Ott | Rosner

Abiturprüfung in Mathematik

Analysis, Stochastik, Lineare Algebra

Erhöhtes Anforderungsniveau (eAN)

Berufliches Gymnasium

Baden-Württemberg

mit Lernvideos

Schülergerechte Lösungen

Merkur Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

* * * * *

Umschlag Bild: © frhuynh - Fotolia.com

1. Auflage 2023
© 2023 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0389-01
ISBN 978-3-8120-1033-7

Vorwort

Diese Aufgabensammlung richtet sich exakt nach der Prüfungsordnung für berufliche Gymnasien in Baden-Württemberg.
Die Aufgaben dienen zur Vorbereitung auf das Abitur 2024 und decken den gesamten Prüfungsstoff (Analysis, Stochastik, Vektorgeometrie) ab.

Auch zum neuen Prüfungsformat **Problemlösen** sind eine Vielzahl Aufgaben enthalten.
Die Einteilung nach Themengebieten und der Zulässigkeit von Hilfsmitteln ermöglicht ein gezieltes Üben.
Beispielaufgaben im Prüfungsumfang gewährleisten eine optimale Vorbereitung für die Abiturprüfung.

Eine Anzahl geeigneter Abituraufgaben früherer Jahre wurde von den Autoren umgearbeitet, ergänzt und so verändert, dass sie auch in der Frage- und Aufgabenstellung für die Abiturprüfung 2024 relevant sind.
Auch der Miteinbeziehung der IQB-Aufgaben in künftige Abiturjahrgänge wird Rechnung getragen. Die **Originalmusterprüfungsaufgabe** der Abiturkommision ist ebenfalls enthalten.

Da die Aufgabensammlungen allen Schülern und Schülerinnen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen sollen, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.

Auch **Videos** sind enthalten und tragen zu einem besseren Verständnis bei.
Auf diese kann über eine Kurzadresse oder einen QR-Code zugegriffen werden.
Der Abiturmodus wird ausführlich dargestellt.

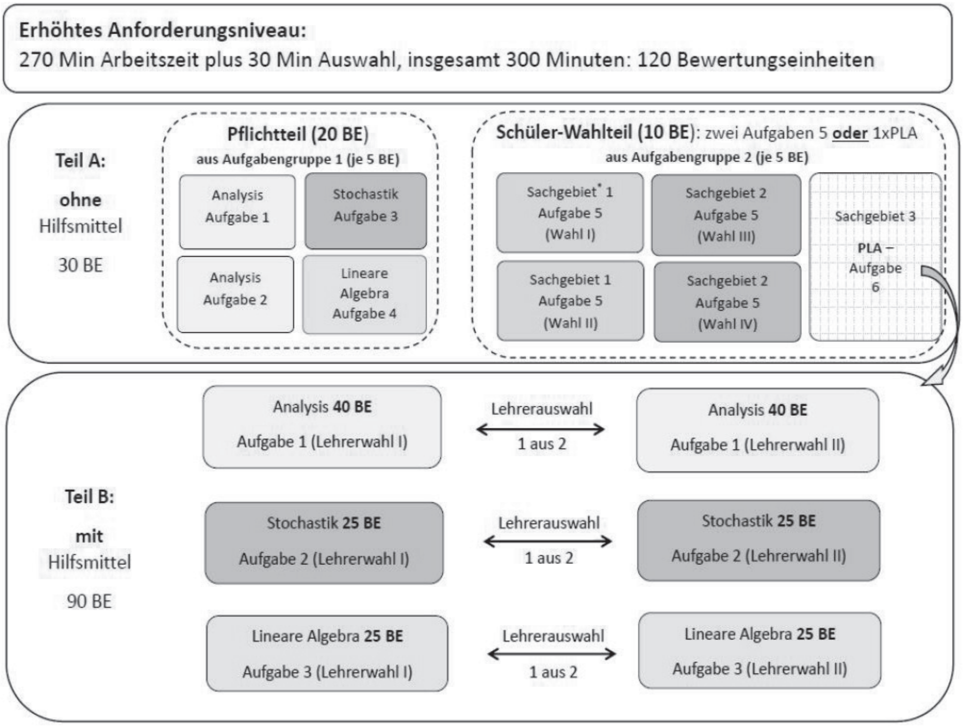
Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der Abiturprüfung 2024 in Mathematik

www.mvurl.de/tew2

Erhöhtes Anforderungsniveau (eAN) - Übersicht



* Sachgebiete sind Analysis, Stochastik, Lineare Algebra

Erläuterungen:

Teil A (ohne Hilfsmittel)

In diesem Prüfungsteil sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Insgesamt sind hier maximal 30 BE (Bewertungseinheiten) erreichbar. Dabei sind 10 BE Schülerwahl. Der Anteil (in BE) an Stochastik, bzw. Linearer Algebra ist jedoch jeweils nicht größer als der Anteil an Analysis.

Im Pflichtteil müssen alle Aufgaben bearbeitet werden. Dies sind die Aufgaben mit den Nummern 1 bis 4. Für die anschließenden Aufgaben besteht eine Schülerauswahl. Es sind dies die Aufgaben mit den Nummern 5 bzw. 6.

Die Schülerinnen und Schüler wählen genau zwei der vier Aufgaben Nr. 5 aus (insgesamt 10 BE). Diese können aus demselben Sachgebiet sein.

Alternativ zu den beiden Aufgaben Nr. 5 kann die Problemlöse-Aufgabe (Nr. 6) mit 10 BE gewählt werden.Diese Problemlöse-Aufgabe deckt dabei das dritte, nicht von den Aufgaben Nr. 5 abgedeckte Sachgebiet ab.
Die Aufgaben der Linearen Algebra können sowohl das Themengebiet Vektorgeometrie als auch das Themengebiet Matrizen enthalten.

Teil B (mit Hilfsmittel)
In diesem Prüfungsteil sind als Hilfsmittel der in BW zugelassene wissenschaftliche Taschenrechner (WTR), sowie die für die beruflichen Schulen (BS) in BW eingeführte Merkhilfe (ohne Handbuch bzw. Einlegeblatt) erlaubt.
Weitere Hilfsmittel sind nicht zulässig.
Für jedes der drei Sachgebiete werden zwei Aufgaben vorgelegt.
Es besteht Auswahl durch die Fachlehrkraft. Aus jedem der drei Sachgebiete wird genau eine Aufgabe ausgewählt.
Im Sachgebiet Analysis sind maximal 40 BE erreichbar. In den Sachgebieten Stochastik und Lineare Algebra sind jeweils maximal 25 BE erreichbar.

Ablauf der schriftlichen Prüfung
Zu Prüfungsbeginn stehen den Schülerinnen und Schülern alle Aufgaben (d.h. Teil A und Teil B der Prüfung) zur Bearbeitung zur Verfügung.
Die Schülerinnen und Schüler entscheiden selbst über den Zeitpunkt der Abgabe der Bearbeitungen zum Teil A. Dieser Zeitpunkt muss im eAN innerhalb der ersten 100 Minuten nach Prüfungsbeginn sein.
Wird vom Prüfling aus Teil A die Option PLA (Aufgabe 6) gewählt, so besteht die Möglichkeit diese Aufgabe in Teil B zu bearbeiten und die zugelassenen Hilfsmittel für die Bearbeitung dieser Aufgabe auch einzusetzen.
Die zugelassenen Hilfsmittel (WTR und Merkhilfe) bekommen die Prüflinge genau dann, wenn die Bearbeitungen von Teil A (ggf. ohne PLA) unwiderruflich abgegeben worden sind. Sie werden den Schülerinnen und Schülern zur Bearbeitung von Teil B (und ggf. der PLA) ausgehändigt.
Die gesamte Arbeitszeit beträgt im eAN 300 Minuten.
Darin enthalten sind 30 Minuten Auswahlzeit (für die Schülerauswahl in Teil A).

I Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

1 Übungsaufgaben Teil A

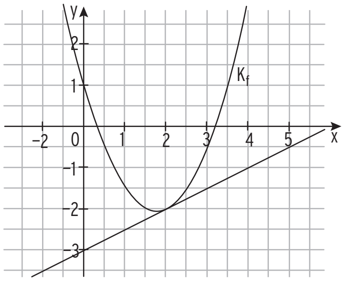
1.1 Analysis Übungsaufgaben

Lösungen Seite 22 - 24

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.

Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm.



Aufgabe 2

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$ besitzt einen Wendepunkt. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

Aufgabe 3

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt $H(1 \mid 1)$ ist der Hochpunkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 4

K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{x-3} - 2$.
Die Tangente an K an der Stelle $x = 3$ schneidet die Asymptote von K in S.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx$.
Interpretieren Sie den Integralwert mithilfe geeigneter Flächenstücke.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

2 Aufgabensätze Teil A ohne Hilfsmittel

Aufgabensatz I Teil A ohne Hilfsmittel Lösungen Seite 55-58

(30 Punkte)

Aufgabe 1 Analysis — Punkte

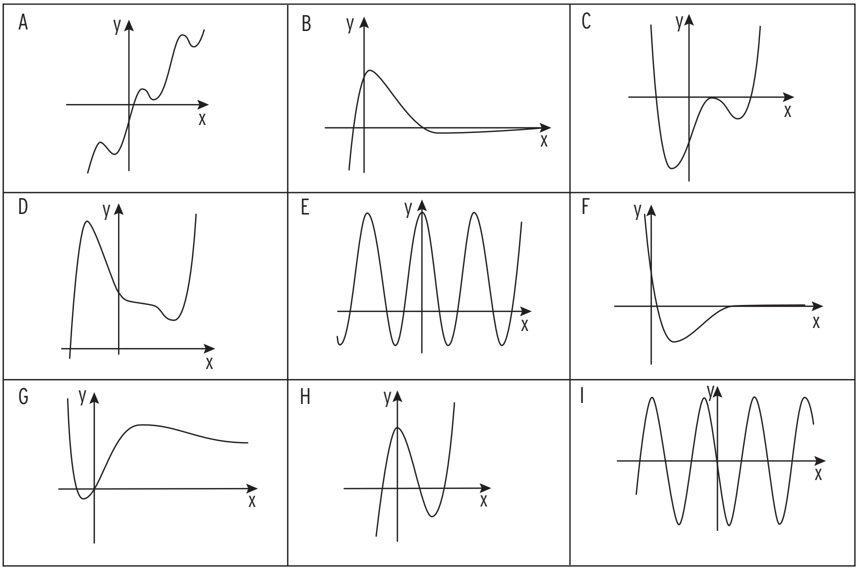
a Erläutern Sie anhand einer Skizze, ob das Integral $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)dx$ größer, kleiner oder gleich Null ist. — 2

b Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$. — 3
Geben Sie die Periode von f an.
Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung $\cos(2x) = -1$.

$\overline{5}$

Aufgabe 2 Analysis

Die Abbildungen zeigen Schaubilder von drei Funktionen sowie deren zugehörigen ersten und zweiten Ableitungen. Ordnen Sie jeweils dem Schaubild der Funktion das Schaubild ihrer ersten und zweiten Ableitung zu:

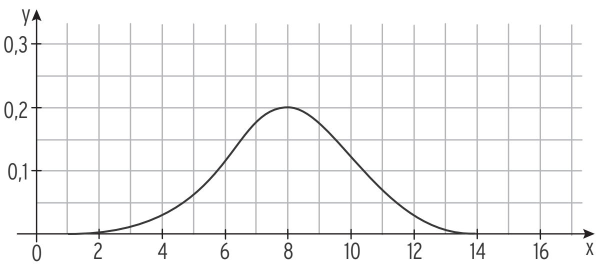


$\overline{5}$

Aufgabensatz I Teil A ohne Hilfsmittel

Aufgabe 3 Stochastik **Punkte**

Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion der normalverteilten Zufallsgröße A.



a Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A einen Wert aus dem Intervall [6;10] annimmt, beträgt etwa 68%. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A einen Wert annimmt, der größer als 10 ist. 2

b Die Zufallsgröße B ist ebenfalls normalverteilt; der Erwartungswert von B ist ebensogroß wie der Erwartungswert von A, die Standardabweichung von B ist größer als die Standardabweichung von A. Skizzieren Sie in der Abbildung einen möglichen Graphen der Dichtefunktion von B. 3

3

5

Aufgabe 4 Lineare Algebra

Gegeben sind die Ebenen E_1 und E_2 mit

$$E_1: 6x_1 - x_2 - 4x_3 = 12 \quad \text{und} \quad E_2: -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -6 .$$

Die Punkte $A(2|\,0|0)$ und $B(0|\,0|\,-3)$ liegen in beiden Ebenen.

a Begründen Sie, dass die Ebenen E_1 und E_2 nicht identisch sind. 1

b Ermitteln Sie die Koordinaten eines von A und B verschiedenen Punktes, der ebenfalls in beiden Ebenen liegt. 2

c In der Gleichung von E_2 soll genau ein Koeffizient so geändert werden, dass eine Gleichung der Ebene E_1 entsteht. 2

Geben Sie diese Änderung an und begründen Sie Ihre Antwort.

5

Aufgabensatz I Teil A ohne Hilfsmittel

(entweder zwei Aufgaben 5 oder Aufgabe 6 auswählen)

Aufgabe 5 (Auswahl I) **Punkte**

Für eine Funktion f gilt:

(1) $f'(x) = 0$ für $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

(2) $f''(-2) = -3$

(3) $f''(1) = 3$

(4) $f(-2) = \frac{19}{3}$

(5) $f(1) = \frac{11}{6}$

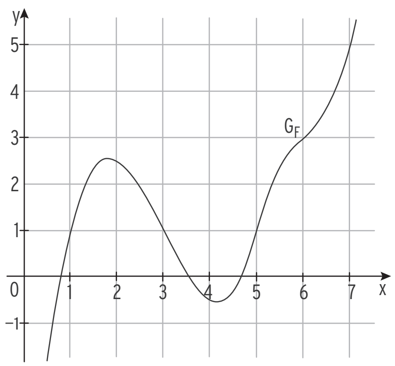
Welche Aussagen lassen sich daraus für das Schaubild von f treffen?

$\overline{5}$

Aufgabe 5 (Auswahl II)

Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und F, wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Die Abbildung zeigt den Graphen G_F von F.



a Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^7 f(x)dx$. 2

b Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle 1. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung. 3

$\overline{5}$

Aufgabensatz I Teil A ohne Hilfsmittel

(entweder zwei Aufgaben 5 oder Aufgabe 6 auswählen)

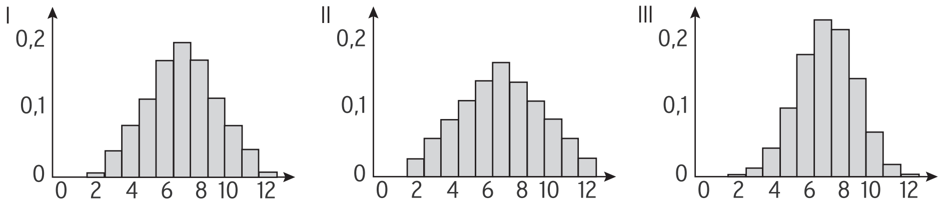
Aufgabe 5 (Auswahl III) **Punkte**

Gegeben sind die im Folgenden beschriebenen Zufallsgrößen X und Y:

- Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen. X gibt die dabei erzielte Augensumme an.
- Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Y gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.

a Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X = 4)$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = 10)$ übereinstimmt. 2

b Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und Y werden jeweils durch eines der folgenden Diagramme I, II und III dargestellt. Ordnen Sie X und Y jeweils dem passenden Diagramm zu und begründen Sie Ihre Zuordnung. 3



$\overline{5}$

Aufgabe 5 (Auswahl IV)

a Eine Laplace-Münze wird dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man zweimal Zahl und einmal Bild? 2

b Ein Würfel wird 20-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man zweimal die Augenzahl 3? Geben Sie eine Term an. 1

c Die Zufallsvariable X hat folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung: 2

x_i	− 3	− 1	0	5
$P(X = x_i)$	0,2	u	w	0,2

Der Erwartungswert von X beträgt 0,2.

Berechnen Sie u und w.

$\overline{5}$

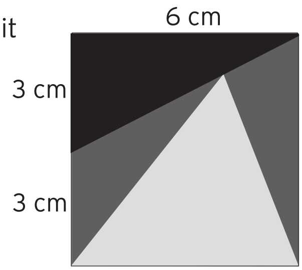
Aufgabensatz I Teil A ohne Hilfsmittel

(entweder zwei Aufgaben 5 oder Aufgabe 6 auswählen)

Diese Aufgabe 6 kann in Teil B (mit Hilfsmittel) übernommen und dort bearbeitet werden.

Aufgabe 6 Vektorgeometrie

In der nebenstehenden Abbildung ist ein Quadrat mit vier Dreiecken dargestellt. Die beiden dunkelgrauen Dreiecke (links und rechts) haben den gleichen Flächeninhalt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des hellgrauen Dreiecks.



$\overline{10}$

Aufgabensatz II Teil A ohne Hilfsmittel

(30 Punkte) **Lösungen Seite 59 - 63**

Aufgabe 1 Analysis **Punkte**

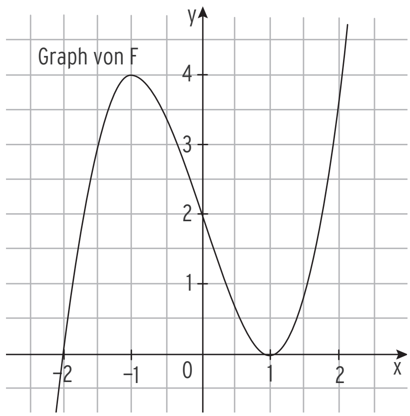
a Lösen Sie die Gleichung $3 - e^x = \frac{2}{e^x}$. 2

b Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x$ besitzt einen Wendepunkt. Zeigen Sie, dass $y = x - \frac{4}{3}$ eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt ist. 3

$\overline{5}$

Aufgabe 2 Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f.
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.



(1) $f(1) = F(1)$

(2) $\int_0^2 f(x)dx = 4$

(3) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.

(4) $f(F(-2)) > 0$

$\overline{5}$

3 Problemlöseaufgaben

Aufgaben Stochastik **10 Bewertungseinheiten**

Lösungen Seite 76 - 81

Aufgabe 1

Wenn früher in Russland eine junge Frau wissen wollte, ob sie im nächsten Jahr verheiratet sein werde, fragte sie das Grashalm-Orakel.
Sie nahm 4 Grashalme in die Faust, sodass sie oben und unten herausragten, und bat eine Freundin, alle Enden oberhalb der Faust irgendwie zufällig, aber paarweise, zusammenzuknoten.
Bei allen Enden unterhalb der Faust ebenso. Dann öffnet das Mädchen die Faust. Falls dabei ein einziger großer Ring aus Gras entsteht, bedeutet dies, dass die junge Frau im nächsten Jahr heiraten werde.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Situation ein einziger großer Ring aus Gras entsteht?

Aufgabe 2

Wie viele Möglichkeiten gibt es, bei einem beliebigen mxm-Gitter (m ist eine natürliche Zahl) entlang der Gitterlinien auf kürzestem Wege von einer Ecke zur diagonal gegenüberliegenden Ecke zu gelangen?
Zur Problemlösung legen Ihnen 3 Mitschüler*innen Lösungsansätze vor.
Begründen Sie, welcher Ansatz stimmt und weshalb die beide anderen Ansätze falsch sind.

Ansatz 1: $2m$ mögliche Wege
Ansatz 2: 2^{2m} mögliche Wege
Ansatz 3: $\binom{2m}{m}$ mögliche Wege

Aufgabe 3

In einer Urne liegen zwei Kugeln, eine ist weiß und eine ist blau. Lea zieht zufällig, also ohne hinzuschauen, eine Kugel aus der Urne.
Sie betrachtet deren Farbe und legt die gezogene Kugel zusammen mit einer weiteren, gleichfarbigen Kugel zurück in die Urne. Diese Schritte wiederholt sie immer wieder. Mit jedem Zug kommt so eine zusätzliche Kugel hinzu.
Sie führt dies genau 100 Mal durch, sodass sich am Ende 102 Kugeln in der Urne befinden.
Am Ende befinden sich 100 blaue und nur zwei weiße Kugeln. Es wurde also nur ein einziges Mal eine weiße Kugel gezogen.
Ist es wahrscheinlicher, dass dies während der ersten 50 Züge oder während der zweiten 50 Züge geschah? Oder liegt die gleiche Wahrscheinlichkeit vor? Begründen Sie.

Problemlöseaufgaben

Aufgaben Stochastik **10 Bewertungseinheiten**

Aufgabe 4

Die Personen A, B, C, D und E sitzen in einer Reihe. A und B möchten unbedingt nebeneinander sitzen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingt dies, wenn die Sitzplätze zufällig ausgelost werden?

Aufgabe 5

Fünf verschiedenfarbige Paar Socken liegen in der Waschmaschine.
Julien hängt, ohne hinzuschauen, eine Socke nach der anderen auf eine Leine.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle Socken nach Farben sortiert hängen.

Aufgabe 6

Sie möchten einen Brief von immenser Wichtigkeit an einen Bekannten abschicken. Der Post möchten Sie diesen Brief nicht anvertrauen.
Es bleiben Ihnen 2 Botendienste: Der Dienst A ist doppelt so teuer, aber auch doppelt so zuverlässig wie der Dienst B.
Geben Sie den Brief einem Boten aus Dienst A oder kopieren Sie den Brief und beauftragen zwei unabhängig voneinander reisende Boten aus Dienst B?
Begründen Sie Ihre Entscheidung rechnerisch.

Aufgabe 7

Gegeben ist ein Kreis. Auf diesem werden zufällig drei Punkte A, B und C ausgewählt und durch ein Dreieck miteinander verbunden.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Mittelpunkt des Kreises innerhalb des Dreiecks oder auf einer Dreiecksseite?

III Musterprüfungsaufgaben zur Abiturprüfung am beruflichen Gymnasium ab 2024

MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT
BADEN-WÜRTTEMBERG

ABITURPRÜFUNG AM BERUFLICHEN GYMNASIUM IM SCHULJAHR 2024/2025

	AUFGABEN FÜR DAS FACH
2.2.1	**Mathematik** **Erhöhtes Anforderungsniveau (eAN)**

Arbeitszeit	300 Minuten		
Bewertungs-einheiten (BE)	120		
Hilfsmittel	**Teil A:** Keine Hilfsmittel zugelassen. Die zugelassenen Hilfsmittel für die nachstehenden Aufgaben bekommt der Prüfling genau dann, wenn sie/er den Teil A unwiderruflich abgegeben hat. Dies darf spätestens 100 Minuten nach Beginn der Prüfung geschehen. **Teil B:** Eingeführte Merkhilfe, WTR ohne Einlegeblatt bzw. Handbuch		
Prüfungsteile und Aufgaben	**Teil A**	Analysis, Stochastik, Lineare Algebra Pflichtteil: (4 Aufgaben) (20 BE) Wahlteil: Aufgabengruppe 2 (4 Aufgaben) (10 BE) Problemlöseaufgabe (1 Aufgabe) (10 BE)	 S. 3 – 6 S. 6 – 10 S. 11
	Teil B	Analysis (40 BE) Stochastik (25 BE), Lineare Algebra (25 BE)	S. 12 – 17 S. 18 – 22 S. 23 – 26
Bemerkungen	In Teil A sind die Aufgaben 1 bis 4 alle zu bearbeiten. Aus den Aufgaben 5 sind **genau zwei** zu wählen. Alternativ kann der Prüfling die PLA-Aufgabe (Aufgabe 6) auswählen und diese in Teil B bearbeiten. In Teil B wählt die Fachlehrkraft aus jedem der drei Sachgebiete jeweils **genau eine** Aufgabe aus. Alle drei vorgelegten Aufgaben sind zu bearbeiten. Sie sind verpflichtet, jeden Aufgabensatz umgehend auf seine Vollständigkeit zu überprüfen und fehlende Seiten der Aufsicht führenden Lehrkraft anzuzeigen. Jede Aufgabe ist mit einem neuen Blatt zu beginnen. Bei Verstößen gegen die angemessene Darstellungsform kann ein Punkteabzug erfolgen.		

Musterprüfungsaufgabe 1 Mathematik eAN

Teil A ohne Hilfsmittel — Lösungen Seite 164 - 173

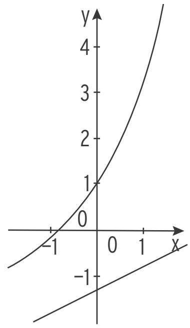
Pflichtteil Aufgabe 1

Analysis — Bewertungseinheiten (BE)

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x + \frac{1}{2}x$.

a Begründen Sie, dass der Graph von f und der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen. 2

b Für eine positive reelle Zahl c wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g_c mit $g_c(x) = \frac{1}{2}x - c$ betrachtet. 3
Die Abbildung zeigt die Graphen von f und g_c.
Die beiden Graphen schließen mit der y-Achse und der Gerade mit der Gleichung x = 1 eine Fläche mit dem Inhalt 3 ein.
Berechnen Sie c.



$\overline{5}$

Pflichtteil Aufgabe 2

Analysis

2 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = x^3 + x$; $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f ist K.

a Zeigen Sie, dass K keine waagrechte Tangente besitzt. 3
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an K mit der Steigung 1.

b Eine der folgenden Abbildungen zeigt das Schaubild einer Stammfunktion von f. Begründen Sie, welche dies ist. 2

Abbildung 1

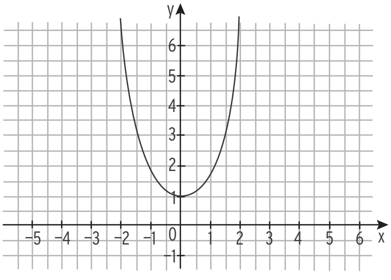
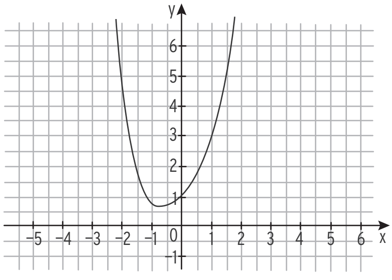


Abbildung 2



$\overline{5}$

Musterprüfungsaufgabe 1 Mathematik eAN

Teil A ohne Hilfsmittel

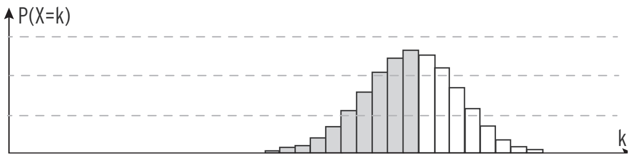
Pflichtteil Aufgabe 3

Stochastik **Bewertungseinheiten (BE)**

3 Gegeben sind die binomialverteilten Zufallsgrößen X und Y.
X hat die Parameter n = 40 und $p_X = 0{,}65$.

a Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit $P(X = 30)$ berechnet werden kann. 1

b Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. 2



Für einen Wert von k stellen die grau markierten Säulen die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ dar. Ermitteln Sie diesen Wert von k.

c Die Zufallsgröße Y hat ebenfalls den Parameter n = 40. Geben Sie alle Werte von p_Y mit $0 < p_Y < 1$ an, für die die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 10)$ größer ist als die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 30)$. 2

5

Pflichtteil Aufgabe 4

Vektorgeometrie

4 Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$
und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

a Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von g und h an. 2
Zeigen Sie, dass g und h senkrecht zueinander verlaufen.

b Die Ebene E enthält die Geraden g und h. 3
Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

5

Musterprüfungsaufgabe 1 Mathematik eAN

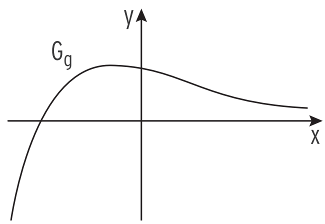
Teil A ohne Hilfsmittel

Wahlteil Aufgabe 5

Analysis **Bewertungseinheiten (BE)**

5 **(Auswahl I)**

Die Abbildung zeigt den Graphen G_g einer in $\mathbb{R}$ definierten, differenzierbaren Funktion g. Betrachtet wird eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f, für deren
erste Ableitungsfunktion $f'(x) = e^{g(x)}$ gilt.



a Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Extrempunkt hat. 2

b Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Wendepunkt hat. 3

$\overline{5}$

Wahlteil Aufgabe 5

Analysis

5 **(Auswahl II)**

Für ein festes $b > 0$ ist die Funktion p festgelegt durch 5
$p(x) = \frac{1}{4}x(x+2)(x-b)\,;\ x \in \mathbb{R}$.

Beurteilen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche der Aussagen falsch sind.

(1) Es gilt: $p(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$.

(2) Der Graph von p besitzt einen Hochpunkt mit positiver x-Koordinate.

(3) Es existiert genau ein Wert für b, so dass der Graph jeder Stammfunktion

von p symmetrisch zur y-Achse ist.

$\overline{5}$

Musterprüfungsaufgabe 1 Mathematik eAN

Teil A ohne Hilfsmittel

Wahlteil Aufgabe 5

Stochastik **Bewertungseinheiten (BE)**

5 **(Auswahl III)**
Die Zufallsgrößen X und Y können jeweils die Werte 3, 4 und 5 annehmen.

a Für die Zufallsgröße X gilt: $P(X = 3) = \frac{1}{3}$ und $P(X = 4) = \frac{1}{4}$. 2
Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

b Für die Zufallsgröße Y gilt: $P(Y = 3) = \frac{1}{3}$, $P(Y = 4) \geq \frac{1}{6}$ und $P(Y = 5) \geq \frac{1}{6}$. 3
Bestimmen Sie alle Werte, die für den Erwartungswert von Y infrage kommen.

$\overline{5}$

Wahlteil Aufgabe 5

Stochastik

5 **(Auswahl IV)**
Bei einem Zufallsexperiment können die Ereignisse A und B eintreten. 5
Die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, beträgt $\frac{1}{3}$.

Der Wert für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ ist $\frac{3}{5}$.

Der Wert für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(\overline{A})$ ist $\frac{5}{9}$.

Stellen Sie den Sachverhalt in zwei unterschiedlichen Baumdiagrammen dar, tragen Sie die gegebenen Wahrscheinlichkeiten ein und ermitteln Sie den Wert von P(B).

$\overline{5}$

Musterprüfungsaufgabe 1 Mathematik eAN

Teil A PLA

(entweder zwei Aufgaben 5 oder Aufgabe 6 auswählen)

Diese Aufgabe 6 kann in Teil B (mit Hilfsmittel) übernommen und dort

bearbeitet werden.

Wahlteil Aufgabe 6

Vektorgeometrie **Bewertungseinheiten (BE)**

6 Bearbeiten Sie die folgende Aufgabe unter Berücksichtigung der einzelnen Problemlöseschritte, dokumentieren und reflektieren Sie Ihre Vorgehensweise.

Durch Vertauschen (Permutation) der Koordinaten eines Punktes P(2|4|6) entstehen neue Punkte.

Formulieren Sie zwei Annahmen über die Lage der Punkte und untersuchen Sie, ob Ihre Annahmen zutreffen.

10

Musterprüfungsaufgabe 1 Mathematik eAN

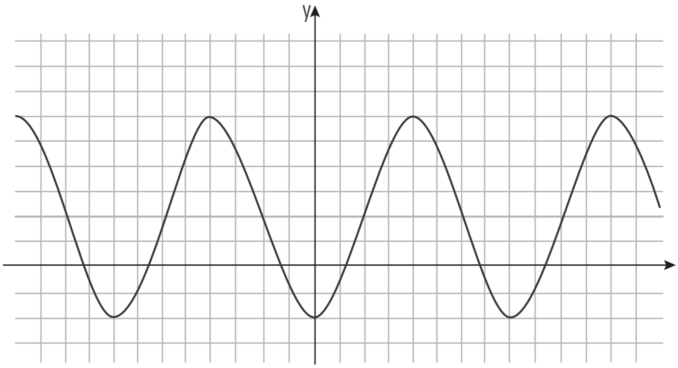
Teil B (mit Hilfsmittel)

Pflichtteil Aufgabe 1

Analysis **Bewertungseinheiten (BE)**

1.1 Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) + 1;\ x \in \mathbb{R}$.
Der Graph von g ist G.

a Die folgende Abbildung zeigt G. 3
Skalieren Sie die Koordinatenachsen.
Geben Sie ohne Rechnung die Koordinaten von zwei benachbarten Wendepunkten von G an.



b Beschreiben Sie durch welche Transformationen G aus dem Graphen von h mit $h(x) = \sin(x);\ x \in \mathbb{R}$ erzeugt wird. 3

1.2 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = -e^{\ln(2)x} + 2\ ;\ x \in \mathbb{R}$.
Der Graph von f ist K_f.
Gegeben ist zudem die Gerade g mit der Gleichung $y = -\frac{3}{2}x + 1$.

a Begründen Sie, dass für f die Darstellung $f(x) = -2^x + 2$, gilt und geben Sie die Nullstelle von f an. 2

b Zeichnen Sie K_f und g in ein Koordinatensystem mit $-2{,}1 \leq x \leq 2{,}5$ ein. 3

Musterprüfungsaufgabe 1 Mathematik eAN

Teil B (mit Hilfsmittel)

Pflichtteil Aufgabe 1

Analysis **Bewertungseinheiten (BE)**

c Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^2 (1 + \frac{3}{2}x - e^{\ln(2)x})dx$ 5

und interpretieren Sie das Integral im geometrischen Zusammenhang bzgl. K_f und g.

d Eine Gerade k geht durch den Punkt Q(0| 1) und einen weiteren Punkt von K_f. Ermitteln Sie alle Werte, die die Steigung von k annehmen kann. 2

e Für $0 \leq x \leq 1$ wird f durch eine quadratische Funktion p angenähert. 4
Der Übergang des Graphen von p zu K_f soll im Punkt (1|f(1)) stetig und im Punkt (0|f(0)) knickfrei sein.
Bestimmen Sie den Wert, um den sich die Funktionswerte von f und p an der Stelle x = 0,5 unterscheiden.

f Begründen Sie, dass f eine Umkehrfunktion u besitzt. Bestimmen Sie, mit einer Genauigkeit von zwei Nachkommastellen, die Koordinaten eines Punktes $(x \mid y) \in K_f$ mit $0 < x < 1$ der auch auf dem Schaubild von u liegt. 5

1.3 Die Kontur eines Glases wird durch die Funktion w mit $w(x)= \frac{16}{5}\sqrt{x} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{5}; 0 \leq x \leq 10$, modelliert. Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Zentimeter in der Realität.

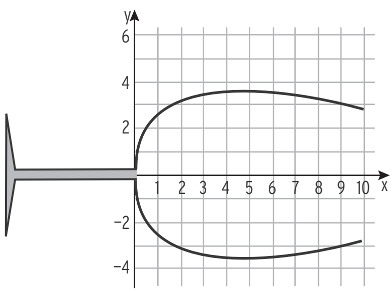


Abb.1: Modellierung des Glases mit w. Das Schaubild von w ist den oberen Rand des Querschnitts.

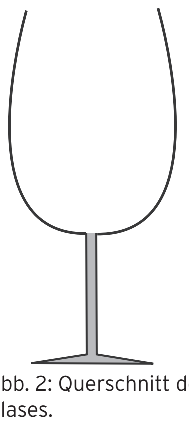


Abb. 2: Querschnitt des Glases.

Musterprüfungsaufgabe 1 Mathematik eAN

Teil B (mit Hilfsmittel)

Pflichtteil Aufgabe 1

Analysis **Bewertungseinheiten (BE)**

a Berechnen Sie den Durchmesser des Weinglases an dessen Öffnung sowie dessen Breite in einer Höhe von 4cm. 2

b Zeigen Sie, dass die maximale Breite des Glases etwa 7,23 cm beträgt. 4

Bei Füllung bis zum oberen Rand passen in das Glas 330 Milliliter.

c Begründen Sie, dass die folgende Aussage wahr ist: 2

„Ist H eine Stammfunktion von h mit $h(x) = (w(x))^2$ und $H(0) = 0$,

so gilt $H(10) = \frac{330}{\pi}$."

d Betrachten Sie die Integralfunktion I festgelegt durch 5

$I(b) = \pi \int_0^b (w(x))^2 dx;\ 0 \leq b \leq 10.$

Formulieren Sie im Sachkontext eine passende Frage, die durch das Lösen des folgenden Problems beantwortet werden kann:

„Finde einen Wert $b > 0$, so dass I an der Stelle b den Wert 200 hat!"

Begründen Sie, ohne einen Term für I zu berechnen, dass die entsprechende Stelle b größer als 5 ist.

40

Musterprüfungsaufgabe 1 Mathematik eAN

Teil B (mit Hilfsmittel)

Pflichtteil Aufgabe 2

Stochastik **Bewertungseinheiten (BE)**

2 In einer Stadt sind 60 % der Bürger mit der Arbeit des dortigen Bürgermeisters zufrieden; 30 % sind unzufrieden und die verbleibenden Bürger sind neutral.
Für eine Bürgersprechstunde lädt der Bürgermeister zufällig 10 Bürger ein.

a Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse: 4
A: Fünf oder sechs der eingeladenen Bürger sind mit der Arbeit des Bürgermeisters zufrieden.
B: Höchstens sechs der eingeladenen Bürger sind mit der Arbeit des Bürgermeisters zufrieden.

b Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der eingeladenen Bürger, die mit der Arbeit des Bürgermeisters zufrieden sind, um höchstens drei von der Anzahl abweicht, die man hierfür erwarten kann. 3

Zur nächsten Bürgersprechstunde lädt der Bürgermeister wiederum 10 Bürger ein. Diesmal aber gezielt, so dass sich unter diesen sechs zufriedene Bürger und drei unzufriedene Bürger befinden. Der verbleibende Bürger ist neutral. Im Sprechstundenzimmer stehen für die Bürger zehn Sitzplätze zur Verfügung. Die sechs Zufriedenen sitzen dabei auf den sechs Sitzplätzen rechts des Bürgermeistersessels, die drei Unzufriedenen auf drei Sitzplätzen links und der Neutrale auf dem verbleibenden Sitzplatz dazwischen.

c Erläutern Sie die Bedeutung des Terms $6! \cdot 3! \cdot 1!$ im Sachzusammenhang. 2

Für ein Projekt im Stochastik-Unterricht werden die Bürger von einer Abiturklasse in mehreren Umfragen unabhängig voneinander zufällig befragt.

d In einer dieser Umfragen wurden 366 Bürger befragt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der zufriedenen Bürger genau doppelt so groß ist wie der Rest, wird mit P bezeichnet. Prüfen Sie, ob P kleiner als 0,1 % ist. 4

Musterprüfungsaufgabe 1 Mathematik eAN

Teil B (mit Hilfsmittel)

Pflichtteil Aufgabe 2

Stochastik **Bewertungseinheiten (BE)**

e Eine andere Schülergruppe setzt sich zum Ziel, bei ihrer Umfrage höchstens 40 neutrale Bürger zu erhalten, dabei jedoch möglichst viele Bürger zu befragen. Sie möchten ihr Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % erreichen. 3
Bestimmen Sie die Anzahl von Bürgern, die sie hierzu höchstens befragen sollten.

f Bei der Umfrage einer weiteren Schülergruppe gaben 268 von 500 befragten Bürgern an, den Bürgermeister wieder zu wählen. 3
Beurteilen Sie, ob der Bürgermeister auf Grundlage dieser Befragung mit 95%-iger Sicherheit damit rechnen kann, bei der anstehenden Wahl die absolute Mehrheit der Stimmen zu erhalten, wenn man davon ausgeht, dass alle Bürger zur Wahl gehen.

Der Anteil der Frauen unter allen Bürgern beträgt in dieser Stadt 52 %, und es gibt dort 48 % männliche Bürger. Dabei sind

- 24 % der Bürger zufrieden und männlich;
- 30 % der unzufriedenen Bürger weiblich.

g Zeigen Sie, dass 40 % der zufriedenen Bürger männlich sind. 2

h Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind. 4

(1) „Unter allen neutralen Bürgern sind 30 % Männer.“

(2) „Etwa 13,5 % aller Frauen sind neutral.“

25

Musterprüfungsaufgabe 1 Mathematik eAN

Teil B (mit Hilfsmittel)

Pflichtteil Aufgabe 3

Lineare Algebra **Bewertungseinheiten (BE)**

3.1

In einem Museum gibt es einen quaderförmigen Raum, in dem ein Kunstwerk in Pyramidenform ausgestellt wird. Die Seitenflächen der Pyramide sind undurchsichtig. Im Modell liegt der Boden des Raums in einem Teil der x_1x_2-Ebene mit $x_2 \geq 0$. Die quadratische Grundfläche ABCD der Pyramide hat die Eckpunkte A(0|4|0),B(4|4|0), C(4|8|0) und D. Die Spitze S der Pyramide liegt vier Längeneinheiten senkrecht über dem Schnittpunkt der beiden Diagonalen der Grundfläche. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter (m).

a	Begründen Sie, dass die Spitze der Pyramide im Punkt S(2|6|4) liegt.	2
b	Zeichnen Sie die Pyramide in ein räumliches Koordinatensystem ein.	3
c	Bestimmen Sie den Winkel φ, den die Seitenkante AS der Pyramide mit dem Boden einschließt.	2
d	Die Seitenflächen der Pyramide werden mit einem Material beschichtet, das 15 Cent pro Quadratzentimeter (cm^2) kostet. Ermitteln Sie die Kosten dieser Beschichtung in Euro.	3

Im Punkt K(0|9|3) ist eine Überwachungskamera angebracht, wobei die Pyramide die Überwachung des gesamten Raumes verhindert. Die Ebene E enthält die drei-Punkte K, S und C.

e	Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform. (zur Kontrolle: $E: x_1 + x_2 + x_3 = 12$)	4
f	Ein punktförmiges Objekt bewegt sich vom Punkt P(5|4|2) aus in Richtung des Vektors $\overrightarrow{AC}$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, an dem das Objekt von der Kamera erstmalig erfasst werden kann.	4

Musterprüfungsaufgabe 1 Mathematik eAN

Teil B (mit Hilfsmittel)

Pflichtteil Aufgabe 3

Lineare Algebra **Bewertungseinheiten (BE)**

3.2

Gegeben sind die Matrizen $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a Die Matrix $D=\begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ist das Ergebnis einer Matrizenmultiplikation, 3

bei der A, B oder C verwendet wurden. Bestimmen Sie a und b.

b Für eine Folge von Matrizen $B_1, B_2, B_3, \ldots$ gilt: 4

$B_1 = B,\; B_2 = B \cdot B,\; B_3 = B \cdot B \cdot B \ldots$.

Berechnen Sie die Matrizen B_2 und B_3.

Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl n, so dass ein Koeffizient der Matrix B_n größer als 1000 ist.

$\overline{25}$

Lösungen Musterprüfungsaufgabe 1

Teil A ohne Hilfsmittel

Pflichtteil Aufgabe 1 Analysis

a Die Funktionsterme von f und g unterscheiden sich nur in den Summanden e^x bzw. -1. Es gilt $e^x \neq -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Variante: Gleichsetzen ergibt $e^x = -1$

Diese Gleichung hat keine Lösung, da gilt: $e^x > 0$

b $\int_0^1 (f(x) - g_c(x))\,dx = \int_0^1 (e^x + c)dx = [\,e^x + cx\,]_0^1 = e + c - 1$

$e + c - 1 = 3$ wenn $c = 4 - e$

Pflichtteil Aufgabe 2 Analysis

a $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$; $x \in \mathbb{R}$, also keine waagrechte Tangente.

$f'(x) = 1$ für $x = 0$; $f(0) = 0$

Gleichung der Tangente an K mit der Steigung 1: $y = x$

b Das Schaubild von f ist symmetrisch zum Koordinatenursprung und daher muss das Schaubild jeder Stammfunktion von f eine Symmetrie zur y-Achse aufweisen.

Nur Abbildung 1 kann somit das Schaubild einer Stammfunktion von f zeigen.

Pflichtteil Aufgabe 3 Stochastik

a $\binom{40}{30} \cdot 0{,}65^{30} \cdot 0{,}35^{10}$

b Der Erwartungswert von X ist $40 \cdot 0{,}65 = 26$.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nimmt ihr einziges Maximum also für $k = 26$ an. Der Abbildung ist zu entnehmen, dass dieser Wert von k mit dem gesuchten übereinstimmt.

c $p_Y < 0{,}5$

Lösungen Musterprüfungsaufgabe 1 (eAN)

Teil A ohne Hilfsmittel

Pflichtteil Aufgabe 4 Lineare Algebra

a Koordinaten des Schnittpunkts: $S(3|-3|3)$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

b Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht senkrecht zu den Richtungsvektoren von g und h.

Damit hat die Gleichung von E die Form $x_2 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Es gilt $P(3|-3|3) \in E$ für $c = -3$

Wahlteil Aufgabe 5 Analysis (Auswahl I)

a Wegen $f'(x) = e^{g(x)} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ hat der Graph von f keinen Extrempunkt.

b $f''(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

An der Stelle, an der g ein Maximum annimmt, ändert sich das Vorzeichen von $g'(x)$. Wegen $e^{g(x)} > 0$ ändert sich damit an dieser Stelle auch das Vorzeichen von $f''(x)$, d. h. der Graph von f hat einen Wendepunkt.

Wahlteil Aufgabe 5 Analysis (Auswahl II)

(1) Die Aussage ist wahr. p ist ein Polynom ungeraden Grades mit positivem Leitkoeffizient.

(2) Die Aussage ist falsch. Da p ein kubisches Polynom mit den drei einfachen Nullstellen -2, 0 und b ist, folgt aus dem Verhalten von dessen Graphen für große x, dass die x-Koordinate des eindeutigen Hochpunkts dieses Graphen zwischen -2 und 0 liegt.

(3) Die Aussage ist wahr. Für jede Stammfunktion P von p, die symmetrisch zur y-Achse ist, folgt, dass deren Ableitung $P' = p$ symmetrisch zum Ursprung ist.

Da p ein kubisches Polynom ist, müssen für dieses alle Koeffizienten, die zu den Potenzfunktionen geraden Grades gehören, verschwinden.

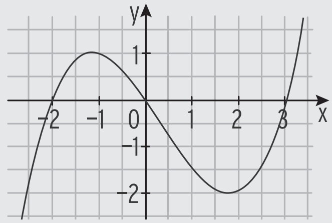
Wegen $(x+2)(x-b) = x^2+(2-b)x-2b$ folgt, dass dies für $b = 2$ der Fall ist.

Lösungen Musterprüfungsaufgabe 1 (eAN)

Teil A ohne Hilfsmittel

Wahlteil Aufgabe 5 Analysis (Auswahl II)

Bemerkung: Zur Orientierung kann eine Skizze des Schaubilds von p dienen, z.B. für b = 3 (siehe Abbildung).



Wahlteil Aufgabe 5 Stochastik (Auswahl III)

a $\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot 5 = \frac{49}{12}$

b Mit $\frac{1}{6} \leq P(Y = 5) \leq \frac{3}{6}$ ergibt sich $\frac{23}{6} \leq E(Y) \leq \frac{25}{6}$

Wahlteil Aufgabe 5 Stochastik (Auswahl IV)

$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

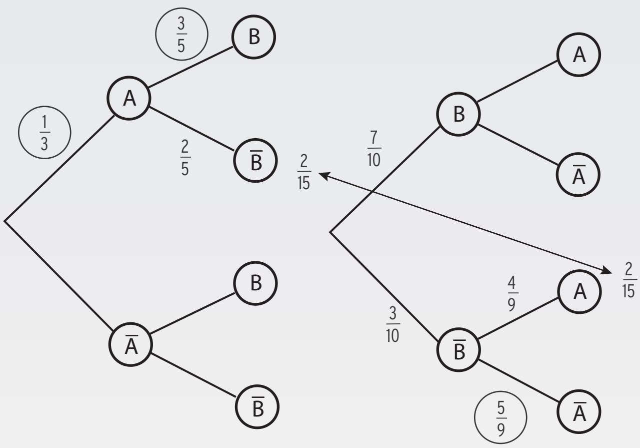
$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P_A(\overline{B}) = \frac{2}{15}$

$P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{5}{9}$

$P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 1 - P_{\overline{B}}(A) = \frac{4}{9}$

$P(\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P_{\overline{B}}(A)} = \dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{10}$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$



Lösungen Musterprüfungsaufgabe 1 (eAN)

Teil A ohne Hilfsmittel

Wahlteil Aufgabe 6 Problemlöseaufgabe (PLA)

Analyse: Problem verbalisieren

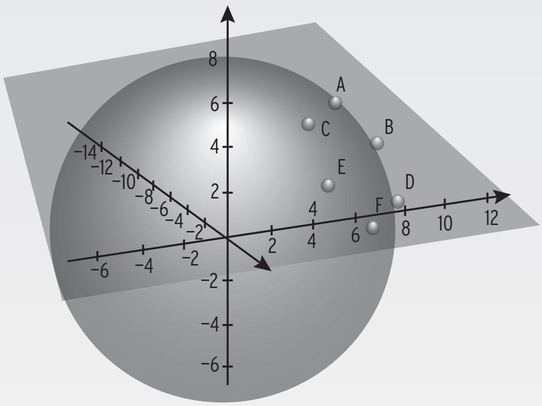
• Ordnen der Informationen z.B.mithilfe von Skizzen, Modellen, Tabellen •

Die sechs Punkte werden explizit aufgeführt.

• Ggf. die sechs Punkte in ein passendes Koordinatensystem einzeichnen

• Zielsetzung: Entwicklung von zwei Annahmen über die gegenseitige Lage der sechs Punkte

Durchführung:
- „Einlassen" auf das Problem, d.h. ausdauernde Überwindung der Hindernisse
- Untersuchung von Beispielen/Spezialfällen
- Vermutungen äußern
- (allgemeine) Strukturen finden
- Lösungsstrategie entwickeln und umsetzen
- Vermutungen testen/überprüfen
- evtl. Vermutungen ergänzen/anpassen
- evtl. Lösungsstrategien korrigieren
- Sachliche Korrektheit
- Verbindung zu passendem Vorwissen/passenden mathematischen Kompetenzen



Bemerkung:
Es wird laut Aufgabenstellung (nur) verlangt, zwei Annahmen über die gegenseitige Lage der sechs Punkte zu treffen und zu überprüfen, ob diese zutreffen.
Daher müssen es nicht zwei richtige Annahmen sein.

Lösungen Musterprüfungsaufgabe 1 (eAN)

Teil A ohne Hilfsmittel

Wahlteil Aufgabe 6 Problemlöseaufgabe (PLA)

Zwei **Vermutungen** werden aufgeführt:
- z.B. die richtige Vermutung, dass die
Punkte alle denselben Abstand zum Ursprung haben, mit
$r = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{56} = 7{,}48$
- z.B. die richtige Vermutung, dass bestimmte Paare von Punkte denselben Abstand zueinander haben
- z.B. die richtige Vermutung, dass alle Punkte in einer Ebene liegen
oder
- z.B. die falsche Vermutung, dass alle Punkte auf einer Geraden liegen
Die aufgeführten Vermutungen werden jeweils überprüft.
Rückblick:
• Lösung angeben und auf Plausibilität überprüfen/reflektieren

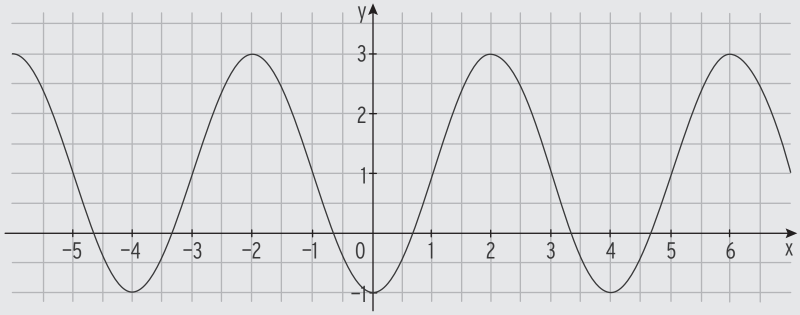
Aus gewonnenen Erkenntnissen werden weitere (vertiefende) Vermutungen geäußert, z.B. die sechs Punkte liegen
- auf einer Kugel
- in einer Ebene
- auf einem regelmäßigen Sechseck
- auf einem Kreis um Mittelpunkt M(4|4|4)
Ggf. wird untersucht, ob diese Erkenntnisse für andere/beliebige Koordinaten eines Punktes gelten
Bemerkung: Dabei beachten:
• übersichtliche & strukturierte Darstellung
• verständlich & nachvollziehbar

Lösungen Musterprüfungsaufgabe 1 (eAN)

Teil B mit Hilfsmittel - Aufgabe 1

Analysis

1.1 a



Zwei benachbarte Wendepunkte sind zum Beispiel $W_1(1|1)$ und $W_2(3|1)$.

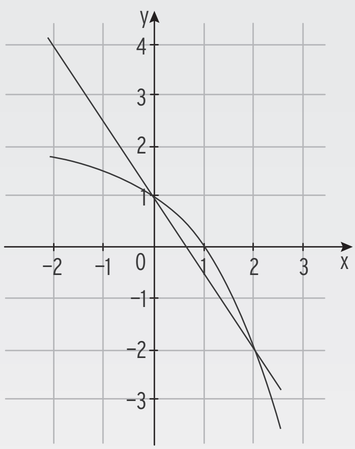
b Transformationen zur Erzeugung von G:

- Streckung in y-Richtung mit Faktor 2
- Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{2}{\pi}$
- Verschiebung in y-Richtung um 1 Längeneinheit nach oben
- Verschiebung in x-Richtung um eine Längeneinheit nach rechts

1.2 a Es gilt: $e^{\ln(2)x} = (e^{\ln(2)})^x = 2^x;\ x \in \mathbb{R}$.

Nullstelle: $x = 1$

b Zeichnung



c $\int_0^2 (1 + \frac{3}{2}x - e^{\ln(2)\cdot x})dx$

$= [x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{e^{\ln(2)\cdot x}}{\ln(2)}]_0^2$

$= 5 - \frac{3}{\ln(2)} = 0{,}6719...$

Das Integral liefert den Inhalt der von K_f und g umschlossenen Fläche,

denn g schneidet K_f nur in $(0|1)$ und $(2|-2)$ sowie $g(1) < 0 = f(1)$.

d Ausgehend von g zeigt eine geometrische Überlegung:

$m<0 \wedge m \neq -\ln(2) = f'(0)$.

Lösungen Musterprüfungsaufgabe 1 (eAN)

Teil B mit Hilfsmittel - Aufgabe 1 Analysis

e Ansatz zur Berechnung von p mit $p(x) = ax^2 + bx+c$:

$p(0) = 1 \wedge p'(0) = -\ln(2) \wedge p(1) = 0.$

$p(x) = (\ln(2) - 1)x^2 - \ln(2)x + 1$

Daher $|p(0{,}5) - f(0{,}5)| = |\sqrt{2} - \frac{1}{4}\ln(2) - \frac{5}{4}| = 0{,}00907 < 0{,}02$ $\quad (e^{0{,}5\ln(2)} = \sqrt{2})$

f Wegen $f'(x) = -\ln(2)\cdot e^{\ln(2)\cdot x} < 0;\ x \in \mathbb{R}$, ist f streng monoton und damit existiert eine Umkehrfunktion u von f. Der Graph von u sei K_u.

Ansatz für $0 < x < 1$: $f(x) = x \Leftrightarrow -e^{\ln(2)\cdot x} + 2 = x$.

Intervallschachtelung (WTR) liefert $(x|y) \in K_f \cap K_u$ mit $x = 0{,}54...$.

1.3a $2\cdot w(10) = \frac{32}{5}\sqrt{10} - 15 + \frac{2}{5} = 5{,}6385...$

Der innere Durchmesser des Glases an dessen Öffnung ist etwa 5,64 cm.

$2\cdot w(4) = \frac{64}{5} - 6 + \frac{2}{5} = \frac{36}{5} = 7{,}2$

Die Breite des Glases in einer Höhe von 4 cm ist 7,2 cm.

b $w'(x) = \frac{8}{5\sqrt{x}} - \frac{3}{4};\ 0 < x \leq 10.$ $\qquad w'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1024}{225}$

Der Graph von w in Abb. 1 zeigt ein eindeutiges Maximum. Wegen

$2\cdot w(\frac{1024}{225}) = \frac{542}{75}$ ist die maximale Breite des Glases etwa 7,23 cm.

Bemerkung: Hinreichendes Kriterium nicht erforderlich, da durch den Graph bereits erkennbar vorgegeben. Es reicht somit der Verweis auf die Abbildung.

c 1 ml entspricht 1 cm^3. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrech nung folgt

$330 = \pi\int_0^{10} w(x)^2dx = \pi\cdot(H(10) - H(0)) = \pi\cdot H(10)$ und daher $H(10) = \frac{330}{\pi}$

d In welcher Höhe b muss der Eichstrich am Glas sein, damit beim Einfüllen bis dorthin genau ein fünftel Liter Getränk ins Glas passt?

Es gilt die Abschätzung: $I(5) \leq \pi\cdot 3^2\cdot 1 + \pi\cdot(\frac{7{,}23}{2})^2\cdot 4 \approx 192{,}49 < 200.$

Die Höhe 5 cm des Eichstrichs entspricht einem Volumen das kleiner als ein fünftel Liter ist, und daher muss $b > 5$ sein.

Bemerkung: I ist eine Integralfunktion. Andere Abschätzungen können zu grob sein, um das gewünschte Resultat zu erzielen.