Bohner | Ott | Deusch | Rosner

Arbeitsheft
Mathematik im Berufskolleg
Gesamtband

Baden-Württemberg

Lern- und Erklärvideos

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

* * * * * * * * * *

2. Auflage 2023

Gesamtherstellung:
Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 2519-02
ISBN 978-3-8120-1044-3

Inhaltsverzeichnis

I	Funktionen	8
1	Einführung in die Funktionen	8
2	Polynomfunktionen	10
2.1	Lineare Funktion	10
2.2	Quadratische Funktion	21
2.3	Polynomfunktionen höheren Grades	30
3	Exponentialfunktionen	40
4	Trigonometrische Funktionen	49
II	Lineare Gleichungssysteme	56
III	Differenzialrechnung	61
1	Differenzialquotient und Ableitung	61
2	Tangente und Normale	66
3	Grafisches Differenzieren	69
4	Extrem- und Wendepunkte	71
5	Aufstellen von Funktionstermen	79
6	Modellierung – Extremwertaufgaben	83
IV	Integralrechnung	85
1	Aufleiten und Stammfunktion	85
2	Grafisches Aufleiten	88
3	Bestimmtes Integral	94
4	Flächeninhaltsberechnungen	95

Lösungen (eingelegt und damit herausnehmbar)

Einleitung

Das Arbeitsheft dient zur Aufbereitung, Wiederholung und Festigung des im Schülerbuch „Mathematik im Berufskolleg – Gesamtband" behandelten Lernstoffs. Es soll parallel zum Schülerbuch verwendet werden. Die begleitende Unterstützung durch die Lehrkraft ist gewünscht und sehr sinnvoll. Das Arbeitsheft enthält ergänzende Aufgaben zur Wiederholung und ermöglicht eine Lernkontrolle in Eigenverantwortung. Das im Vergleich zum Schülerbuch veränderte Format und die Form der Darstellung wirken motivierend auf Schüler/innen. Einige Aufgaben beinhalten fächerübergreifende Aspekte in Handlungssituationen. Das Arbeitsheft hilft, das Erlernte zu festigen und damit eine gute Grundlage für die Mathematik im Berufskolleg und die Prüfung zur Fachhochschulreife zu schaffen. Videos dienen der Veranschaulichung von Problemen und Erläuterung von Lösungswegen. Sie unterstützen die Lernenden beim Entdecken und Verstehen mathematischer Zusammenhänge. Damit ist das Arbeitsheft zum Fernlernen und Homeschooling bestens geeignet.

Basiswissen

Terme und Gleichungen

1. Vereinfachen Sie den Term.

mvurl.de/eyps

$x - 3x - 8(x + 1)$	$= x - 3x - 8x - 8 = -10x - 8$
$x + 5(x - y + 2) - 6x - 2y$	$=$
$7(x - 2) + 3(x - 5)$	$=$
$12x - 6(x - 1) + 12$	$=$
$2 \cdot 4a \cdot 3b + 5a \cdot 2b - 18ab$	$=$
$2(x^2 - x) + (x^2 - x - 3) \cdot (-5)$	$=$
$8a - 3x + 6a - (x + a) - 5(a - 2x)$	$=$

2. Multiplizieren Sie aus.

$2x(1 + 6y) + x(3 - 2y)$	$= 2x + 12xy + 3x - 2xy = 5x + 10xy$
$4(x + 2y - 3z) + 4$	$=$
$(x - 7)(x - 2)$	$=$
$\frac{1}{4}(x - 2)(x + 6)$	$=$
$4(x - 6y) - 8(x - 6y)$	$=$

3. Klammern Sie aus.

$24x + 16y - 12$	$= 4 \cdot 6x + 4 \cdot 4y - 4 \cdot 3 = 4(6x + 4y - 3)$
$4x + 8y - 12z$	$=$
$tx - 3tx + t$	$=$
$24a + 16ab - 12ac$	$=$
$4(x - 6y) - 8(x - 6y)$	$=$

4. Berechnen Sie ohne Hilfsmittel.

$1 - \frac{1}{7}$	$= \frac{7}{7} - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$	$-2 \cdot (-\frac{2}{9}) \cdot (-\frac{2}{5})$	$= \frac{4}{9} \cdot (-\frac{2}{5}) = -\frac{8}{45}$
$-\frac{2}{5} + \frac{6}{5}$	=	$\frac{1}{9} \cdot (-7)$	=
$-\frac{24}{5} - 5$	=	$-\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6}$	=
$\frac{2}{9} - 1 - \frac{5}{9}$	=	$-\frac{5+3}{4} \cdot (-4)$	=
$-\frac{(5+3)}{6} - \frac{4}{6}$	=	$\frac{9}{2} \cdot (-\frac{4}{9})$	=
$\frac{9-2}{-7}$	=	$(\frac{2}{3})^2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3}$	=
$\frac{3}{2} - \frac{4}{5} - \frac{6}{4} - \frac{4}{5}$	=	$5 - \frac{7}{3} - \frac{1+3}{6}$	=
$-\frac{5+7}{12} + \frac{5-7}{12}$	=	$-\frac{1}{a} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{a}$	=

5. Formulieren Sie einen Term für den Text.

Summe aus dem fünffachen einer Zahl und 13	
Subtrahiere von 46 das Doppelte einer Zahl	
Gesamtkosten aus: Fixkosten 20 €, Kosten pro Stück 0,75 €	

6. Wenden Sie eine binomische Formel an.

$(x+1)^2$	$= x^2 + 2x + 1$	$x^2 - 12x + 36$	$= (x - 6)^2$
$x^2 + 8x + 16$	=	$(x - 5)^2$	=
$(x - 3t)^2$	=	$(x - a)^2$	=
$4(x - 6y)(x + 6y)$	=	$(2x - 1)^2$	=
$x^2 - x + \frac{1}{4}$	=	$x^2 + 20x + 100$	=

7. Ergänzen Sie den Term.

$(x + \_\_)^2 = x^2 + \_\_ \cdot 5x$ _______	$(x+2)^2 = x^2 + 2 \cdot 5x + 25$
$\frac{5}{4}a - \frac{3}{4}b = \frac{1}{4} \cdot (\_\_\_\_\_\_\_)$	$49 - 14a + a^2 = (\_\_\_\_\_\_\_) \cdot (\_\_\_\_\_\_\_)$
$(x - 3\_\_)^2 = x^2 - 6tx$ _______	$x^2 + 7x + 10 = (x \_\_\_)(x \_\_\_)$
$(x - \_\_ y)(x + \_\_ y) = x^2 \_\_ 4y^2$	$2x^2 - \ldots x = x(\_\_\_ - 5)$

mvurl.de/qyh1

8. Lösen Sie nach x bzw t auf.

$A = \frac{1}{2}xy$	$U = 2(a + x)$	$V = \frac{G}{3} \cdot (5x)$	$v = a \cdot t + v_0$
$A = \frac{1}{2}xy \quad \vert \cdot 2$ $2A = xy \quad \vert : y$ $x = \frac{2A}{y}$			

9. Stellen Sie als eine Potenz dar.

$12 \cdot 12 \cdot 12$	$= 12^3$	$4^6 \cdot 2^6$	$= (4 \cdot 2)^6 = 8^6$
$36 \cdot 6$	=	$9^3 \cdot 9^2$	=
144	=	$2^3 + 2^3$	=
$2^2 \cdot 8$	=	$2^4 - 2^3$	=
$(5 - 7) \cdot (5 - 7)$	=	$(9 - 2) \cdot 7^3$	=

10. Berechnen Sie.

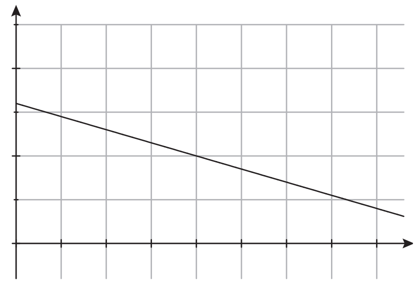
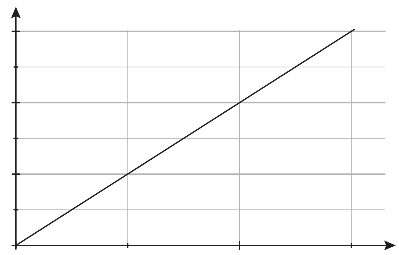
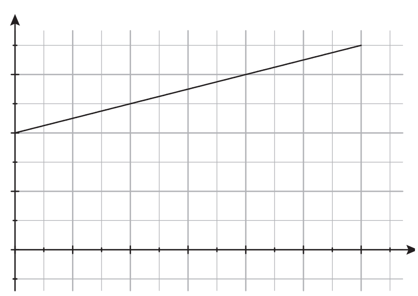
$6^2 + 3^2 - 2^3$	$= 36 + 9 - 8 = 37$	$2^4 - 1$	$= 16 - 1 = 15$
$a^2 \cdot a$	=	$3^3 \cdot 2$	=
$x^4 - 4x^4 - 5x^4$	=	$4^3 \cdot 4^2$	=
$c^3 \cdot c^3 \cdot c^4$	=	$1^5 + 1^{18}$	=
10^5	=	$-(1 - 2)^{13}$	=

11. Vereinfachen Sie, wenn möglich.

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}$	$= \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$	$(\sqrt{2{,}5})^2$	$= 2{,}5$
$3 \cdot \sqrt{6} - \sqrt{6}$	=	$(\sqrt{\frac{1}{2}})^4$	=
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$	=	$(\sqrt{5})^3$	=
$\sqrt{\frac{16}{9} + 6 \cdot \frac{8}{9}}$	=	$\sqrt{5}\,\sqrt{20}$	=
$\sqrt{-1}$	=	$\sqrt{3} + \sqrt{12}$	=

19. Welche Modellierung passt zur gegebenen Situation?

Benennen Sie die Koordinatenachsen bzw. beschreiben Sie den Funktionsterm.

A: In 3 h legt ein Fahrzeug bei konstanter Geschwindigkeit 120 km zurück	Funktionsterm: $f(x) = 1200 - 4x$
B: Die Nachfrage sinkt von 12 Stück zu Beginn auf 2 Stück nach 8 Wochen.	Abb. 1 
C: Jan springt mit dem Fallschirm aus 1200 m Höhe ab.	Abb. 2 
D: Ein halbvolles Gefäß wird durch einen tropfenden Wasserhahn gefüllt.	Abb. 3 
E: Alkohol im Körper baut sich stündlich um 0,15 Promille ab.	Abb. 4 

2.2 Quadratische Funktionen

Die Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$, ist eine quadratische Funktion (Polynomfunktion 2. Grades). Die zugehörige Parabel ist für $a > 0$ nach oben geöffnet bzw. für $a < 0$ nach unten geöffnet.

mvurl.de/55af

1. Welche Eigenschaften treffen auf das Schaubild von f mit $f(x) = x^2$; $x \in \mathbb{R}$, zu?

Das Schaubild ist achsensymmetrisch bezüglich der x-Achse.	
Das Schaubild ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.	
Das Schaubild verläuft oberhalb der x-Achse.	
Alle Funktionswerte sind größer oder gleich 0.	
Der Punkt S(0|0) ist der „höchste" Punkt.	

2. Ergänzen Sie die folgenden Sätze.

a) Das Schaubild der quadratischen Funktion f mit $f(x) = x^2 + 5$ entsteht aus der Normalparabel durch ____________in ___ -Richtung um __ Einheiten. Ihr Scheitelpunkt S liegt auf der ___-Achse und hat die Koordinaten S(__ | __).

b) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = (x + 2)^2$ ist eine um ____ nach ________ verschobene Normalparabel. Der Scheitelpunkt S liegt auf der _______________ und hat die Koordinaten S(__ | __).

c) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}^*$ ist für $a > 0$ eine _______________ Parabel und für $a >$ ___ schmäler als die Normalparabel.

3. Der Graph von f wird in der gegebenen Reihenfolge abgebildet. Wie lautet der neue Funktionsterm g(x)?

Funktionsterm	Streckung in y-Richtung	Verschiebung	Spiegelung a. d. x-Achse	g(x)
$f(x) = x^2$	Faktor 3	2 nach oben	ja	$g(x) = -3x^2 - 2$
$f(x) = -2x^2$	Faktor 0,5	4 nach links	nein	
$f(x) = x^2 - 1$	Faktor 2	1 nach unten und 1 nach rechts	ja	
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$	Faktor $\frac{1}{4}$	2 nach links	nein	
$f(x) = 4x$	Faktor $\frac{1}{8}$	3 nach unten und 5 nach links	ja	

III Differenzialrechnung

1 Differenzialquotient und Ableitung

mvurl.de/gv59

1. Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate auf [a; b].

$f(x) = (x + 1)^2$; [0; 2]	$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{9 - 1}{2} = 4$
$f(x) = 6x - 2x^3$; [1; 3]	
$f(x) = 3e^{\frac{1}{2}x}$; [− 1; 2]	
$f(x) = 2\sin(2x)$; [0; $\frac{\pi}{4}$]	
$f(x) = 9$; [− 5; 3]	
$f(x) = x^4 - x^2$; [− 2; 0]	

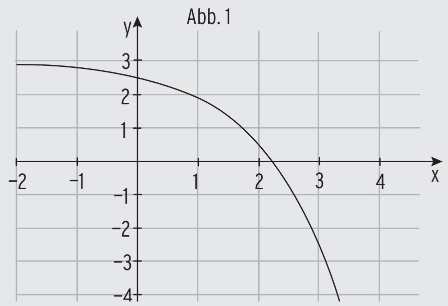
2. Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate in x_0.

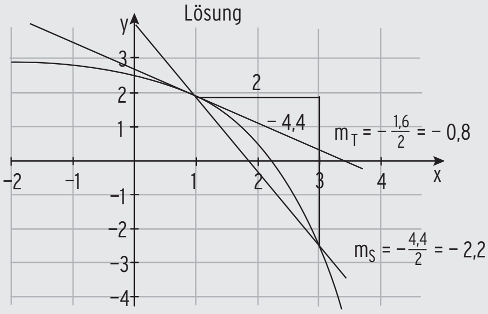
$f(x) = x^2 + 2$; $x_0 = 2$	$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{(2 + h)^2 + 2 - 6}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$ $h + 4 \rightarrow 4$ für $h \rightarrow 0$ $m_t = f'(2) = 4$
$f(x) = 6x^2 - 2$; $x_0 = 1$	
$f(x) = x^2 - x$; $x_0 = 0$	

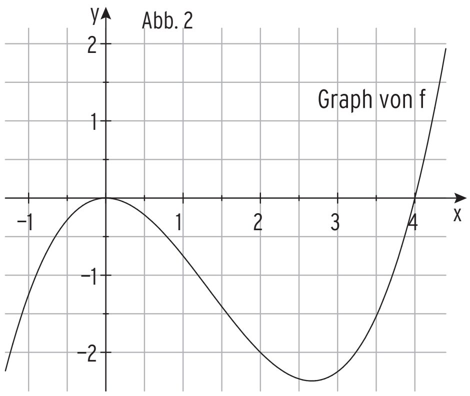
3. Für eine Funktion f gilt folgende Bedingung. Welche Aussagen lassen sich daraus für das Schaubild K von f treffen?

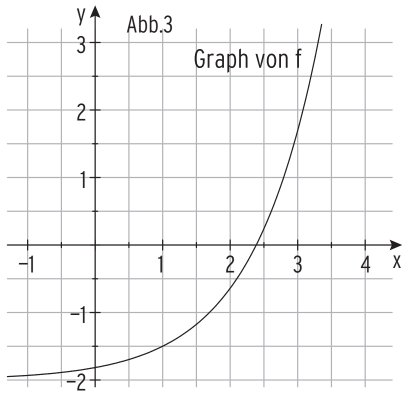
$f'(2) = -3$	K hat in x = 2 die Steigung − 3.
$f'(4) = 0$	
$f'(x) > 0$; $x \in \mathbb{R}$	
$f(-1) = 0$	
$f(4) < 0$	
$f'(-2) = -1$	
$f(3) = 4 \underset{\text{und}}{\wedge} f'(3) = 0$	
$f'(x) = 1$	

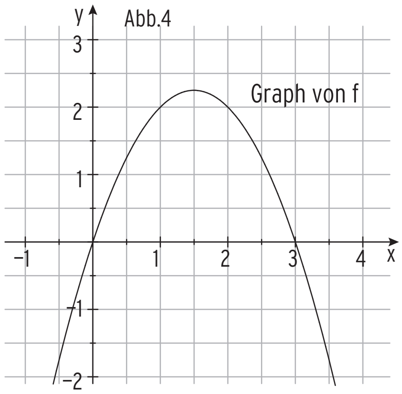
4. Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate von f auf [1; 3] und die momentane Änderungsrate in $x_0 = 1$ mithilfe der Abbildung.





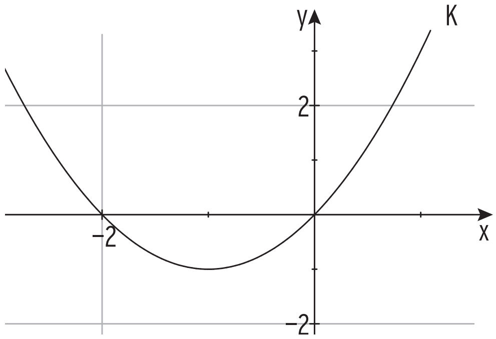


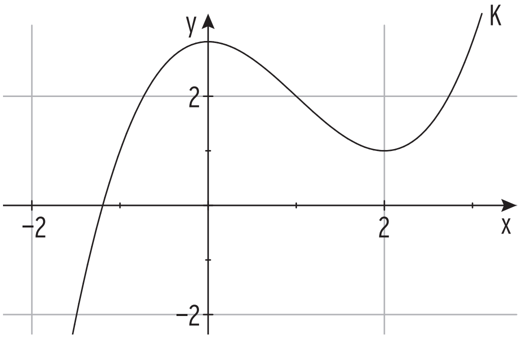




m_s = ______ m_t = ______ m_s = ______ m_t = ______ m_s = ______ m_t = ______

5. Die Abbildung zeigt das Schaubild K einer Funktion f. Beantworten Sie folgende Fragen.
   a) An welcher Stelle hat K eine waagrechte Tangente?
   b) An welcher Stelle hat K die Steigung 2?
   c) Auf welchem Bereich sind die Steigungen von K negativ?





Lösung:

a) ____________________

b) ____________________

c) ____________________

Lösung:

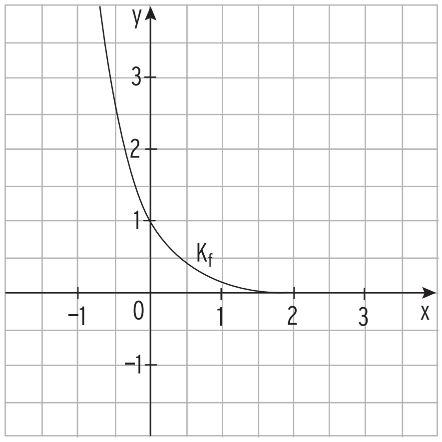
a) ____________________

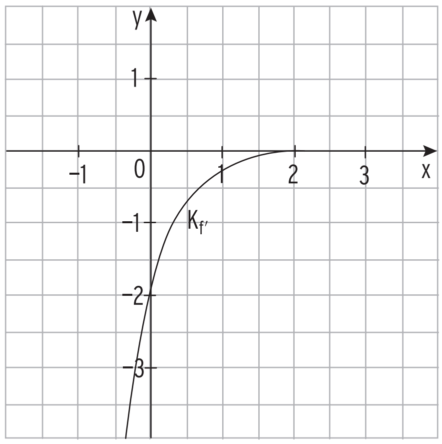
b) ____________________

c) ____________________

6. Gegeben sind die Schaubilder der Funktion f und der zugehörigen Ableitungsfunktion f′. Entscheiden Sie, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.

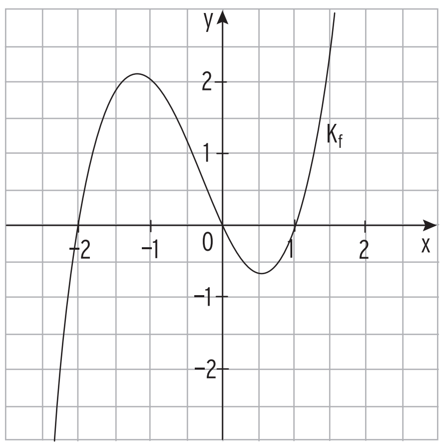
a)

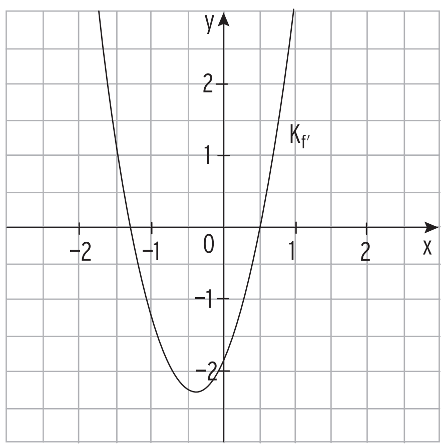




$f(-1) > f(1)$	☐ wahr ☐ falsch
$f(0) > f'(0)$	☐ wahr ☐ falsch
Es gibt keinen Punkt auf K_f, in dem K_f eine Steigung von -3 aufweist.	☐ wahr ☐ falsch
Im Schnittpunkt mit der y-Achse hat K_f die Steigung -2.	☐ wahr ☐ falsch
$f(2) \cdot f'(2) < 0$	☐ wahr ☐ falsch

b)





K_f ist bei $x = 1$ steiler als die Gerade mit $y = -0{,}5x + 2$.	☐ wahr ☐ falsch
Die momentane Änderungsrate von f ist bei $x=0$ negativ.	☐ wahr ☐ falsch
$f(1) > f'(1)$	☐ wahr ☐ falsch
Es gibt einen Punkt auf K_f mit y-Wert 2, in dem K_f eine Steigung von -1 hat.	☐ wahr ☐ falsch
Die mittlere Änderungsrate auf $[-2; -1]$ ist größer als die momentane Änderungsrate in $x = -2$.	☐ wahr ☐ falsch

mvurl.de/g9ee

7. Bilden Sie die erste Ableitung.

$f(x) = 2\cos(x) + 1$	$f'(x) = -2\sin(x)$
$f(x) = -3\sin(x) - x$	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^4 + 3$	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{1}{32}x^3 + x^2 + x - 4$	$f'(x) =$
$f(x) = 5e^x + 2x - 1$	$f'(x) =$
$f(x) = ae^x + b$	$f'(x) =$

8. Bilden Sie die erste Ableitung mithilfe der Kettenregel.

$f(x) = 2\sin(3x)$	$f'(x) = 2 \cdot 3\cos(3x) = 6\cos(3x)$
$f(x) = \frac{5}{3}e^{-4x}$	$f'(x) = -4 \cdot \frac{5}{3}e^{-4x} = -\frac{20}{3}e^{-4x}$
$f(x) = -0{,}25e^{8x} + 2$	$f'(x) =$
$f(x) = -1{,}2e^{-3x} + x^3$	$f'(x) =$
$f(x) = 2ae^{bx} + c$	$f'(x) =$
$f(x) = -\pi\cos(0{,}5x)$	$f'(x) =$
$f(x) = x - \sin(0{,}3\pi x)$	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{9}{5}e^{-x} + x^2$	$f'(x) =$
$f(x) = 4\sin(2x) + 1$	$f'(x) =$
$f(x) = 1 - 2\cos(2x)$	$f'(x) =$
$f'(x) = 4\cos(\frac{x}{\pi})$	$f'(x) =$

9. Bilden Sie die erste und die zweite Ableitung.

$f(x) = 2\cos(4x) + 2x$	$f'(x) = -8\sin(4x) + 2$	$f''(x) = -32\cos(4x)$
$f(x) = 6e^{2x} - x^2$	$f'(x) =$	$f''(x) =$
$f(x) = \frac{1}{4}\cos(3x)$	$f'(x) =$	$f''(x) =$
$f(x) = \frac{1}{16}(x^4 + x^2 - 8)$	$f'(x) =$	$f''(x) =$

10. Entscheiden Sie, ob hier richtig oder falsch abgeleitet wurde. Beschreiben Sie gegebenenfalls kurz, worin der Fehler besteht.

Funktionsterme	richtig falsch	richtig wäre …	Was wurde nicht beachtet?
$f(x) = 2x^4 + 2x^2$ $f'(x) = 8x^4 + 4x^2$	☐ (r) ☒ (f)	$f'(x) = 8x^3 + 4x$	Potenzregel: $(x^4)' = 4x^3$
$f(x) = 3x^6 - 3x^4 + x$ $f'(x) = 18x^5 - 12x^3$	☐ (r) ☐ (f)	$f'(x) =$	
$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ $f'(x) = e^{2x}$	☐ (r) ☐ (f)	$f'(x) =$	
$f(x) = \sin(2x) + 1$ $f'(x) = \cos(2x)$	☐ (r) ☐ (f)	$f'(x) =$	
$f(x) = e^{2x} - x^2$ $f'(x) = e^{2x} - 2x$	☐ (r) ☐ (f)	$f'(x) =$	
$f(x) = \cos(\pi x)$ $f'(x) = \sin(\pi x)$	☐ (r) ☐ (f)	$f'(x) =$	
$f(x) = 2x(x^3 + 4x^2)$ $f'(x) = 2(3x^2 + 8x)$	☐ (r) ☐ (f)	$f'(x) =$	

11. Sind die Aussagen wahr (w) oder falsch (f)?

Der Funktionswert von f mit $f(x) = x^2 + 1;\ x \in \mathbb{R}$, entspricht an jeder Stelle x der Steigung des Graphen der Ableitungsfunktion.	☐ (w) ☐ (f)
Der y-Wert $f'(x)$ entspricht an jeder Stelle x der Steigung des Graphen der Funktion f.	☐ (w) ☐ (f)
Die Ableitungsfunktion einer linearen Funktion ist eine konstante Funktion.	☐ (w) ☐ (f)
Es gibt keine zwei Funktionen, welche beide die gleiche Ableitungsfunktion haben.	☐ (w) ☐ (f)
Bei der Funktion f mit $f(x) = e^x$ entspricht der y-Wert an jeder Stelle der Steigung des zugehörigen Schaubildes.	☐ (w) ☐ (f)

2 Tangente und Normale

mvurl.de/w9d6

1. Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f an der Stelle x = u.

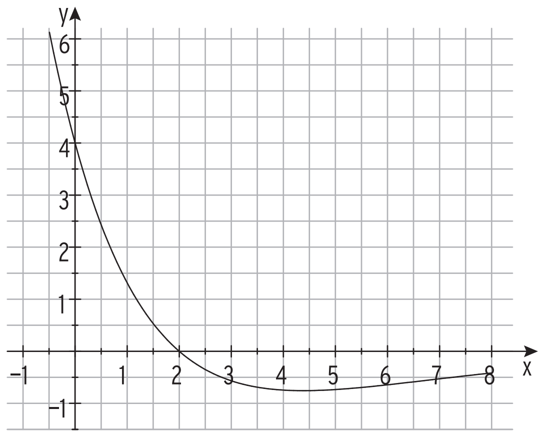
$f(x) = 3x - 2x^2$ $u = -2$	$f(-2) = 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2)^2 = -14$ $f'(x) = 3 - 4x$; $f'(-2) = 3 - 4(-2) = 11$; also $m_t = 11$ Tangentengleichung: $y = 11x + b$ Punktprobe mit $B(-2 \mid -14)$: $-14 = 11 \cdot (-2) + b \quad \Rightarrow b = 8$ Tangentengleichung: $y = 11x + 8$
$f(x) = x - 2e^{0,25x}$ $u = 4$	
$f(x) = \frac{1}{2}\sin(3x) + 1$ $u = \frac{\pi}{6}$	

2. Berechnen Sie die Gleichung der Normale an das Schaubild von f an der Stelle x = u.

$f(x) = x^3 - x^2$ $u = -1$ $\boxed{m_n = -\frac{1}{m_t}}$	$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 = -2$ $f'(x) = 3x^2 - 2x$; $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 2(-1) = 5 \Rightarrow m_n = -\frac{1}{5}$ Normalengleichung: $y = -\frac{1}{5}x + b$ Punktprobe mit $B(-1 \mid -2)$: $-2 = -\frac{1}{5} \cdot (-1) + b \quad \Rightarrow b = -\frac{11}{5}$ Normalengleichung: $y = -\frac{1}{5}x - \frac{11}{5}$
$f(x) = 3 - 2e^{-x}$ $u = 0$	
$f(x) = 2\cos(2x) + 2$ $u = \frac{\pi}{4}$	

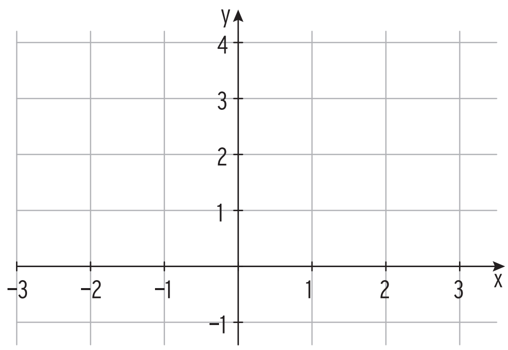
3. Gezeichnet ist das Schaubild einer Funktion h mit der Definitionsmenge D = [− 1; 8].
Prüfen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

$h'(1) < 0$	☐ (w)	☐ (f)
Das Schaubild von h′ geht durch den Punkt Q(2 | 0).	☐ (w)	☐ (f)
$h'(7) = -0{,}5$	☐ (w)	☐ (f)
Es gibt ein $x \in D$ für das gilt: $h'(x) = 0$.	☐ (w)	☐ (f)
Die Gleichung $h'(x) = 1$ hat eine Lösung.	☐ (w)	☐ (f)

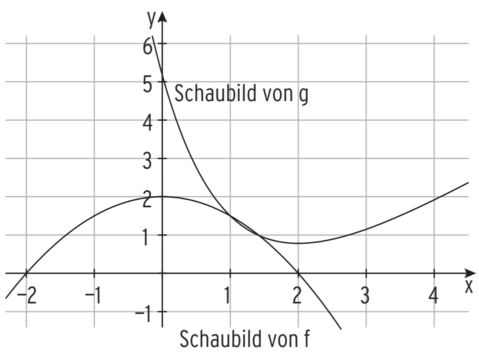


4. Berührt das Schaubild K von f mit $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$; $x \in \mathbb{R}$, die x-Achse?
Begründen Sie durch Rechnung. Skizzieren Sie das Schaubild von f.

Lösung:



5. Berühren sich das Schaubild von f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$; $x \in \mathbb{R}$, und das Schaubild von g mit $g(x) = e^{2-x} + x - e + 0{,}5$; $x \in \mathbb{R}$, in $x_0 = 1$?
Begründen Sie rechnerisch.



Lösung:

IV Integralrechnung

1 Aufleiten und Stammfunktion

mvurl.de/zxdy

1 Ein Mitschüler versteht nicht, weshalb eine Funktion mehrere Stammfunktionen besitzt.

a) Erklären Sie anhand der Ableitungsregeln.

b) Erklären Sie graphisch, anhand von Schaubildern.

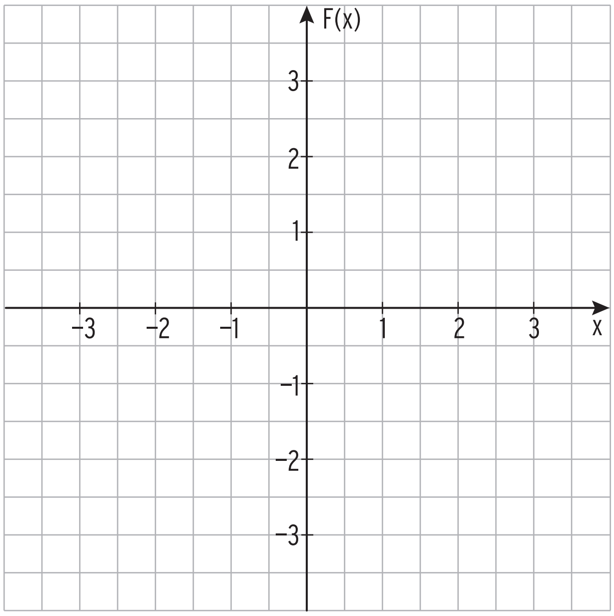
Skizzieren Sie hierfür die Schaubilder von

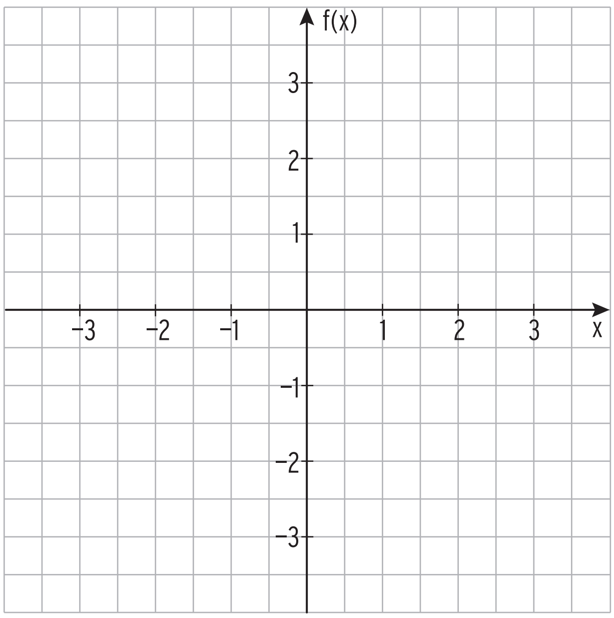
F_1 mit $F_1(x) = \frac{1}{2}x^2$

F_2 mit $F_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$

F_3 mit $F_3(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

f mit $f(x) = x$





2. Bilden Sie eine Stammfunktion.

$f(x) = 2\cos(3x) + 1$	$F(x) = \frac{2}{3}\sin(3x) + x + c$
$f(x) = -3\sin(\frac{x}{2}) - x$	$F(x) =$
$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^4 + 3$	$F(x) =$
$f(x) = \frac{1}{32}x^3 + x^2 + x - 4$	$F(x) =$
$f(x) = 5e^{2x} + 2x - 1$	$F(x) =$
$f(x) = ae^{-3x} + b$	$F(x) =$
$f(x) = \frac{3}{5}(x^3 - 2x^4)$	$F(x) =$
$f(x) = 4x - 1 - 4e^{-2x}$	$F(x) =$

3. Bilden Sie eine Stammfunktion mit F(a) = b.

$f(x) = 4\sin(\pi x)$; $F(1) = 2$	$F(x) = -\frac{4}{\pi}\cos(\pi x) + c$; $F(1) = \frac{4}{\pi} + c = 2 \Rightarrow c = 2 - \frac{4}{\pi}$ $F(x) = -\frac{4}{\pi}\cos(\pi x) + 2 - \frac{4}{\pi}$
$f(x) = -\frac{4}{3}\sin(\frac{x}{2}) - 3$; $F(\pi) = 0$	$F(x) =$ $F(x) =$
$f(x) = -\frac{1}{32}x^3 + x^2 + 3x$; $F(1) = 0$	$F(x) =$ $F(x) =$
$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x - 1)$; $F(-1) = 1$	$F(x) =$ $F(x) =$
$f(x) = 0{,}2e^{2x} + 2{,}25$; $F(0) = 4$	$F(x) =$ $F(x) =$
$f(x) = 2(e^{-4x} + 1)$; $F(0) = -1$	$F(x) =$ $F(x) =$
$f(x) = \frac{4}{5}(x^5 - 2x^4)$; $F(-2) = 3$	$F(x) =$ $F(x) =$
$f(x) = \frac{4x}{3} - e^{-\frac{3}{2}x}$; $F(0) = 6$	$F(x) =$ $F(x) =$

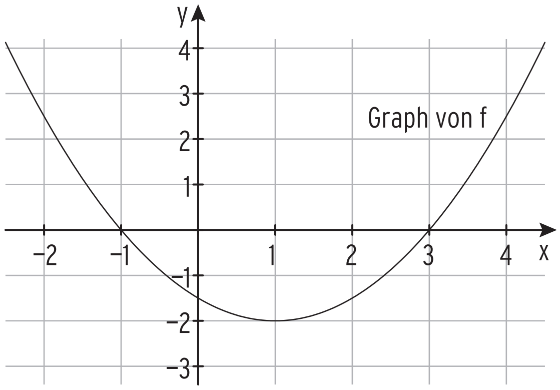
4. Entscheiden Sie, ob hier richtig oder falsch aufgeleitet wurde. Beschreiben Sie gegebenenfalls kurz, worin der Fehler besteht.

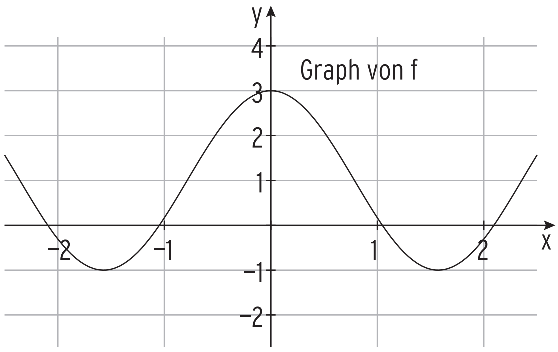
Funktion f Stammfunktion F	richtig (r) falsch (f)	richtig wäre …	Was wurde nicht beachtet?
$f(x) = 2x^3 - 4x^2$ $F(x) = 2x^4 - 4x^3$	☐ (r) ☒ (f)	$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3$	$g(x) = x^3 \Rightarrow G(x) = \frac{1}{4}x^4$ $h(x) = x^2 \Rightarrow H(x) = \frac{1}{3}x^3$
$f(x) = 1 + x$ $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	
$f(x) = e^{3x-2}$ $F(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2}$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	
$f(x) = 2\sin(2x)$ $F(x) = \cos(2x) + 1$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	
$f(x) = e^{2x} + 2x$ $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + x^2$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	
$f(x) = 2 - \cos(\pi x)$ $F(x) = \sin(\pi x)$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	
$f(x) = 1 - x^2$ $F(x) = -\frac{1}{3}x^3$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	
$f(x) = -\frac{5}{2}(x^3 - 3x^2)$ $F(x) = -\frac{5}{2}(\frac{1}{4}x^4 - x^3)$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	
$f(x) = 2x - 2$ $F(x) = (x - 1)^2$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	
$f(x) = 2x(2x + 5)$ $F(x) = x^2(x^2 + 5x)$	☐ (r) ☐ (f)	F(x) =	

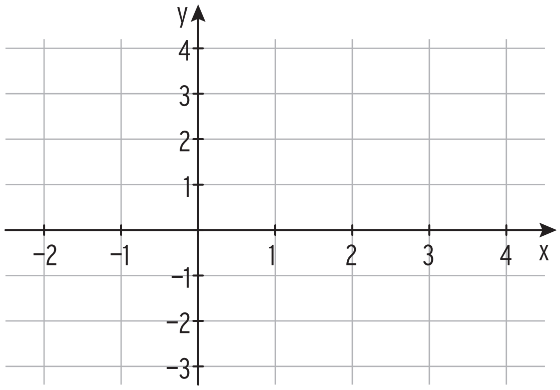
mvurl.de/pdqv

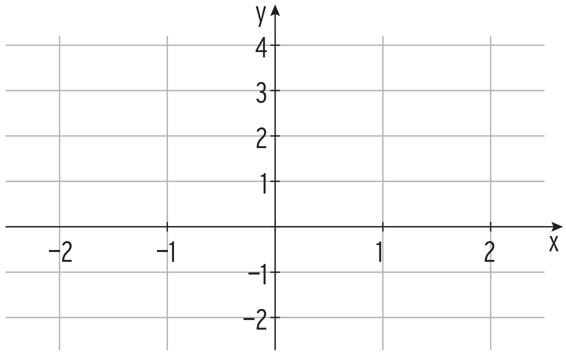
2 Grafisches Aufleiten

1 Skizzieren Sie das Schaubild einer Stammfunktion F von f.





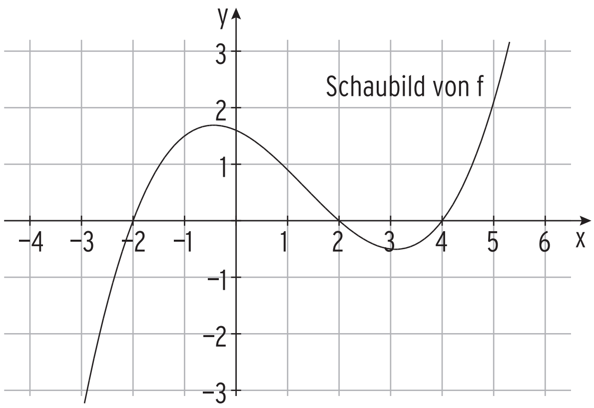


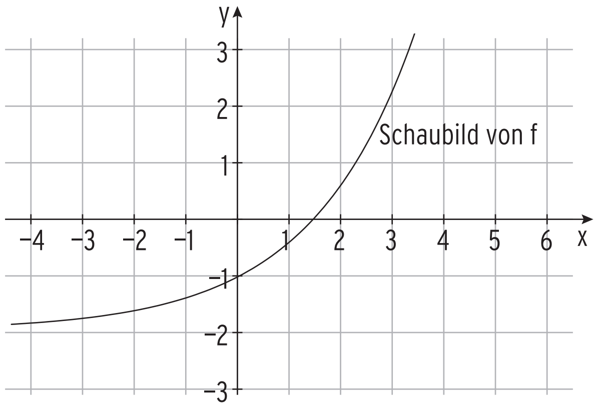


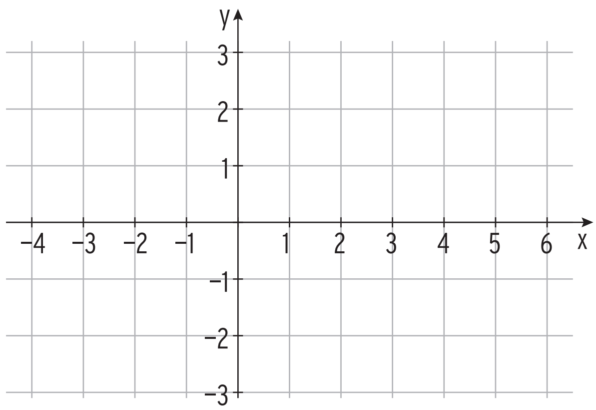
2 Skizzieren Sie das Schaubild einer Stammfunktion F von f

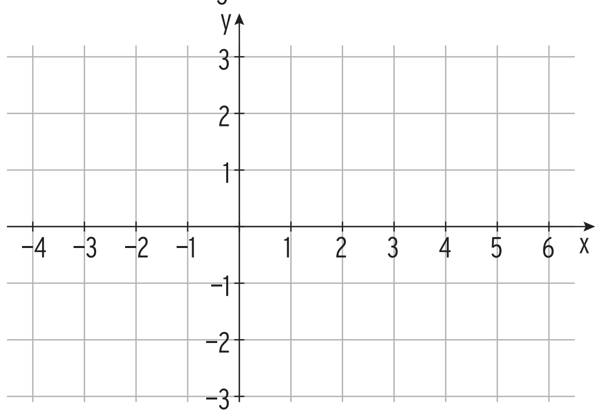
durch den Ursprung.

durch P(0 | 1)

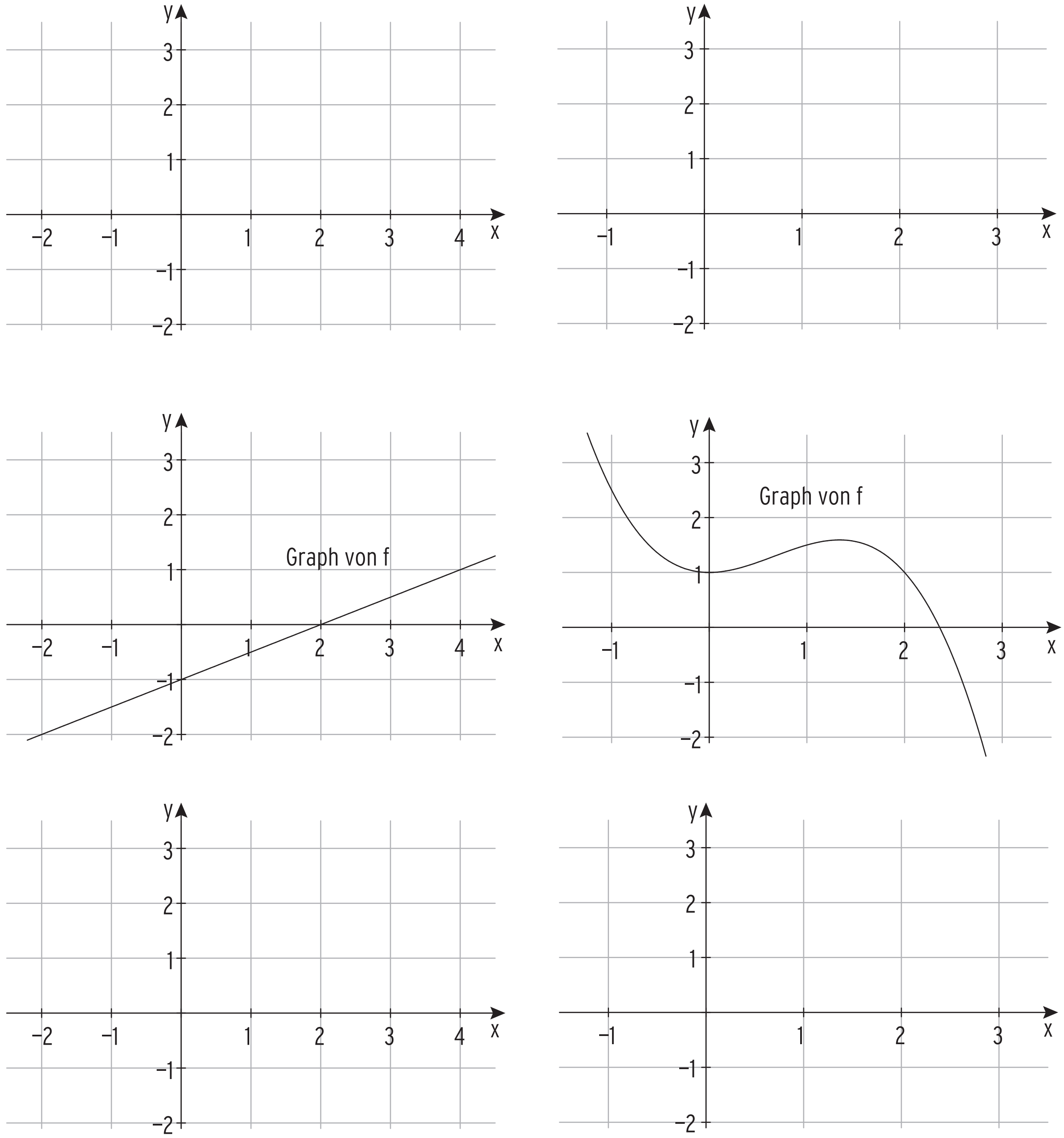






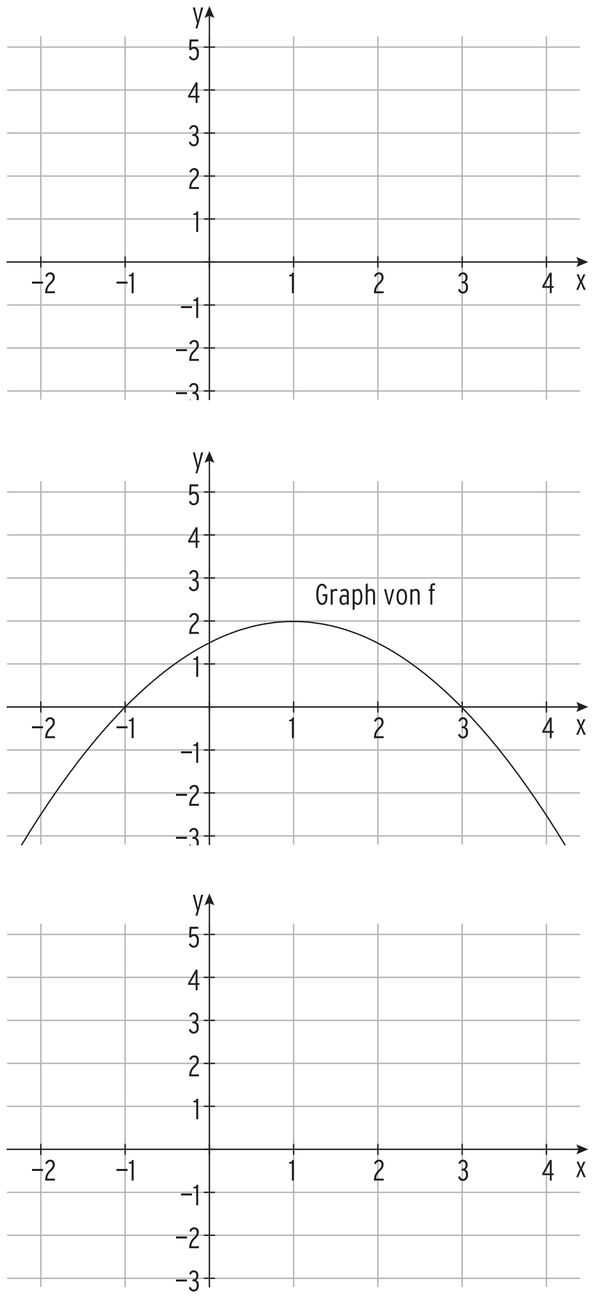


3. Gegeben ist das Schaubild der Funktion f. Zeichnen Sie das Schaubild ihrer Ableitungsfunktion f′ und das Schaubild einer Stammfunktion F von f.

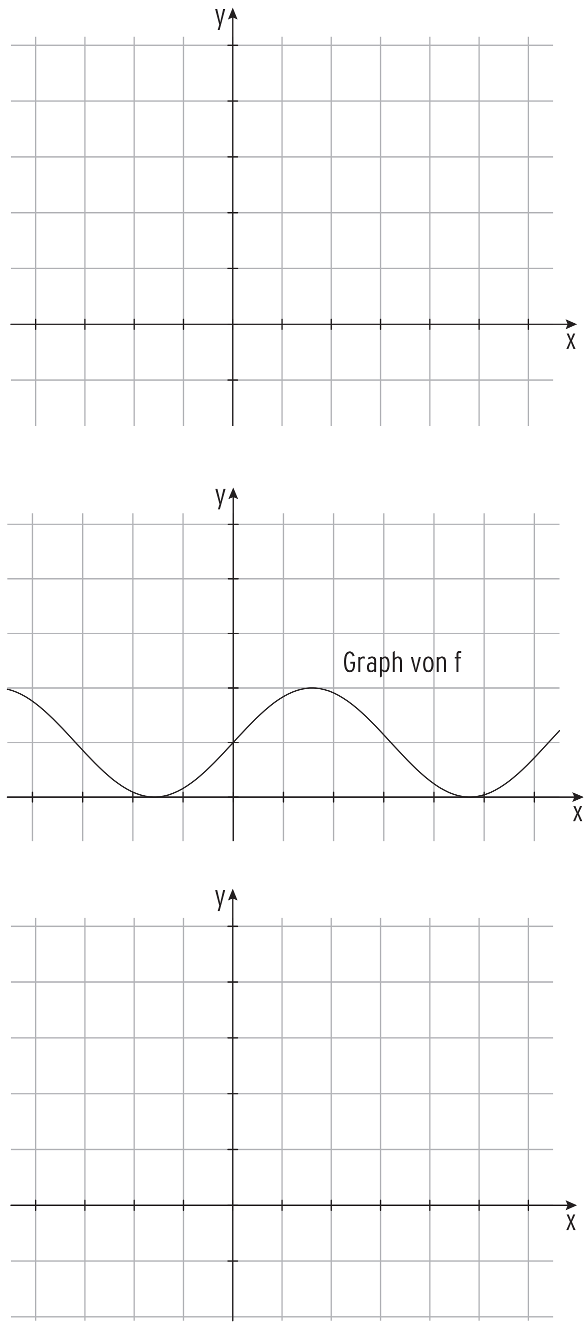


4. Gegeben ist das Schaubild der Funktion f. Skizzieren Sie das Schaubild ihrer Ableitungsfunktion f′ und das Schaubild einer Stammfunktion F von f.

a)



b)



Basiswissen

Terme und Gleichungen

1. Vereinfachen Sie den Term.

$x - 3x - 8(x + 1)$	$= x - 3x - 8x - 8 = -10x - 8$
$x + 5(x - y + 2) - 6x - 2y$	$= x + 5x - 5y + 10 - 6x - 2y = -7y + 10$
$7(x - 2) + 3(x - 5)$	$= 7x - 14 + 3x - 15 = 10x - 29$
$12x - 6(x - 1) + 12$	$= 12x - 6x + 6 + 12 = 6x + 18$
$2 \cdot 4a \cdot 3b + 5a \cdot 2b - 18ab$	$= 24ab + 10ab - 18ab = 16ab$
$2(x^2 - x) + (x^2 - x - 3) \cdot (-5)$	$= 2x^2 - 2x - 5x^2 + 5x + 15 = -3x^2 + 3x + 15$
$8a - 3x + 6a - (x + a) - 5(a - 2x)$	$= 8a - 3x + 6a - x - a - 5a + 10x = 8a + 6x$

2. Multiplizieren Sie aus.

$2x(1 + 6y) + x(3 - 2y)$	$= 2x + 12xy + 3x - 2xy = 5x + 10xy$
$4(x + 2y - 3z) + 4$	$= 4x + 8y - 12z + 4$
$(x - 7)(x - 2)$	$= x^2 - 7x - 2x + 14 = x^2 - 9x + 14$
$\frac{1}{4}(x - 2)(x + 6)$	$= \frac{1}{4}(x^2 - 2x + 6x - 12)$ $= \frac{1}{4}(x^2 + 4x - 12) = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$
$4(x - 6y) - 8(x - 6y)$	$= 4x - 24y - 8x + 48y = -4x + 24y$

3. Klammern Sie aus.

$24x + 16y - 12$	$= 4 \cdot 6x + 4 \cdot 4y - 4 \cdot 3 = 4(6x + 4y - 3)$
$4x + 8y - 12z$	$= 4(x + 2y - 3z)$
$tx - 3tx + t$	$= t(x - 3x + 1) = t(-2x + 1) = -t(2x - 1)$
$24a + 16ab - 12ac$	$= 4a(6 + 4b - 3c)$
$4(x - 6y) - 8(x - 6y)$	$= (4 - 8)(x - 6y) = -4(x - 6y)$

4. Berechnen Sie ohne Hilfsmittel.

$1 - \frac{1}{7}$	$= \frac{7}{7} - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$	$-2 \cdot (-\frac{2}{9}) \cdot (-\frac{2}{5})$	$= \frac{4}{9} \cdot (-\frac{2}{5}) = -\frac{8}{45}$
$-\frac{2}{5} + \frac{6}{5}$	$= \frac{4}{5}$	$\frac{1}{9} \cdot (-7)$	$= \frac{-7}{9} = -\frac{7}{9}$
$-\frac{24}{5} - 5$	$= -\frac{24}{5} - \frac{25}{5} = -\frac{49}{5}$	$-\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6}$	$= -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$ (kürzen)
$\frac{2}{9} - 1 - \frac{5}{9}$	$= \frac{2}{9} - \frac{9}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}$	$-\frac{5 + 3}{4} \cdot (-4)$	$= 8$ (kürzen)
$-\frac{(5 + 3)}{6} - \frac{4}{6}$	$= -\frac{8}{6} - \frac{4}{6} = -\frac{12}{6} = -2$	$\frac{9}{2} \cdot (-\frac{4}{9})$	$= -\frac{4}{2} = -2$
$\frac{9 - 2}{-7}$	$= \frac{7}{-7} = -1$	$(\frac{2}{3})^2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$= \frac{4}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{4}{9}$
$\frac{3}{2} - \frac{4}{5} - \frac{6}{4} - \frac{4}{5}$	$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - \frac{8}{5} = -\frac{8}{5}$	$5 - \frac{7}{3} - \frac{1 + 3}{6}$	$= \frac{15}{3} - \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$
$-\frac{5 + 7}{12} + \frac{5 - 7}{12}$	$= -\frac{12}{12} - \frac{2}{12} = -\frac{14}{12} = -\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{a} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{a}$	$= \frac{1}{a} \cdot (-\frac{3}{5} + 1) = \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5a}$

5. Formulieren Sie einen Term für den Text.

Summe aus dem fünffachen einer Zahl und 13	$5x + 13$
Subtrahiere von 46 das Doppelte einer Zahl	$46 - 2x$
Gesamtkosten aus: Fixkosten 20 €, Kosten pro Stück 0,75 €	$0{,}75x + 20$

6. Wenden Sie eine binomische Formel an.

$(x + 1)^2$	$= x^2 + 2x + 1$	$x^2 - 12x + 36$	$= (x - 6)^2$
$x^2 + 8x + 16$	$= (x + 4)^2$	$(x - 5)^2$	$= x^2 - 10x + 25$
$(x - 3t)^2$	$= x^2 - 6tx + 9t^2$	$(x - a)^2$	$= x^2 - 2ax + a^2$
$4(x - 6y)(x + 6y)$	$= 4x^2 - 144y^2$	$(2x - 1)^2$	$= 4x^2 - 4x + 1$
$x^2 - x + \frac{1}{4}$	$= (x - \frac{1}{2})^2$	$x^2 + 20x + 100$	$= (x + 10)^2$

7. Ergänzen Sie den Term.

$(x + \_\_)^2 = x^2 + \_\_ \cdot 5x$ ______	$(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot 5x + 25$
$\frac{5}{4}a - \frac{3}{4}b = \frac{1}{4} \cdot (5a - 3b)$	$49 - 14a + a^2 = (7 - a) \cdot (7 - a)$
$(x - 3t)^2 = x^2 - 6tx + 9t^2$	$x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$
$(x - 2y)(x + 2y) = x^2 - 4y^2$	$2x^2 - 5x = x(2x - 5)$

8. Lösen Sie nach x bzw t auf.

$A = \frac{1}{2}xy$	$U = 2(a + x)$	$V = \frac{G}{3} \cdot (5x)$	$v = a \cdot t + v_0$
$A = \frac{1}{2}xy \quad \vert \cdot 2$ $2A = xy \quad \vert : y$ $x = \frac{2A}{y}$	$U = 2(a + x) \quad \vert : 2$ $\frac{U}{2} = a + x \quad \vert - a$ $x = \frac{U}{2} - a$	$V = \frac{G}{3} \cdot (5x) \quad \vert \cdot \frac{3}{G}$ $\frac{3V}{G} = 5x \quad \vert : 5$ $x = \frac{3V}{5G}$	$v = a \cdot t + v_0 \quad \vert - v_0$ $v - v_0 = a \cdot t \quad \vert : a$ $t = \frac{v - v_0}{a}$

9. Stellen Sie als eine Potenz dar.

$12 \cdot 12 \cdot 12$	$= 12^3$	$4^6 \cdot 2^6$	$= (4 \cdot 2)^6 = 8^6$
$36 \cdot 6$	$= 6^2 \cdot 6 = 6^3$	$9^3 \cdot 9^2$	$= 9^5$
144	$= 12^2$	$2^3 + 2^3$	$= 2 \cdot 2^3 = 2^4$
$2^2 \cdot 8$	$= 2^2 \cdot 2^3 = 2^5$	$2^4 - 2^3$	$= 2^3(2 - 1) = 2^3$
$(5 - 7) \cdot (5 - 7)$	$= (-2)^2 = 4$	$(9 - 2) \cdot 7^3$	$= 7 \cdot 7^3 = 7^4$

10. Berechnen Sie.

$6^2 + 3^2 - 2^3$	$= 36 + 9 - 8 = 37$	$2^4 - 1$	$= 16 - 1 = 15$
$a^2 \cdot a$	$= a^2 \cdot a^1 = a^3$	$3^3 \cdot 2$	$= 54$
$x^4 - 4x^4 - 5x^4$	$= -8x^4$	$4^3 \cdot 4^2$	$= 4^5 = 1024$
$c^3 \cdot c^3 \cdot c^4$	$= c^{3+3+4} = c^{10}$	$1^5 + 1^{18}$	$= 2$
10^5	$= 100000$	$-(1 - 2)^{13}$	$= -(-1)^{13} = -(-1) = 1$

11. Vereinfachen Sie, wenn möglich.

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}$	$= \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$	$(\sqrt{2{,}5})^2$	$= 2{,}5$
$3 \cdot \sqrt{6} - \sqrt{6}$	$= 2 \cdot \sqrt{6}$	$(\sqrt{\frac{1}{2}})^4$	$= (\sqrt{\frac{1}{2}})^2 \cdot (\sqrt{\frac{1}{2}})^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$	$= \sqrt{36} = 6$	$(\sqrt{5})^3$	$= (\sqrt{5})^2 \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
$\sqrt{\frac{16}{9} + 6 \cdot \frac{8}{9}}$	$= \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$	$\sqrt{5}\,\sqrt{20}$	$= \sqrt{100} = 10$
$\sqrt{-1}$	nicht möglich	$\sqrt{3} + \sqrt{12}$	$= \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

12. Lösen Sie die Gleichungen.

$x = -3x - 8$	$x + 5 = 2 - 6x$	$7(x - 2) = 3(x - 5)$
$x = -3x - 8 \quad \vert + 3x$ Sortieren: $4x = -8 \quad \vert : 4$ $x = -2$	$x + 5 = 2 - 6x \quad \vert + 6x$ $7x + 5 = 2 \quad \vert - 5$ $7x = -3 \quad \vert : 7$ $x = -\frac{3}{7}$	$7x - 14 = 3x - 15 \quad \vert - 3x$ $4x - 14 = -15 \quad \vert + 14$ $4x = -1 \quad \vert : 4$ $x = -\frac{1}{4}$
$12x - 12(x + 1) + 12 = 0$	$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 1 - 2x$	$3(6x - 14) = 12x + 6(x - 3)$
$12x - 12x - 12 + 12 = 0$ $0 = 0$ wahre Aussage für alle x $L = \mathbb{R}$	$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 1 - 2x \quad \vert + 2x$ $\frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 1 \quad \vert + \frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \quad \vert : \frac{5}{2}$ $x = 1$	$18x - 42 = 12x + 6x - 18$ $18x - 42 = 18x - 18 \quad \vert - 18x$ $-42 = -18$ falsche Aussage für alle x keine Lösung: $L = \varnothing$
$\frac{7}{2}x - 1 = -\frac{7}{3}x$	$\frac{3}{2}(6 - 3x) = 6 - 3x$	$x(2x - 1) = 1 + 2x^2 + 6x$
$\frac{7}{2}x - 1 = -\frac{7}{3}x \quad \vert + \frac{7}{3}x + 1$ $\frac{7}{2}x + \frac{7}{3}x = 1 \Leftrightarrow \frac{21}{6}x + \frac{14}{6}x = 1$ $\frac{35}{6}x = 1 \quad \vert \cdot (\frac{6}{35})$ $x = \frac{6}{35}$	$9 - \frac{9}{2}x = 6 - 3x \quad \vert + 3x$ $9 - \frac{3}{2}x = 6 \quad \vert - 9$ $-\frac{3}{2}x = -3 \quad \vert \cdot (-\frac{2}{3})$ $x = 2$	$2x^2 - x = 1 + 2x^2 + 6x$ $-x = 1 + 6x \quad \vert - 6x$ $-7x = 1 \quad \vert : (-7)$ $x = -\frac{1}{7}$
$4 - \frac{x}{5} - \frac{x}{3} = -1$	$\frac{2x}{3} - 4 = -\frac{5}{6}x - 1$	$1 - 2x = \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}$
$4 - \frac{3x}{15} - \frac{5x}{15} = -1$ $4 - \frac{8x}{15} = -1 \quad \vert - 4$ $-\frac{8x}{15} = -5 \quad \vert \cdot (-\frac{15}{8})$ $x = \frac{75}{8}$	$\frac{4x}{6} - 4 = -\frac{5}{6}x - 1 \quad \vert + \frac{5}{6}x$ $\frac{3}{2}x - 4 = -1 \quad \vert + 4$ $\frac{3}{2}x = 3 \quad \vert \cdot \frac{2}{3}$ $x = 2$	$1 - 2x = \frac{3}{4}x + \frac{1}{3} \quad \vert + 2x$ $1 = \frac{11}{4}x + \frac{1}{3} \quad \vert - \frac{1}{3}$ $\frac{2}{3} = \frac{11}{4}x \quad \vert \cdot \frac{4}{11}$ $x = \frac{8}{33}$

13. Kreuzen Sie die richtige Lösung an.

$5(x - 3) = 0$	☐ 2	☒ 3	☐ 0
$x + 5 = 4 - x$	☐ −1	☒ −0,5	☐ −2
$7x - 3 = 3(x - 1)$	☒ 0	☐ −1	☐ 1
$\frac{1}{7}x - \frac{3}{7} = 0$	☐ $-\frac{3}{7}$	☐ $\frac{3}{7}$	☒ 3