3$ mit $h'(3) = 0$.

$\Rightarrow h$ hat eine Wendestelle in $x = 3$

mit waagrechter Tangente.



Beachten Sie: x_0 ist einfache Nullstelle von $h' \Rightarrow x_0$ ist Extremstelle von h

x_0 ist doppelte Nullstelle von $h' \Rightarrow x_0$ ist Sattelstelle von h

x_0 ist Extremstelle von $h' \Rightarrow x_0$ ist Wendestelle von h

(x_0 ist Sattelstelle von h)

Aufgabe 15**Aufgabe Seite 15**

Zuordnung: Abb. 1: h' Abb. 2: h Abb. 3: H

Begründung: An der Stelle $x \approx 2,7$ hat nur der Graph in Abb. 2 einen Tiefpunkt.

An der Stelle $x \approx 2,7$ hat nur der Graph in Abb. 3 einen Wendepunkt.

An der Stelle $x \approx 2,7$ hat nur der Graph in Abb. 1 eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von - nach +.

Aufgabe 16**Aufgaben Seite 15**

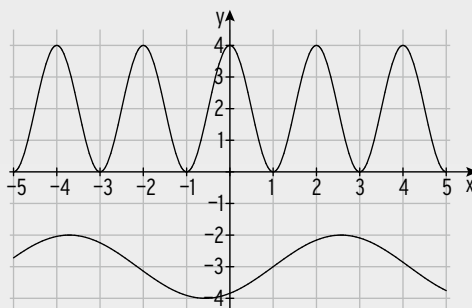
Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2\cos(\pi x) + 2$ hat die Periode $p = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, die Amplitude 2 und die Mittellinie $y = 2$. Das Schaubild berührt also die x -Achse und verläuft symmetrisch zur y -Achse.

$H(0 \mid 4)$ ist ein Hochpunkt.

Das untere Schaubild hat die Mittellinie $y = -3$, einen Wendepunkt bei $(1 \mid -3)$, die Amplitude $a = 1$ und die Periode $p = 2\pi$.

Das untere Schaubild ergibt sich aus der Kurve mit der Gleichung $y = \sin(x)$ mit Wendepunkt $(0 \mid 0)$ durch Verschiebung um 1 nach rechts und um 3 nach unten:

$$h(x) = \sin(x - 1) - 3.$$

**Aufgabe 17**

- $f'(0,5) > f'(2,5)$ wahr; die Steigung in $x = 0,5$ ist positiv, die Steigung in $x = 2,5$ ist negativ.
- $f''(1) > 0$ falsch; an der Stelle $x = 1$ liegt eine Rechtskrümmung vor.
- $\int_0^4 f(x) dx > 0$ wahr; die Summe der Inhalte der Flächen oberhalb der x -Achse ist größer als Summe der Inhalte der Flächen unterhalb der x -Achse
- Die 4. Aussage ist wahr; Eine Stammfunktion von f hat dann eine Maximalstelle, wenn die Funktion f eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Werten besitzt.

Dies ist für $0 \leq x \leq 7$ an der Stellen $x \approx 2,3$ und $x \approx 6,2$ der Fall.

Aufgabe 18**Aufgaben Seite 16**

Eine Stammfunktion von f ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades, die vom II. in den I. Quadranten verläuft.

Abbildung 1 ist das Schaubild einer Stammfunktion von f .

Abbildung 2 wird ausgeschlossen, wegen:

Der Verlauf trifft nicht zu, die Kurve verläuft vom III. in den IV. Quadranten

oder: $f(0) = F'(0) > 0$, aber die Kurve in Abbildung 2 ist fallend in $x = 0$

Abbildung 3 wird ausgeschlossen, wegen:

Das Schaubild in Abb. 3 ist symmetrisch zur y -Achse, aber K_f ist nicht symmetrisch zum Ursprung.

Aufgabe 19

a) Falsch: Die Methode „Kästchenzählen“ liefert etwa den Integralwert 6,5.

oder: Das Rechteck, das die gesuchte Fläche umschließt, hat die Seitenlängen 3 und 4 und damit den Inhalt 12, ist aber viel größer als die Fläche zwischen Kurve und x -Achse.

b) wahr: Jede Wendestelle der Stammfunktion ist eine Extremstelle der Funktion.
Die abgebildete Funktion hat zwei Extremstellen.

c) Falsch: Die größte Änderungsrate liegt an der Wendestelle $x = 1$ vor.

Aufgabe 20

$$\text{Amplitude: } a = \frac{1}{2}(y_H - y_T) = \frac{1}{2}(6 - (-4)) = 5$$

$$\text{Periode } p = 4: p = \frac{2\pi}{b} \text{ ergibt } b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Mittellinie $y = 1$, also $c = 1$

Aufgabe 21**Aufgaben Seite 17**

a) $g'(x) = 3$ für $x \approx 2,3$

Das Schaubild von g hat für $x \approx 2,3$ die Steigung 3.

Die Aussage ist wahr.

b) $g'(-3) = 0$ mit Vorzeichenwechsel (VZW); $g'(1) = 0$ ohne VZW

Deshalb hat g nur eine Extremstelle bei $x = -3$; die Aussage ist falsch.

c) Aussage nicht entscheidbar, da der konstante Summand des Funktionsterms von g nicht bekannt ist.

Bemerkung: Eine Stammfunktion ist festgelegt bis auf den konstanten

Summanden: $\int g'(x)dx = g(x) + c$

d) Die Aussage ist wahr, denn die Steigung der Wendetangente von K_g ist negativ und der Wert dieser Steigung ist der y -Wert des Tiefpunktes des Schaubildes der 2. Ableitung von g (g'').

Aufgabe 22

Das dargestellte Schaubild hat 4 Extrempunkte, kann also nicht das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 4. Grades sein.

Aus der Zeichnung liest man ab: vier Nullstellen: $-1, 1, 2, 3$ und $S_y(0 | 3)$

Polynomfunktion 4. Grades:

Ansatz: $g(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$

Mit den Nullstellen $-1, 1, 2, 3$

erhält man: $g(x) = a(x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

$g(0) = 3$ liefert a : $a(1) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) = 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

Gesuchter Funktionsterm: $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

Aufgabe 23

zu (1) Das Schaubild von g hat im Punkt $P(-1 | 1)$ eine waagerechte Tangente.

zu (2) Bei $x = 0$ ist die Steigung positiv.

zu (3) Bei $x = -2$ ist das Schaubild von g linksgekrümmt.

zu (4) Die vom Schaubild und der x -Achse für $0 \leq x \leq 6$ begrenzten Flächenstücke, die oberhalb der x -Achse liegen, sind genauso groß wie diejenigen, die unterhalb der x -Achse liegen.

Aufgabe 24

Ansatz: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)^2$

Nullstellen: -1 und 2 (doppelt) einsetzen: $f(x) = a(x + 1)(x - 2)^2$

$S_y(0 | -1)$ ergibt $f(0) = -1$: $-1 = a(0 + 1)(0 - 2)^2$ für $a = -\frac{1}{4}$

Funktionsterm: $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 1)(x - 2)^2$

2 Musteraufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel 30 Punkte

Aufgabe 1

Lösungen Seite 33

1.1 Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$. 4

1.2 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = e^{4x}$ und $g(x) = 3e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass sich die Schaubilder der Funktionen f und g genau einmal schneiden. 3

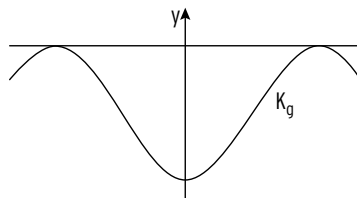
1.3 Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion hat die benachbarten Hochpunkte $H_1(\frac{\pi}{2} | 3)$ und $H_2(\frac{3\pi}{2} | 3)$ sowie eine Amplitude von 2.

Geben Sie die Koordinaten des dazwischen liegenden Tiefpunktes und eines Wendepunktes an. 4

1.4 Bestimmen Sie die Stammfunktion von g mit $g(x) = 2e^{-4x} + 4x - 3$; $x \in \mathbb{R}$, deren Schaubild die y -Achse bei 6 schneidet. 4

1.5 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin(2x)dx$. 4

1.6 In der nebenstehenden Abbildung schließen das zur y -Achse symmetrische Schaubild K_g der Funktion g und die x -Achse eine Fläche ein. In diese wird ein achsenparalleles Rechteck einbeschrieben.



Geben Sie eine Zielfunktion an, mit deren Hilfe das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt bestimmt werden kann. 5

1.7 Das Schaubild K_g aus 1.6 ist das Schaubild der Ableitungsfunktion der Funktion h , es gilt also $h' = g$.

Treffen Sie Aussagen über die Lage und Anzahl der Wendestellen von h . 3

1.8 Bestimmen Sie die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ 3x + 2y &= -3 \end{aligned}$$

3

Musteraufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel 30 Punkte

Aufgabe 2

Lösungen Seite 35

1.1 Geben Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x$; $x \in \mathbb{R}$ an. 3

1.2 Die Funktion g erfüllt folgende Bedingungen: $g'(3) = 2$

$$g''(3) = 0$$

$$g'''(3) \neq 0$$

Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen? 3

1.3 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^{2 \cdot x} - 4 \cdot x$; $x \in \mathbb{R}$.

1.3.1 Bestimmen Sie den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagrechte Tangente hat. 4

1.3.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in $P(0 \mid h(0))$ an das Schaubild von h . 2

1.3.3 Ermitteln Sie eine Stammfunktion von h , deren Schaubild durch den Punkt $P(0 \mid 5)$ verläuft. 4

1.4 Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = \cos(x)$; $x \in \mathbb{R}$.

1.4.1 Es gilt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 1$. Bestimmen Sie, ohne Verwendung einer Stammfunktion, zwei verschiedene Werte für a , sodass gilt: $\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 2$.
Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise. 3

1.4.2 Beschreiben Sie, wie das Schaubild von q mit $q(x) = -\cos(x + 2)$; $x \in \mathbb{R}$ aus dem Schaubild von p hervorgeht. 3

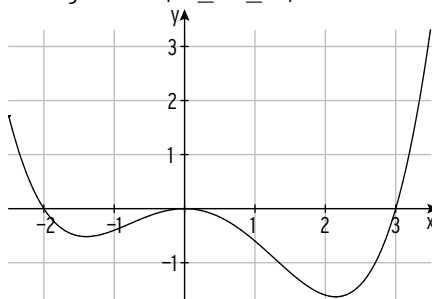
1.5 C ist das Schaubild einer Funktion g . Die Abbildung zeigt das Schaubild C' der Ableitungsfunktion g' von g für $-2,5 \leq x \leq 3,5$. Begründen Sie, wieso die folgenden Aussagen falsch sind.

A1) C hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.

A2) C hat genau zwei Wendepunkte.

A3) C ist bei $x = 1$ linksgekrümmt.

A4) C hat an höchstens 2 Punkten eine waagrechte Tangente.



8

30