Bohner
Ott
Deusch

Mathematik im Berufskolleg
Gesamtband

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik an der KSW Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Umschlag: © Adrian Schulz Foto: Mall of Berlin
Bild Kreis links: © Christian Schwier – fotolia.com
Bild Kreis rechts: © Kirill Kedrinski – fotolia.com

* * * * * * * * * *

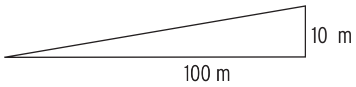
3. Auflage 2016

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-**0519-7**

2.1.2 Die Steigung einer Geraden

Das Verkehrsschild „10 % Steigung" bedeutet:
Die Straße steigt auf 100 m horizontaler Strecke 10 m an.



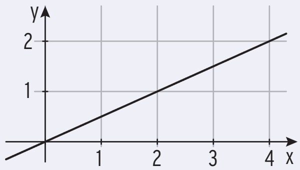
Man sagt, die Straße hat eine **Steigung** von $m = \frac{10}{100} = 0{,}1 = 10\,\%$.
m ist das **Längenverhältnis von vertikaler Strecke zu horizontaler Strecke.**

Beispiel

➲ Die Abbildung stellt den Verlauf einer Straße K im Koordinatensystem dar.

a) Welche Steigung hat die Straße?
Was würde auf dem Verkehrsschild stehen?

b) Bestimmen Sie die Geradengleichung.

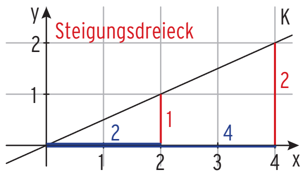


Lösung

a) Aus dem Schaubild lässt sich ablesen:
Das **Verhältnis** von y-Koordinate zur x-Koordinate eines Geradenpunktes ist **konstant.**
Dieses Verhältnis heißt **Steigung der Geraden m.**

$$m = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \text{konstant}$$

Auf dem Verkehrsschild steht 50 % Steigung, da $\frac{1}{2} = 50\,\%$.



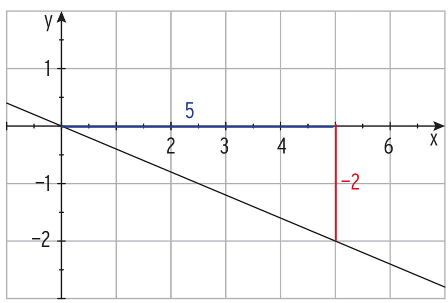
b) Aus $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$ folgt $y = \frac{1}{2}x$, die Gerade hat die Gleichung $y = \frac{1}{2}x$.
Das Schaubild K der linearen Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x;\ x \in \mathbb{R}$, verläuft durch den **Ursprung O.** K ist eine **Ursprungsgerade.**

Beispiel

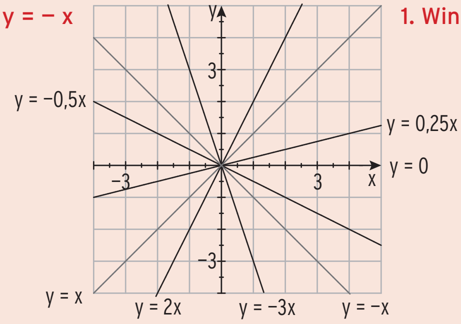
➲ Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -0{,}4\,x$ mithilfe der Steigung.

Lösung

Steigung $m = -0{,}4 = -\frac{2}{5}$ bedeutet:
Man geht vom Ursprung 5 Einheiten nach **rechts** und anschließend 2 Einheiten nach **unten.**



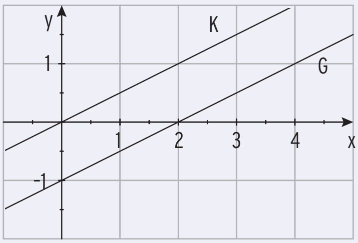
Ursprungsgerade und Steigung



Für $m > 0$ ist eine Gerade steigend, für $m < 0$ ist eine Gerade fallend.
Für $m = 0$ liegt die Gerade auf der x-Achse.

Beispiel

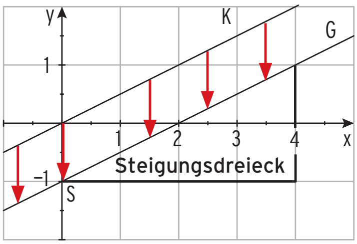
➲ K ist das Schaubild der linearen Funktion f.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden G.



Lösung

Durch Ablesen: $f(x) = 0{,}5\,x$
Die Ursprungsgerade K wird um 1 nach unten verschoben.
Die **Steigung** bleibt erhalten.
Die **Geradengleichung** lautet also $y = 0{,}5\,x - 1$.

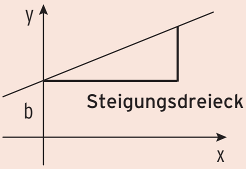
Hinweis: G schneidet die y-Achse in $S(0\,|\,-1)$.
$b = -1$ heißt y-Achsenabschnitt.



Beachten Sie:

Die allgemeine **Geradengleichung in Hauptform** lautet:

$$y = \underbrace{m \cdot x}_{\text{Steigung}} + \underbrace{b}_{\text{y-Achsenabschnitt}}$$



Aufgaben

1 Zeichnen Sie eine Gerade durch den Punkt A mit der Steigung m.

a) $A(0|0)$, $m = 3$ **b)** $A(0|2)$, $m = 1{,}5$ **c)** $A(1|-2)$, $m = -1$ **d)** $A(-2|0)$, $m = -0{,}5$

2 Zeichnen Sie die Geraden g und h in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

a) $g: y = -\frac{3}{2}x - 2$; $h: y = 2x + 2$ **b)** $g: y = \frac{3}{5}x - 3$; $h: y = -\frac{7}{6}x + 2$

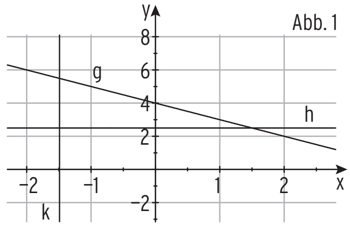
3 Zeichnen Sie die Geraden $g: y = 95x$ und $h: y = 20x + 400$ für $0 \le x \le 10$.
Wählen Sie auf der y-Achse die Einteilung $1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 100$.

4 K ist das Schaubild der linearen Funktion f mit $f(x) = \frac{5}{4}x - 4$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeichnen Sie K. Verschieben Sie K um 3 nach oben. Geben Sie den Funktionsterm an.

b) Spiegeln Sie K an der y-Achse. Geben Sie die Geradengleichung an.

5 Abbildung 1 zeigt drei Geraden.
Bestimmen Sie jeweils die zugehörige Geradengleichung.



Steigungswinkel einer Geraden

Beispiel

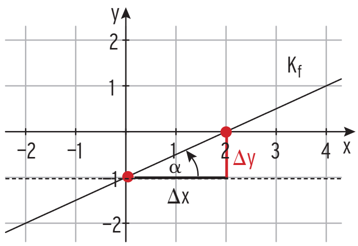
K_f ist das Schaubild der linearen Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$; $x \in \mathbb{R}$.
Unter welchem Winkel schneidet K_f die x-Achse?

Lösung

Aus $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha)$ folgt für den **Steigungswinkel α**

$\tan(\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26{,}57°$

Hinweis: $\alpha = 45°$ entspricht der Steigung $m = 1$.



Beachten Sie:

Unter dem **Steigungswinkel α** einer Geraden g versteht man den Winkel zwischen 0° und 180°, den sie mit der x-Achse bildet. $\alpha = \measuredangle(\text{x-Achse}; g)$

Aufgaben

1 Gegeben ist die Gerade g durch ihre Gleichung. Geben Sie den Steigungswinkel der Geraden g an.

a) $g: y = 3x + 1$ **b)** $g: y = x - 5$ **c)** $g: y = -2x + 4$

Steigung aus zwei gegebenen Punkten

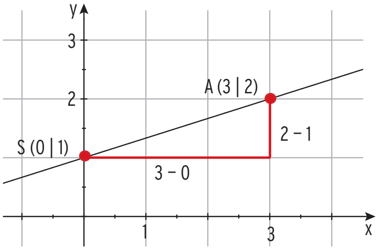
Beispiel

Eine Gerade g verläuft durch die Punkte S (0 | 1) und A (3 | 2).
Zeichnen Sie die Gerade g.
Bestimmen Sie die Steigung von g aus den Koordinaten der zwei Geradenpunkte.

Lösung

Wir lesen die Steigung m aus dem **Steigungsdreieck** ab:

$$m = \frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3}$$



Verallgemeinerung
Berechnung der Steigung m:
Differenz der y-Werte:

$$2 - 1 = y_2 - y_1$$

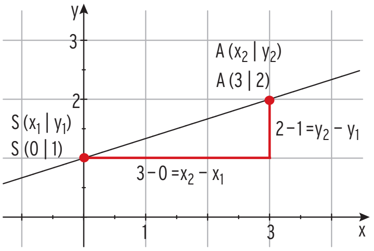
Differenz der x-Werte:

$$3 - 0 = x_2 - x_1$$

Steigung m:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3}$$

Steigung der Geraden: $m = \frac{1}{3}$

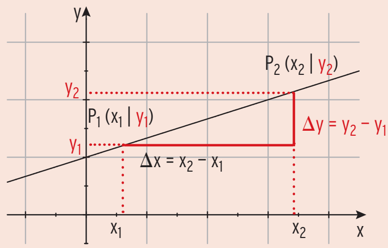


Beachten Sie:

Für die **Steigung m einer Geraden** gilt:

$$m = \frac{\text{Differenz der y-Werte}}{\text{Differenz der x-Werte}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Dabei sind x_1 und y_1 bzw. x_2 und y_2 die Koordinaten von 2 Geradenpunkten, die frei gewählt werden dürfen.



Aufgaben

1 Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B. Berechnen Sie die Steigung von g.

a) A (1 | 3), B (5 | 6) **b)** A (−1 | −4), B (2 | −7) **c)** A (0 | 5), B $\left(8 \middle| \frac{7}{3}\right)$

2 Für eine lineare Funktion f gilt: f (1) = 2 und f (−2) = 5.
Bestimmen Sie die Steigung der zugehörigen Geraden.

Lösung durch Ausklammern und Anwendung des Satzes vom Nullprodukt

Beispiele

1) $x^3 - x^2 = 0$

Seite 357

Lösung

Ausklammern von x^2:	$x^2 \cdot x - x^2 = x^2(x-1) = 0$
Satz vom Nullprodukt:	$x^2 = 0 \;\vee\; x - 1 = 0$
Lösungen:	$x_{1\|2} = 0;\; x_3 = 1$

2) $x^4 - 9x^3 + 20x^2 = 0$

Lösung

Ausklammern von x^2:	$x^2(x^2 - 9x + 20) = 0$
Satz vom Nullprodukt:	$x^2 = 0 \;\vee\; x^2 - 9x + 20 = 0$
Lösung von $x^2 - 9x + 20 = 0$ ergibt:	$x_3 = 5;\; x_4 = 4$
Lösungen:	$x_{1\|2} = 0;\; x_3 = 5;\; x_4 = 4$

Hinweis: $x_{1|2} = 0$ ist **doppelte Lösung**; $x_3 = 5$ und $x_4 = 4$ sind zwei einfache Lösungen.

3) $-\frac{1}{9}x(x+3)^2 = 0$

Lösung

Satz vom Nullprodukt anwenden:	$-\frac{1}{9}x = 0 \;\vee\; (x+3)^2 = 0$
Lösungen:	$x_1 = 0;\; x_{2\|3} = -3$

4) $x^4 - 2x = 0$

Lösung

Ausklammern von x:	$x(x^3 - 2) = 0$
Satz vom Nullprodukt:	$x = 0 \;\vee\; x^3 - 2 = 0$
3. Wurzel ziehen:	$x^3 - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[3]{2}$
Exakte Lösungen:	$x_1 = 0;\; x_2 = \sqrt[3]{2}$

Beachten Sie: Gleichungen der Form $\mathbf{ax^3 + bx^2 + cx = 0}$; $a \neq 0$
$\mathbf{ax^4 + bx^3 + cx^2 = 0}$; $a \neq 0$
löst man durch **Ausklammern** der höchsten gemeinsamen Potenz von x und **Anwendung des Satzes vom Nullprodukt**.

Aufgaben

1 Lösen Sie die Gleichung.

a) $x^3 - 6x^2 = 0$ b) $2x^4 - 7x^3 = 0$ c) $10x^2 - x^4 = 0$

2 Lösen Sie.

a) $-0{,}25x^3 + 3x = 0$ b) $2x^3 - \frac{3}{4}x^2 = 0$ c) $x^3 - x^2 = x$

d) $-3x^4 + \frac{1}{2}x^3 = 0$ e) $2x^4 - 5x^2 = 0$ f) $2{,}5x^2 - 4x^3 + x^4 = 0$

g) $-3x^2(x^2 - 8) = 0$ h) $x^3(x-4) = 0$ i) $(x^2 - 5)(x^2 - 3) = 0$

3 Eva behauptet: Die Lösung der Gleichung $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ führt auf $(x-2)(x-1)^2 = 0$. Hat Eva Recht? Bestimmen Sie ggf. die Lösungen.

Lösung durch Substitution

Beispiele

1) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

Lösung

Substitution $x^2 = z$ $(x^4 = z^2)$ — $z^2 - 9z + 20 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung in z: $z_1 = 4;\ z_2 = 5$

Rücksubstitution: $z_1 = x^2 = 4 \Rightarrow x_{1|2} = \pm 2$

$z_2 = x^2 = 5 \Rightarrow x_{3|4} = \pm\sqrt{5}$

Lösungen: $x_{1|2} = \pm 2;\ x_{3|4} = \pm\sqrt{5}$

2) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

Lösung

Substitution $x^2 = z$ $(x^4 = z^2)$ — $z^2 - 2z - 3 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung in z: $z_1 = 3;\ z_2 = -1$

Rücksubstitution: $z_1 = x^2 = 3 \Rightarrow x_{1|2} = \pm\sqrt{3}$

$z_2 = x^2 = -1$

Diese Gleichung $x^2 = -1$ hat keine Lösung wegen $x^2 \geq 0$.

Lösungen: $x_{1|2} = \pm\sqrt{3}$

Beachten Sie:

Gleichungen der Form $\mathbf{a x^4 + b x^2 + c = 0}$; $a, b, c \neq 0$
löst man durch **Substitution**.
Die **Substitution** $x^2 = z$ ergibt eine **quadratische Gleichung** in z.
Die Rücksubstitution liefert die gesuchten Lösungen in x.

Aufgaben

1 Lösen Sie die Gleichung.

a) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ b) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ c) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

2 Lösen Sie.

a) $\frac{1}{5}x^4 - \frac{16}{5}x^2 = -3$ b) $-\frac{1}{3}x^4 + 2x^2 = 3$ c) $\frac{1}{7}x^4 - 2x^2 + 8 = 0$

d) $\frac{1}{48}x^4 = \frac{7}{24}x^2 - 1$ e) $\frac{1}{9}(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$ f) $\frac{1}{9}(x^2 - 4)(x^2 + 1) = -\frac{2}{3}$

g) $x^4 = 12x^2 - 20$ h) $x^4 - 3x^2 = 18$ i) $\frac{1}{9}(x^2 - 3)^2 = 0$

3 Geben Sie eine Gleichung mit den drei Lösungen $x_{1|2} = \pm 1$ und $x_3 = 4$ an.

4 Zeigen Sie: Die Gleichung $-x^4 + x^2 = 1$ hat keine Lösung.

5 Für welchen Wert von $a \geq 0$ hat die Gleichung $-\frac{1}{16}(x^4 - 6x^2 + a) = 0$ die Lösung $x = 2$?
Berechnen Sie für diesen Fall die weiteren Lösungen.

6 Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen von $x^4 + tx^3 - x^2 = 0$ in Abhängigkeit von t.

Lösung von Polynomgleichungen

<table>
<tr><th>Gleichungstyp</th><th colspan="6">Lösungsverfahren mit Beispielen</th></tr>
<tr><td>lineare Gleichung
$(a \neq 0)$</td><td colspan="6">$ax + b = 0$
• auflösen nach x
$\frac{1}{2}x - 4 = 0$
$x = 8$</td></tr>
<tr><td>quadratische Gleichung
$(a \neq 0)$</td><td colspan="2">$ax^2 + c = 0$
• auflösen nach x
• 2. Wurzel ziehen
$\frac{1}{2}x^2 = 4$
$x^2 = 8$
$x_{1\mid 2} = \pm\sqrt{8}$</td><td colspan="2">$ax^2 + bx = 0$
• x ausklammern
• Satz vom Nullprodukt
$x^2 - 8x = 0$
$x(x - 8) = 0$
$x_1 = 0;\ x_2 = 8$</td><td colspan="2">$ax^2 + bx + c = 0$
• abc-Formel
$x_{1\mid 2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x^2 - 8x + 2 = 0$
$x_{1\mid 2} = \frac{8 \pm \sqrt{56}}{2}$</td></tr>
<tr><td>Gleichung 3. Grades
$(a \neq 0)$</td><td colspan="3">$ax^3 + d = 0$
• Auflösen nach x
• 3. Wurzel ziehen
$\frac{1}{2}x^3 - 4 = 0 \quad \mid \cdot 2$
$x^3 - 8 = 0$
$x^3 = 8$
$x = \sqrt[3]{8}$</td><td colspan="3">$ax^3 + bx^2 + cx = 0$
• Höchste gemeinsame Potenz von x ausklammern
• Satz vom Nullprodukt
$2x^3 - 8x^2 = 0$
$2x^2(x - 4) = 0$
$2x^2 = 0 \ \vee \ x - 4 = 0$
$x_{1\mid 2} = 0;\ x_3 = 4$</td></tr>
<tr><td>Gleichung 4. Grades
$(a \neq 0)$</td><td colspan="2">$ax^4 + d = 0$
• Auflösen nach x
• 4. Wurzel ziehen
$\frac{1}{2}x^4 - 4 = 0$
$\frac{1}{2}x^4 = 4$
$x^4 = 8$
$x_{1\mid 2} = \pm\sqrt[4]{8}$</td><td colspan="2">$ax^4 + bx^3 + cx^2 = 0$
• Höchste gemeinsame Potenz von x ausklammern
• Satz vom Nullprodukt
$x^4 - 8x^3 + 2x^2 = 0$
$x^2(x^2 - 8x + 2) = 0$
$x^2 = 0$
$\vee \ x^2 - 8x + 2 = 0$
$x_{1\mid 2} = 0;$
$x_{3\mid 4} = \frac{8 \pm \sqrt{56}}{2}$</td><td colspan="2">$ax^4 + cx^2 + e = 0$
• Substitution:
$x^2 = z$ $(x^4 = z^2)$
$x^4 - 8x^2 + 7 = 0$
$z^2 - 8z + 7 = 0$
$z_1 = 7;\ z_2 = 1$
$x_{1\mid 2} = \pm\sqrt{7};\ x_{3\mid 4} = \pm 1$</td></tr>
</table>

Aufgaben

1 Lösen Sie.

a) $x^3 - 2x = 0$ b) $x^4 - 9x^2 = 0$ c) $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$

2 Bestimmen Sie alle Lösungen.

a) $x^3 - 2x^2 + x = 0$ b) $2x^4 - \frac{3}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2$ c) $\frac{1}{6}(x - 4)(x + 3)^2 = 0$

3 Lösen Sie die Gleichungen.

a) $2x + 5x^3 = 4x^3$ b) $-\frac{1}{5}(x^3 - 10x^2) = \frac{9}{5}x$ c) $\frac{1}{8}(x^3 - 10x) = 0$

d) $\frac{1}{4}x^3 = 2x^2 - 4x$ e) $\frac{2}{9}x(x - 2)(x + 4) = 0$ f) $-\frac{x^2}{8}(3 - 4x) = 0$

g) $x - 0{,}5x^4 = 0$ h) $-\frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 = 0$ i) $\frac{1}{12}(x^4 - 2x^3 - 48x^2) = 0$

j) $\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{2} + \frac{9x^2}{8} = 0$ k) $0{,}4x^4 - x^2 = 0{,}8x^3$ l) $\frac{1}{2}x^4 = x^2$

4 Für welchen Wert von a hat die Gleichung $x^3 - 3x^2 - ax = 0$ die Lösung $x = -1$?

5 Geben Sie eine mögliche Gleichung an.

a) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -3$ sind die Lösungen einer Gleichung dritten Grades.

b) $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ sind die einzigen Lösungen einer Gleichung dritten Grades.

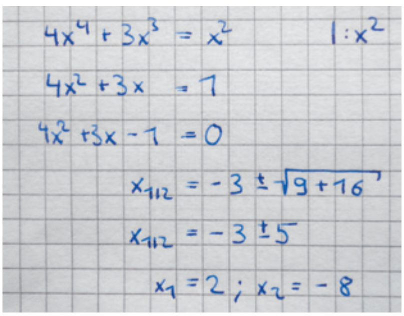
6 Geben Sie für die Gleichung $x^2(x + 6) = 0$ drei verschiedene äquivalente Gleichungen an.

7 Schreiben Sie die Gleichung $x^3 - 4x^2 = -4x$ in der Form $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ mit geeigneten Zahlen x_1, x_2, x_3.

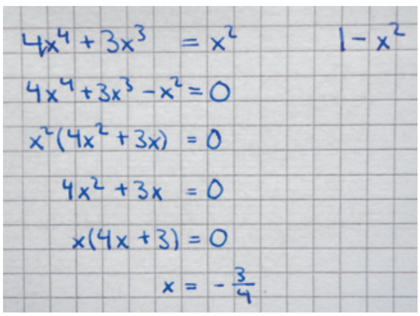
8 Eine Gleichung 4. Grades hat die Lösungen 0 und ±4.
Bestimmen Sie zwei mögliche Gleichungen.

9 Max und Anja führen folgende Umformungen durch.
Finden Sie die Fehler und lösen Sie die Gleichung.

Max

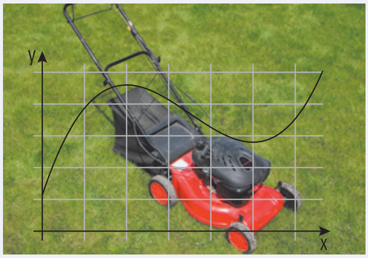


Anja



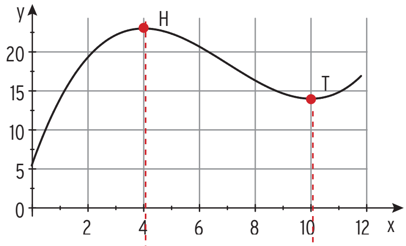
2.2 Extrempunkte

Beispiel



Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 10x + \frac{17}{3}$ beschreibt näherungsweise die wöchentlichen Verkaufszahlen von Rasenmähern. Dabei ist x die Zeit in Wochen nach Wiedereröffnung der Geschäftsräume. Untersuchen Sie die Entwicklung der Verkaufszahlen.

Lösung



Das Schaubild von f wird gezeichnet. Die Verkaufszahlen nehmen zu bis zur Woche 4 mit 23 Stück, danach nehmen sie ab bis zur Woche 10 mit 14 verkauften Rasenmähern, um danach wieder zuzunehmen.

Erläuterungen

Man liest ab:

f ist monoton	**wachsend**	**fallend**	**wachsend**
für	$x < 4$	$4 < x < 10$	$x > 10$
	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

$f'(4) = 0$ H　　$f'(10) = 0$ T

Im Übergang
von **wachsend zu fallend** liegt ein **Hochpunkt,**
von **fallend zu wachsend** liegt ein **Tiefpunkt.**

Beachten Sie:

Ein Kurvenpunkt $P(x_1 | f(x_1))$ heißt $\left\{\begin{matrix}\textbf{Hochpunkt}\\ \textbf{Tiefpunkt}\end{matrix}\right\}$, wenn $f(x_1)$ der $\left\{\begin{matrix}\textbf{größte}\\ \textbf{kleinste}\end{matrix}\right\}$ **Funktionswert** für alle x aus einer Umgebung von x_1 ist.

Dieser $\left\{\begin{matrix}\textbf{größte}\\ \textbf{kleinste}\end{matrix}\right\}$ Funktionswert $f(x_1)$ heißt **relatives (lokales)** $\left\{\begin{matrix}\textbf{Maximum}\\ \textbf{Minimum}\end{matrix}\right\}$.

Notwendige Bedingung für (lokale) Extremstellen: $f'(x_1) = 0$.
Dabei liegt x_1 im Innern des Definitionsbereichs.

Hochpunkte bzw. Tiefpunkte nennt man **Extrempunkte** des Schaubildes K von f.
Der x-Wert des Extrempunktes heißt Extremstelle.

Nachweis für Extrempunkte (1. Möglichkeit):
Nachweis mit **Vorzeichenwechsel** (VZW von $f'(x)$):

VZW von f′(x) an der Stelle	**x** = 4	**x** = **10**
	von	von
	+ nach **−**	**−** nach **+**
	führt auf einen	
	Hochpunkt	**Tiefpunkt**
	mit $f(4) = 23$ und	$f(10) = 14$
	H(4 | 23)	**T(10 | 14)**

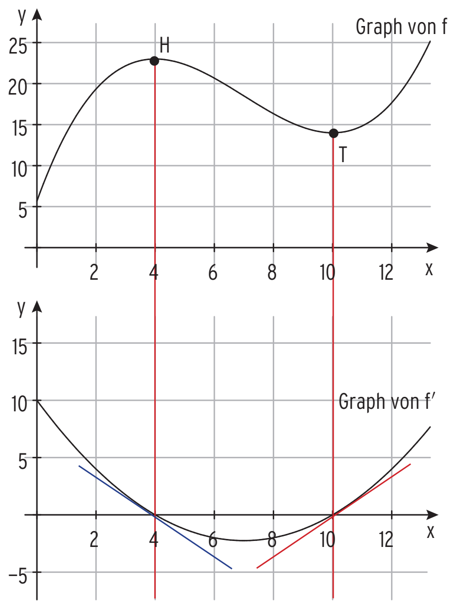
Hinweis: $f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 10$
$f'(3) = 1{,}75 > 0$; $f'(4) = 0$; $f'(5) = -1{,}25 < 0$

Nachweis mithilfe der zweiten Ableitung von f (2. Möglichkeit):

Schaubild von f

Schaubild von f′

$f''(x)$ ist die **Steigung** des Schaubildes von f′ an der Stelle x.



Die **Steigung** des Graphen von f′ an der Stelle	$x = 4$	$x = 10$
	ist **negativ**	ist **positiv**.
Das bedeutet:	$f''(4) < 0$	$f''(10) > 0$
Das Schaubild von f hat dort einen	**Hochpunkt**	**Tiefpunkt**

Hinweis: $x = 4$ ist **Maximalstelle**, $x = 10$ ist **Minimalstelle.**

Berechnung von $f''(4)$ und $f''(10)$

Zweite Ableitung von f: $f''(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

Einsetzen der x-Werte in $f''(x)$: $f''(4) = -\frac{3}{2} < 0$ $f''(10) = \frac{3}{2} > 0$

Bestimmung von Extrempunkten

- **Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$** liefert die Stellen $x_1, x_2, \ldots$ mit waagrechter Tangente.

- **Nachweis für Hochpunkt bzw. Tiefpunkt**

  1. Möglichkeit durch **Vorzeichen-Untersuchung** von $f'(x)$

  Hat $f'(x)$ an der Stelle x_1 einen Vorzeichenwechsel

  $\begin{Bmatrix}\text{von + nach −}\\ \text{von − nach +}\end{Bmatrix}$, so hat der Graph von f einen $\begin{Bmatrix}\textbf{Hochpunkt } H(x_1 \mid f(x_1))\\ \textbf{Tiefpunkt } T(x_1 \mid f(x_1))\end{Bmatrix}$.

  2. Möglichkeit durch **Einsetzen von x_1** in $f''(x)$

  Ist $\begin{Bmatrix}f''(x_1) < 0\\ f''(x_1) > 0\end{Bmatrix}$, so hat der Graph von f einen $\begin{Bmatrix}\textbf{Hochpunkt } H(x_1 \mid f(x_1))\\ \textbf{Tiefpunkt } T(x_1 \mid f(x_1))\end{Bmatrix}$.

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x;\ x \in \mathbb{R}$ mit Graph K.
Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte.

Lösung

Ableitungen: $f'(x) = -x^2 + 4x - 3;\ f''(x) = -2x + 4$

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f'(x) = 0$ $\quad -x^2 + 4x - 3 = 0$

Stellen mit waagrechter Tangente: $\quad x_1 = 1;\ x_2 = 3$

Nachweis durch Einsetzen der x-Werte in **$f''(x)$**

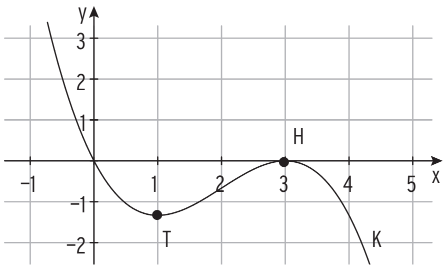
$f''(1) = 2 > 0$: f hat in $x = 1$ ein (relatives) Minimum, K hat einen Tiefpunkt an der Stelle $x_1 = 1$.

$f''(3) = -2 < 0$: f hat in $x = 3$ ein (relatives) Maximum, K hat einen Hochpunkt an der Stelle $x_2 = 3$.

Mit $f(1) = -\frac{4}{3}$ und $f(3) = 0$ erhält man:

Tiefpunkt $T\left(1 \middle| -\frac{4}{3}\right)$; Hochpunkt $H(3|0)$

Schaubild K:



Beispiel

Berechnen Sie die Extremstellen von f mit $f(x) = 0{,}5x + \cos(x)$ für $x \in]0; \pi[$.
Welche ist die Minimalstelle?

Lösung

Ableitungen: $f'(x) = 0{,}5 - \sin(x);\ f''(x) = -\cos(x)$

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f'(x) = 0$ $\quad 0{,}5 - \sin(x) = 0$

$\sin(x) = 0{,}5$

Lösung z. B. mithilfe der Tabelle: $\quad x_1 = \frac{\pi}{6};\ x_2 = \frac{5}{6}\pi$

Nachweis durch Einsetzen der x-Werte in **$f''(x)$**

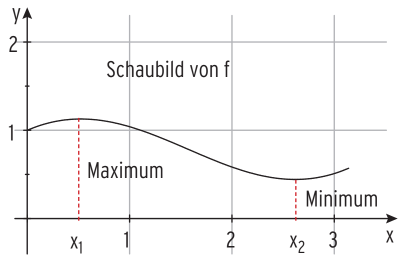
$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0{,}866 < 0$

f hat in $x_1 = \frac{\pi}{6}$ ein (relatives) Maximum.

$f''\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 0{,}866 > 0$

f hat in $x_2 = \frac{5}{6}\pi$ ein (relatives) Minimum.

$x_2 = \frac{5}{6}\pi$ ist die Minimalstelle.



Hinweis: $f(x_2)$ ist der absolut kleinste y-Wert,
$f(x_2)$ ist das **absolute Minimum auf $]0; \pi[$.**
Das relative Maximum ist auch das **absolute Maximum auf $]0; \pi[$.**

Beispiel

K ist der Graph von f mit $f(x) = e^x$, G ist der Graph von g mit $g(x) = e^x - 2x + 1$; $x \in \mathbb{R}$. K und G schließen für $-1 \leq x \leq 1$ eine Fläche ein. Berechnen Sie deren Inhalt.

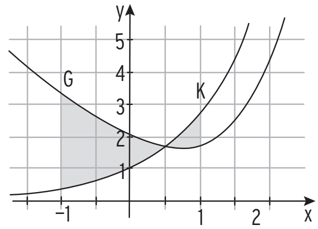
Lösung

Schnittstellen von K und G: $f(x) = g(x)$ für $2x - 1 = 0$

Schnittstelle mit VZW: $x = 0{,}5$

- $\int\limits_{-1}^{0,5} (f(x) - g(x))\,dx = \int\limits_{-1}^{0,5} (2x - 1)\,dx = [x^2 - x]_{-1}^{0,5} = -2{,}25$
- $\int\limits_{0,5}^{1} (f(x) - g(x))\,dx = \int\limits_{0,5}^{1} (2x - 1)\,dx = 0{,}25$

Inhalt der Fläche: $A = 2{,}25 + 0{,}25 = 2{,}5$



Beispiel

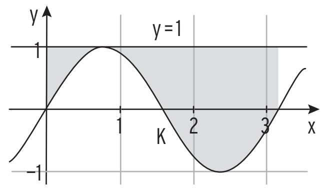
Der Graph K von f mit $f(x) = \sin(2x)$; $x \in \mathbb{R}$, begrenzt mit der Parallelen zur x-Achse durch $S(0\,|\,1)$ auf $[0; \pi]$ eine Fläche mit Inhalt A. Wie groß ist diese Fläche?

Lösung

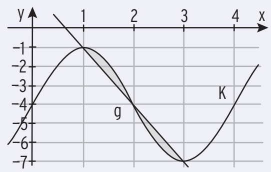
Die Gerade mit $y = 1$ verläuft durch die Hochpunkte von K, sie berührt K auf dem Intervall $[0; \pi]$ nur in $x = \frac{\pi}{4}$.

Integration von 0 bis π:

$\int\limits_0^{\pi} (1 - \sin(2x))\,dx = \left[x + \frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi} = \pi$ $\qquad A = \pi$



Beispiel



K ist der Graph von f mit $f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 4$; $x \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt zwei Flächenstücke. Berechnen Sie den Flächeninhalt eines der beiden Flächenstücke.

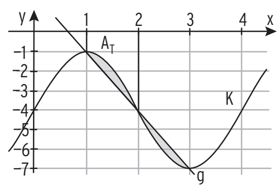
Lösung

Schnittstellen durch Ablesen: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$

Wegen der Symmetrie von K und g zu $W(2\,|\,-4)$ sind die Flächen gleich groß.

Fläche zwischen K und x-Achse:

$\int\limits_1^2 \left(3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 4\right)dx = \left[\frac{-6}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 4x\right]_1^2 = \frac{6}{\pi} - 4 < 0$



Flächeninhalt: $A_x = 4 - \frac{6}{\pi}$

Trapezinhalt: $A_T = \frac{1+4}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}$ oder $A_\triangle + A_\square = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

Gesuchte Fläche: $A = \frac{5}{2} - \left(4 - \frac{6}{\pi}\right) = \frac{6}{\pi} - \frac{3}{2}$

Alternative mit $\int (f(x) - g(x))\,dx$

- Geradengleichung von g aufstellen ($y = -3x + 2$)
- $A = \int\limits_1^2 (f(x) - g(x))\,dx = \frac{6}{\pi} - \frac{3}{2}$

Beachten Sie:

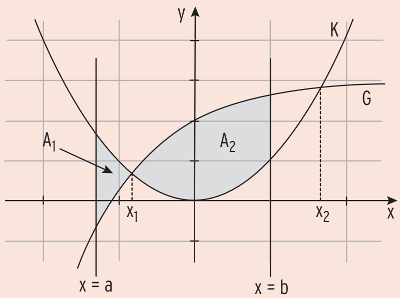
Inhalt der Fläche, die von den Kurven K von f und G von g auf dem Intervall [a; b] umschlossen wird.

a) **Berechnung der Schnittstellen**

Bed.: $f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 0$ liefert die Schnittstellen $x_1, x_2, \dots$

b) **Integration der Differenzfunktion mit** $f(x) - g(x)$

- $\int_a^{x_1} (f(x) - g(x))\,dx$
- $\int_{x_1}^{b} (f(x) - g(x))\,dx$



c) **Addition der Beträge der Integralwerte** ergibt den Inhalt der **Gesamtfläche.**

$A_{ges} = |A_1| + |A_2|$

Hinweis: Nicht über eine **Schnittstelle mit Vorzeichenwechsel** hinweg integrieren.

Vergleichen Sie die Vorgehensweise:

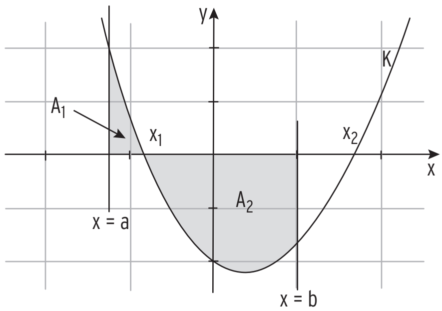
Fläche zwischen der Kurve K von f und der x-Achse auf dem Intervall [a; b]

a) **Berechnung der Nullstellen:**

Bed.: $f(x) = 0$ liefert die Nullstellen $x_1, x_2, \dots$

b) **Integration über f(x)dx**

- $\int_a^{x_1} f(x)\,dx$
- $\int_{x_1}^{b} f(x)\,dx$



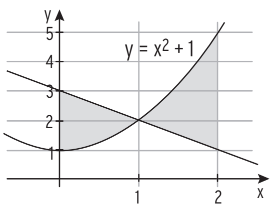
c) **Addition der Beträge der Integralwerte** ergibt den Inhalt der **Gesamtfläche.**

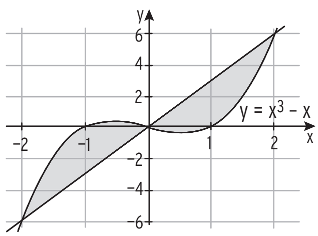
$A_{ges} = |A_1| + |A_2|$

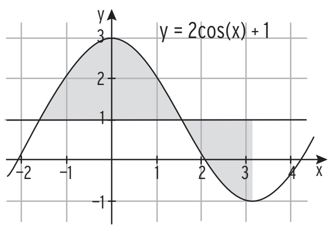
Hinweis: Nicht über eine **Nullstelle mit Vorzeichenwechsel** hinweg integrieren.

Aufgaben

1 Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.





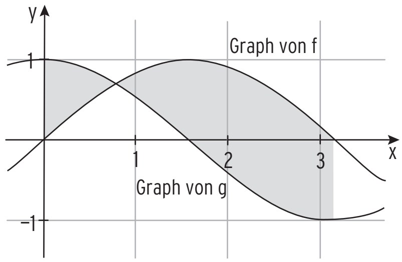


2 K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 4x;\ x \in \mathbb{R}$.

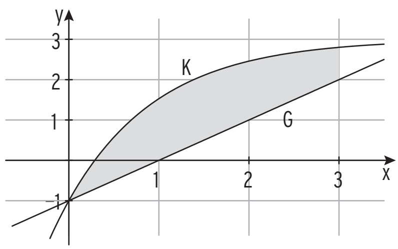
a) Geben Sie eine Stammfunktion von f an und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von K und der x-Achse im 1. Feld eingeschlossen wird.

b) K schließt mit der Parabel P von g mit $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x;\ x \in \mathbb{R}$, zwei Flächenstücke ein. Wie groß ist die Fläche, die den Punkt D(1|0) enthält?

3 Die Funktionen f und g sind durch $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ gegeben.
Jan behauptet: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Stimmt das?
Wie groß ist die markierte Fläche?



4 K und G sind die Schaubilder der Funktionen f mit $f(x) = -4e^{-x} + 3$ und g mit $g(x) = x - 1$.
Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



5 K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 2x(x-2)(x-1);\ x \in \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie K.

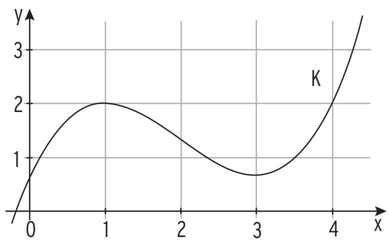
b) Die Tangente an K im Ursprung begrenzt mit K eine Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt.
Markieren Sie die Fläche in Ihrer Skizze.

6 Für $x \in \mathbb{R}$ sind zwei Funktionen f und g gegeben mit $f(x) = 2(x^3 - 4x^2 + 4x)$ und $g(x) = \frac{2}{3}x^2$. Die zugehörigen Graphen begrenzen eine Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt A dieser Fläche.

7 K und G sind die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3};\ x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = 2;\ x \in \mathbb{R}$.

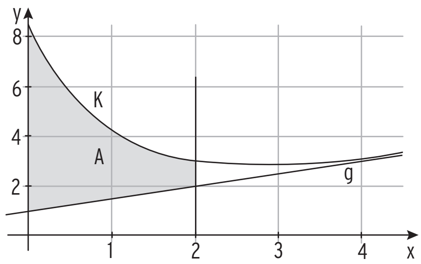
a) Zeigen Sie: G berührt K in $x = 1$ und schneidet K in $x = 4$.

b) K und G begrenzen im 1. Quadranten eine Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.



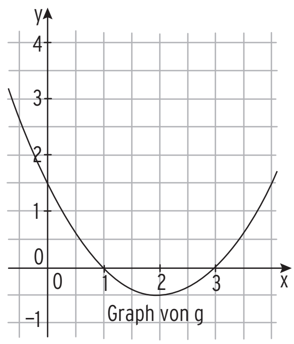
8 K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^2(3-x)$; $x \in \mathbb{R}$.
Die Gerade g schneidet die Kurve K in $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$. K, g und die x-Achse schließen im 4. Feld eine Fläche ein. Berechnen Sie deren Inhalt.

9 Gegeben ist f mit $f(x) = e^{2-x} + 0{,}5x + 1$; $x \in \mathbb{R}$ mit Graph K. Wie lässt sich der Inhalt A der markierten Fläche bestimmen?
Geben Sie A an.
Welche Bedeutung hat die Gerade g?
Gegen welchen Wert strebt der Flächeninhalt, wenn die rechte Grenze gegen ∞ strebt?

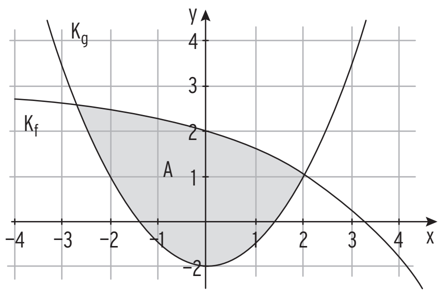


10 K ist das Schaubild von f mit $f(x) = \sin(2x)$, $x \in \mathbb{R}$.
K begrenzt mit der x-Achse eine Fläche auf dem Intervall $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ mit Inhalt A.
Die Funktion f soll nun auf $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ durch eine ganzrationale Funktion p zweiten Grades angenähert werden. K und die Parabel G von p berühren sich in den gemeinsamen Punkten von K mit der x-Achse. G begrenzt mit der x-Achse eine Fläche mit Inhalt B.
Um wie viel % weicht B von A ab?

11 Gegeben ist die Funktion f durch
$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$; $x \in \mathbb{R}$
und der Graph von g in der Abbildung.
Die Graphen von f und g begrenzen für $1 \leq x \leq 3$ einen See. Der Graph von f bildet modellhaft die nördliche und die zu g gehörende Parabel die südliche Uferbegrenzungslinie.
Die x-Achse verläuft in West-Ost-Richtung (1 LE $\triangleq$ 1 km).
Berechnen Sie die Größe der Seefläche.



12 Gegeben sind die Schaubilder K_g und K_f zweier Funktionen g und f (siehe Abbildung)



K_g und K_f begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt A.
A_1 ist der Flächenanteil von A, der im ersten Quadranten liegt.
Geben Sie ein geeignetes Vorgehen zur Bestimmung des Flächeninhaltes von A_1 an.