Bohner | Ott | Deusch | Rosner

Arbeitsheft
Mathematik – Jahrgangsstufen 1 und 2
Erhöhtes Anforderungsniveau

Berufliches Gymnasium
Baden-Württemberg

Analysis
Vektorielle Geometrie
Stochastik
Matrizen – Grundlagen

Merkur Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Ronald Deusch
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Umschlag: © frhuynk - Fotolia.com

* * * * * * * * * *

1. Auflage 2022
© 2022 by Merkur Verlag Rinteln

Gesamtherstellung:
Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr: 2338-01
ISBN 978-3-8120-2338-2

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Arbeitsheft dient zur Aufbereitung, Wiederholung und Festigung des im Schülerbuch behandelten Lernstoffs. Es soll parallel zum Schülerbuch verwendet werden. Die begleitende Unterstützung durch die Lehrkraft ist gewünscht und sehr sinnvoll.
Das Arbeitsheft enthält ergänzende Aufgaben zur Wiederholung und ermöglicht eine Lernkontrolle in Eigenverantwortung. Das im Vergleich zum Schülerbuch veränderte Format und die Form der Darstellung wirken motivierend auf Schüler/innen.
Einige Aufgaben beinhalten fächerübergreifende Aspekte in Handlungssituationen.
Das Arbeitsheft hilft, das Erlernte zu festigen und damit eine gute Grundlage für die Jahrgangsstufe und das schriftliche Abitur zu schaffen.
Die Lösungen sind eingelegt und damit herausnehmbar.

Videos dienen der Veranschaulichung von Problemen und Erläuterung von Lösungswegen. Sie unterstützen die Lernenden beim Entdecken und Verstehen mathematischer Zusammenhänge. Damit ist das Arbeitsheft zum Fernlernen und Homeschooling bestens geeignet.

I Analysis

1 Trigonometrische Funktionen und zugehörige Gleichungen

Definition der Winkelfunktionen

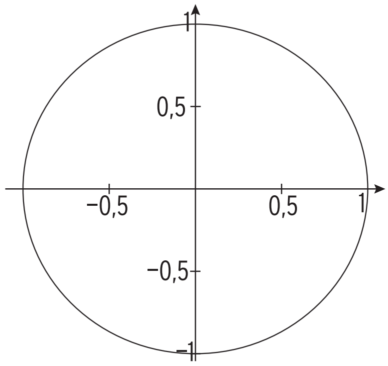
mvurl.de/n4df

1 Zeichnen Sie den Winkel α ein und bestimmen Sie $\sin(\alpha)$ bzw. $\cos(\alpha)$.

a) $\alpha = 70°$

$\sin(\alpha) \approx$

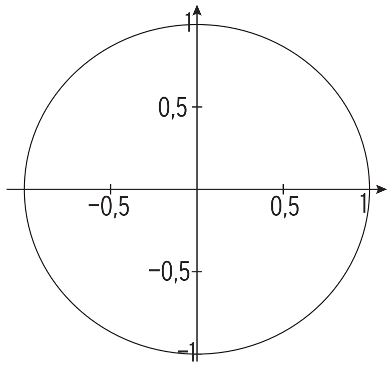
$\cos(\alpha) \approx$



b) $\alpha = 120°$

$\sin(\alpha) \approx$

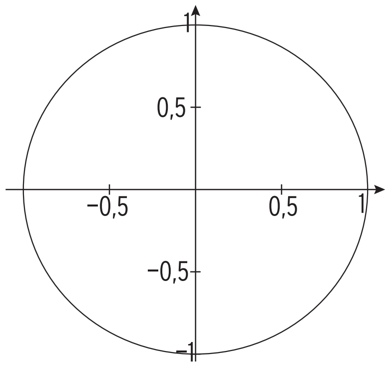
$\cos(\alpha) \approx$



c) $\alpha = 200°$

$\sin(\alpha) \approx$

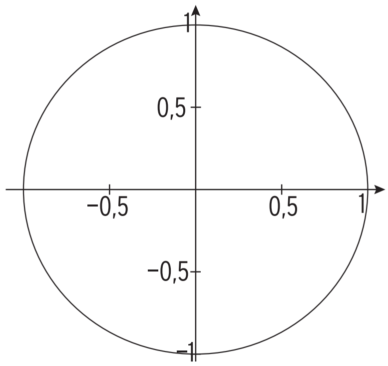
$\cos(\alpha) \approx$



d) $\alpha = 280°$

$\sin(\alpha) \approx$

$\cos(\alpha) \approx$

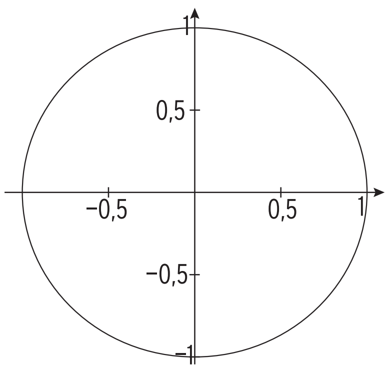


2 Zeichnen Sie den Winkel x (im Bogenmaß) ein und bestimmen Sie sin(x) bzw. cos(x).

a) $x = 0{,}7$

$\sin(0{,}7) \approx$

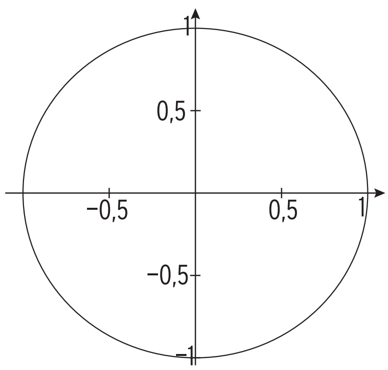
$\cos(0{,}7) \approx$



b) $x = \frac{\pi}{2}$

$\sin(\frac{\pi}{2}) =$

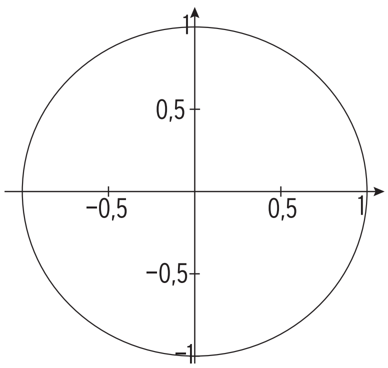
$\cos(\frac{\pi}{2}) =$



c) $x = 3{,}9$

$\sin(3{,}9) \approx$

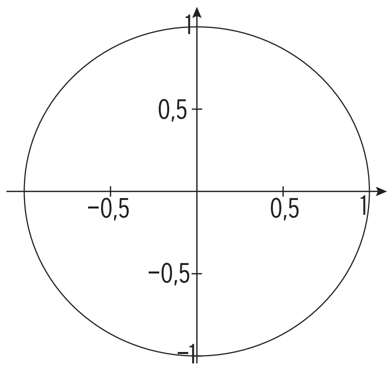
$\cos(3{,}9) \approx$



d) $x = 2\pi$

$\sin(2\pi) =$

$\cos(2\pi) =$



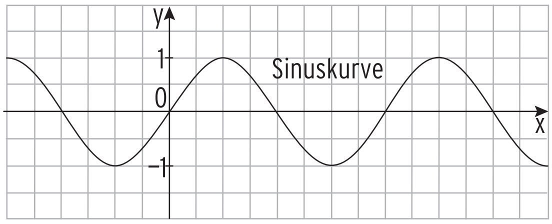
3 Vervollständigen Sie die Tabelle mithilfe eines Hilfsmittels.

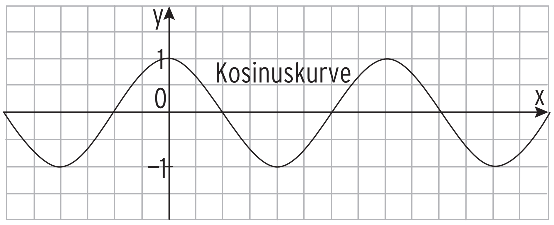
α	x	sin(x)	cos(x)
60°	$\frac{1}{3}\pi$	0,866	0,5
20°			
90°			
120°			

α	x	sin(x)	cos(x)
	1		
	$\frac{1}{6}\pi$		
	2,5		
	5		

4 Vervollständigen Sie die Tabelle. Skalieren Sie die x-Achse.

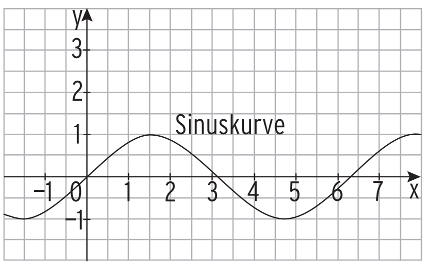
x	sin(x)	cos(x)
0	0	1
2π		
π		
$\frac{1}{2}\pi$		
$-\frac{1}{2}\pi$		
$-\frac{3}{2}\pi$		
$\frac{5}{2}\pi$		
7π		
12π		



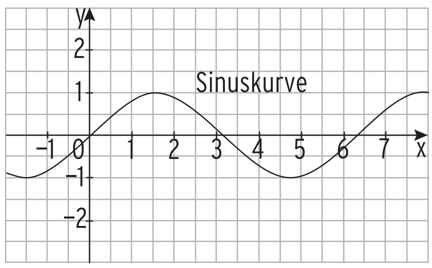


5 Zeichnen Sie den Graphen von f ein.

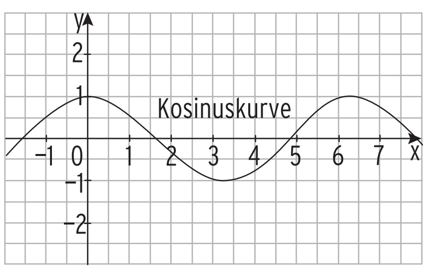
a) $f(x) = 2\sin(x) + 1$



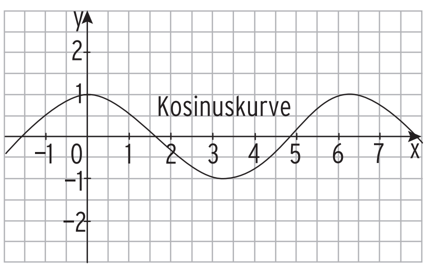
b) $f(x) = -1{,}5\sin(x)$



c) $f(x) = 0{,}5\cos(x)$



d) $f(x) = -\cos(x) - 1$



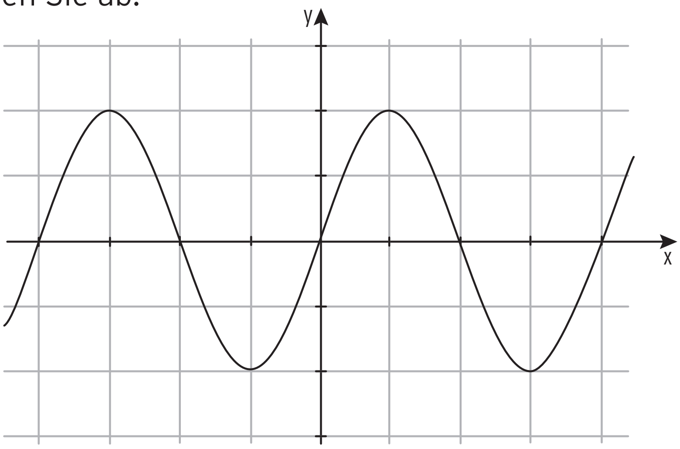
6 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Sinusfunktion f mit f(x) = sin(x).
Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:

$\sin(2\pi) =$

$\sin(-\frac{3}{2}\pi) =$

$\sin(\frac{5}{2}\pi) =$

$\sin(-\pi) =$



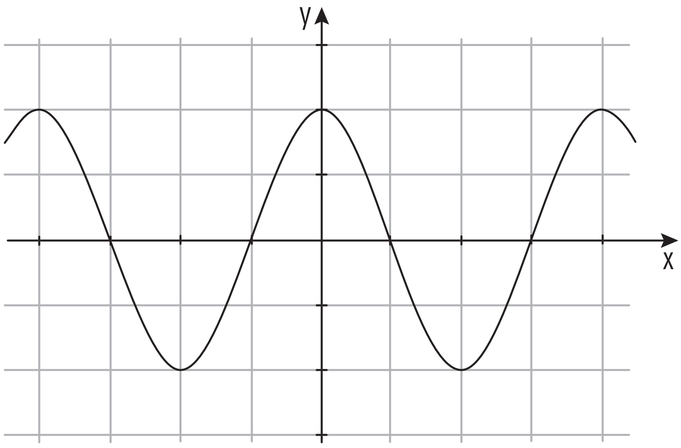
7 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Kosinusfunktion f mit f(x) = cos(x).
Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:

$\cos(2\pi) =$

$\cos(-\frac{3}{2}\pi) =$

$\cos(\frac{1}{2}\pi) =$

$\cos(-\pi) =$



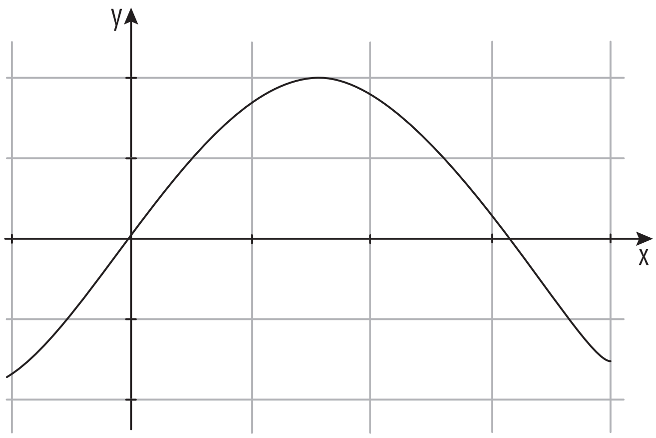
8 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Sinusfunktion f mit f(x) = sin(x).
Beschriften Sie die Achsen und lesen Sie ab:

$\sin(2) =$

$\sin(\frac{1}{2}\pi) =$

$\sin(\frac{1}{4}\pi) =$

$\sin(-\frac{1}{2}) =$



Transformationen

mvurl.de/xmkq

1 Geben Sie die Amplitude a und die Periode p der Funktion f an.

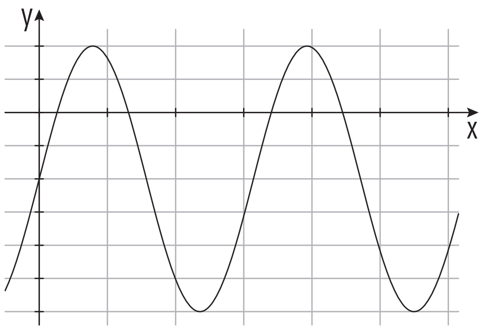
Funktionsterm	a	p	Funktionsterm	a	p
$f(x) = 0{,}25\sin(\pi x)$	$a = 0{,}25$	$\frac{2\pi}{\pi} = 2$	$f(x) = -5\cos(\frac{\pi}{2}x)$		
$f(x) = 6\cos(5x)$			$f(x) = 1{,}6\sin(3x)$		
$f(x) = -4\sin(\frac{x}{3})$			$f(x) = -\frac{4}{3}\sin(\frac{x}{2})$		
$f(x) = 3\cos(2x)$			$f(x) = \cos(x) + 1$		

2 Geben Sie den Funktionsterm einer Sinusfunktion bzw. einer Kosinusfunktion mit der Periode p und der Amplitude a an.

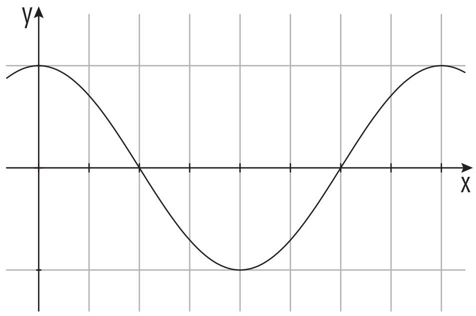
a	p	Sinusfunktion	a	p	Kosinusfunktion
$a = 2$	$p = 2$	$f(x) = 2\sin(\pi x)$	$a = 6$	$p = 4\pi$	$f(x) = 6\cos(\frac{x}{2})$
$a = \pi$	$p = 1$		$a = 4$	$p = 4$	
$a = 0{,}5$	$p = \frac{2}{3}\pi$		$a = \frac{5}{2}$	$p = \frac{3}{4}$	

3 Beschriften Sie die Koordinatenachsen.

$f(x) = 4\sin(x) - 2$



$f(x) = 0{,}5\cos(0{,}5x)$



4 Geben Sie den zugehörigen Funktionsterm an. Der Graph von f mit $f(x) = \sin(x)$ wird

a) um 2 nach links und um 0,5 nach unten verschoben. g(x) = ____________

b) an der x-Achse gespiegelt und dann um 1 nach oben verschoben. g(x) = ____________

c) mit Faktor 3 in y-Richtung gestreckt und dann um 3 nach links verschoben. g(x) = ____________

d) mit Faktor 2 in x-Richtung gestreckt und dann um 3 nach unten verschoben. g(x) = ____________

5 Ergänzen Sie die folgenden Sätze.

a) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 0{,}5\sin(x) - 1$ entsteht aus der Sinuskurve ($y = \sin(x)$) durch Streckung mit dem Faktor____ in __-Richtung und durch Verschiebung um ____ nach __________.

b) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -3\cos(2x) + 4$ entsteht aus der Kosinuskurve ($y = \cos(x)$) durch Spiegelung an der __-Achse, durch Streckung mit dem Faktor ____in __-Richtung, Streckung mit dem Faktor ___in __-Richtung und durch Verschiebung um __ nach _____.

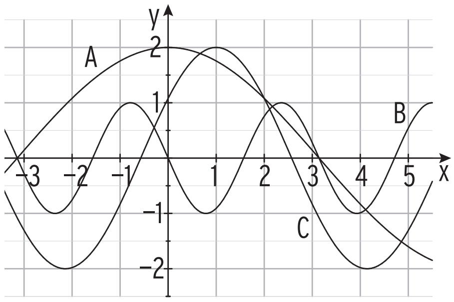
c) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2\cos(3(x + 4)) + 5$ entsteht aus der Kurve mit $y = \cos(x)$ durch Streckung mit dem Faktor____ in ____-Richtung, durch Streckung mit dem Faktor ____in ____-Richtung, durch Verschiebung um ____ nach____und durch Verschiebung um ___ nach _________.

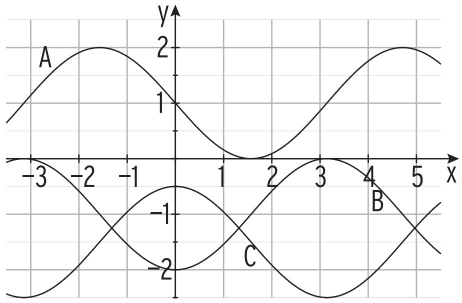
d) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = \sin(0{,}5x - 0{,}5)$ entsteht aus der Kurve mit $y = \sin(x)$ durch Streckung mit dem Faktor ____in____-Richtung und durch Verschiebung um____ nach _________.

6 Wie geht der Graph von g aus dem Graphen von f mit $f(x) = \sin(x)$ hervor?

$g(x) = 2\sin(x) + 1$	
$g(x) = -3\sin(4x) + 2$	
$g(x) = 0{,}25\sin(x - 3) + 5$	
$g(x) = 2{,}5\sin(2x - 1) - 3$	
$g(x) = \cos(x) - 1$	

7 Ordnen Sie zu.





__: $f(x) = 2\cos(0{,}5x)$ __: $g(x) = -\sin(2x)$

__: $h(x) = 2\cos(x - 1)$

__: $f(x) = -\cos(x) - 1$; __: $g(x) = \cos(x) - 1{,}5$

__: $h(x) = -\sin(x) + 1$

8 Sind die Aussagen falsch (f) oder wahr (w)?

a)	Durch eine Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{3}{2}$ vergrößert sich die Amplitude einer Funktion.	☐ w ☐ f
b)	Durch eine Streckung in x-Richtung mit Faktor 2 vergrößert sich die Periodenlänge einer Funktion.	☐ w ☐ f
c)	Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 3\sin(3x)$ geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung mit Faktor 3 in x- und y-Richtung hervor.	☐ w ☐ f
d)	Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = \sin(2x+2)$ geht aus der Sinuskurve durch Streckung in x-Richtung und Verschiebung um eine Einheit nach links vor.	☐ w ☐ f
e)	f mit $f(x) = 2\sin(x) + 1$ hat den Wertebereich $[-2; 2]$.	☐ w ☐ f
f)	Die Funktion f mit $f(x) = a\sin(x) + 4$ hat für $a > 0$ den Wertebereich $[4 - a; 4 + a]$.	☐ w ☐ f

9 Die Abbildungen zeigen Ausschnitte von Schaubildern.
Welche der Schaubilder gehören zu periodischen Funktionen?
Entscheiden und begründen Sie.

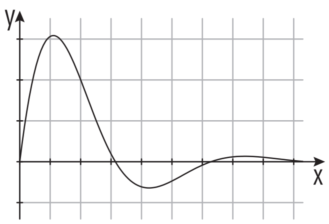


Abb. 1

☐ periodisch

☐ nicht periodisch

Begründung:

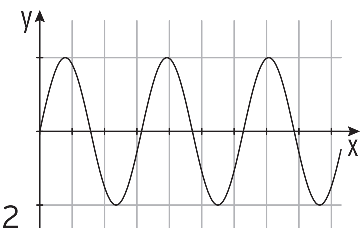


Abb. 2

☐ periodisch

☐ nicht periodisch

Begründung:

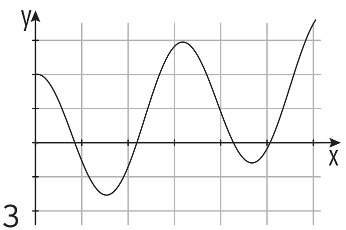


Abb. 3

☐ periodisch

☐ nicht periodisch

Begründung:

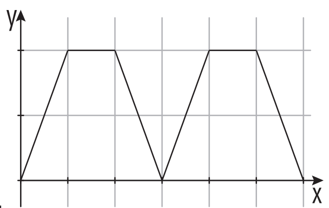


Abb. 4

☐ periodisch

☐ nicht periodisch

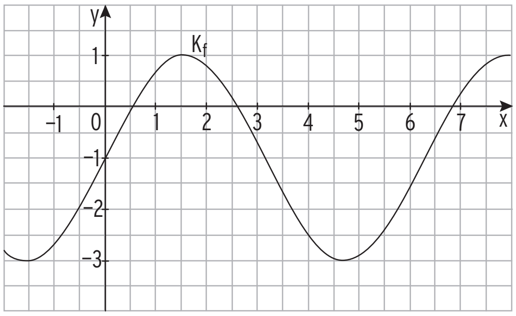
Begründung:

mvurl.de/fd9k

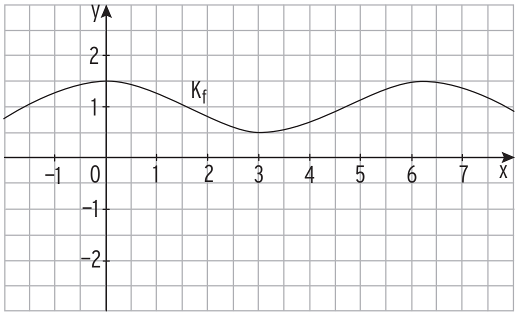
Aufstellen von Funktionstermen

1 Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm der Form f(x) = asin(x) + c
bzw. f(x) = acos(x) + c.

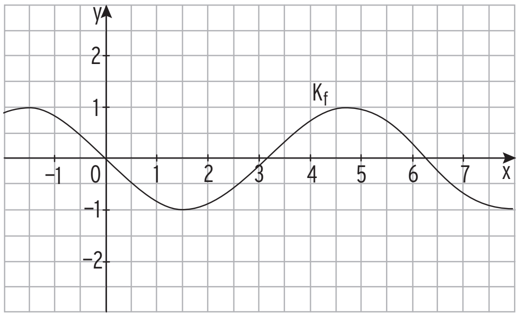
a) f(x) = ______________________



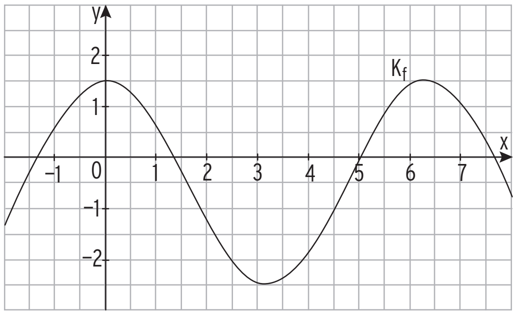
b) f(x) = ______________________



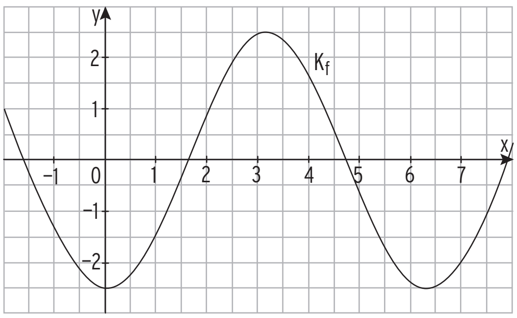
c) f(x) = ______________________



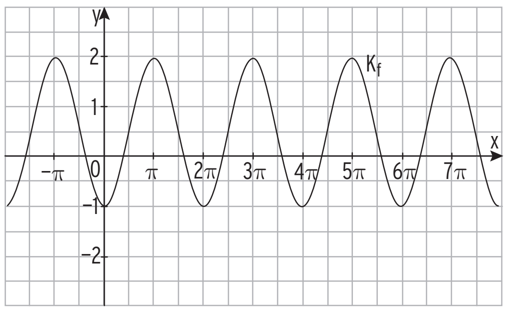
d) f(x) = ______________________



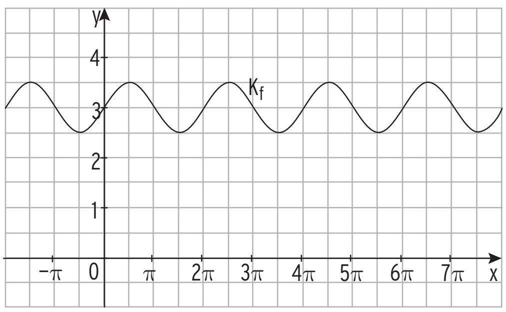
e) f(x) = ______________________



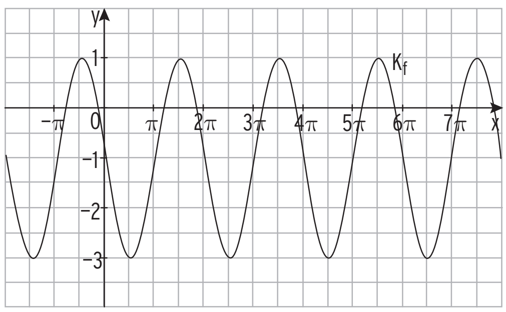
f) f(x) = ______________________



g) f(x) = ______________________

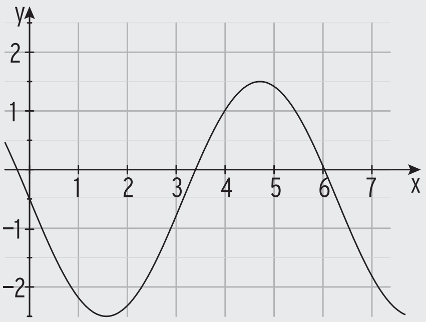


h) f(x) = ______________________



2 Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm.

$g(x) = -2\sin(x) - 0{,}5$



$g(x) = a\sin(bx) + c$

Durch Ablesen:

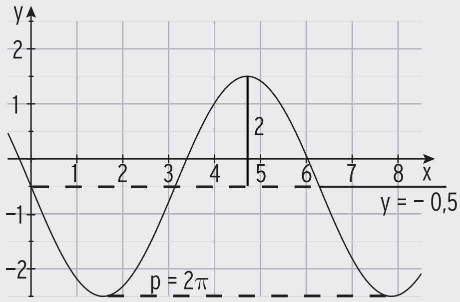
$c = -0{,}5$

$|a| = 2$

$a = -2$

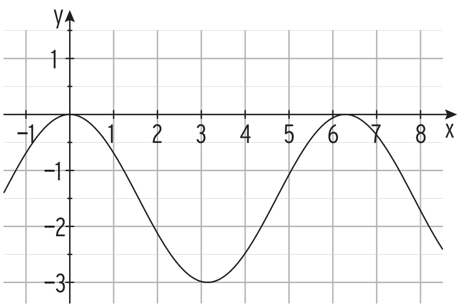
$p = 2\pi$;

$b = \frac{2\pi}{p} = 1$

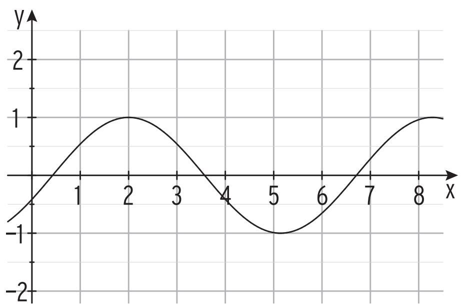


$g(x) = -2\sin(x) - 0{,}5$

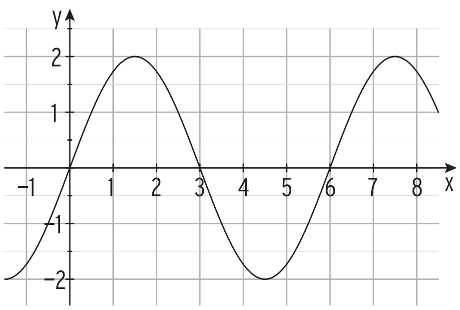
g(x) = ________________



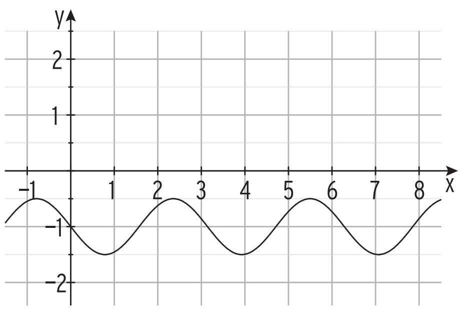
g(x) = ________________



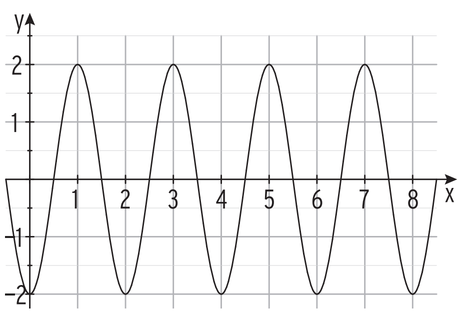
g(x) = ________________



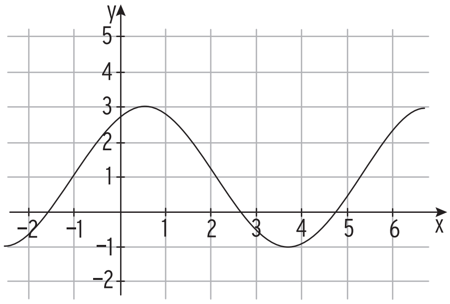
g(x) = ________________



g(x) = ________________

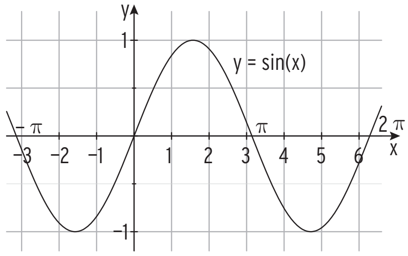


g(x) = ________________



Trigonometrische Gleichungen

1 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$. Lesen Sie alle Lösungen der Gleichungen im Intervall $[-\pi; 2\pi]$ aus der Zeichnung ab.



a) $\sin(x) = -1 \Rightarrow x =$

b) $\sin(x) = 0{,}5 \Rightarrow x =$

c) $\sin(x) = -0{,}5 \Rightarrow x =$

2 Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

$2\sin(x) = \sqrt{2}$	$\cos(x) = 0{,}5$	$2\sin(x) = -1$	$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ Sinuskurve: $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{3\pi}{4}$	WTR: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $x_2 = -\frac{\pi}{3}$ Periode: 2π Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ $x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$		

3 Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

$2\sin(2x) = \sqrt{2}$	$\cos(\frac{x}{2}) = 0{,}5$	$2\sin(\frac{\pi}{3}x) = -1$	$\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{4}$ Sinus(z)-Kurve: $z_2 = \frac{3\pi}{4}$ Mit $z = 2x$: $x_1 = \frac{\pi}{8}$; $x_2 = \frac{3\pi}{8}$ Periode: $\frac{2\pi}{2} = \pi$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{8}$; $x_2 = \frac{3\pi}{8}$ $x_3 = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$ $x_4 = \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11\pi}{8}$	$\cos(z) = 0{,}5$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $z_2 = -\frac{\pi}{3}$ Mit $z = \frac{x}{2}$: $x_{1\|2} = \pm\frac{2\pi}{3}$ Periode: $\frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$ Lösung: $x_1 = \frac{2\pi}{3}$		

4 Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall [0; 2π] an.

$\sin(x) = -0{,}5\sqrt{2}$	$\sin(\pi x) = 0{,}5\sqrt{3}$	$\sin(\frac{\pi}{4}x) = 0$

$\cos(\frac{\pi}{3}x) = 0{,}5\sqrt{3}$	$\cos(\frac{x}{3}) = -0{,}5$	$\cos(2x) = 0$

5 Geben Sie drei Lösungen an.

$3\sin(x + 2) = 1$	$\cos(\pi(x - 1)) = 0{,}5$	$5\sin(\frac{\pi}{4}x) + 1 = 0$

6 Berechnen Sie alle Lösungen für $x \in \mathbb{R}$.

$\cos(2x + 1) = 0{,}5\sqrt{3}$	$2\sin(4x - 2) = -1$	$6\sin(0{,}5(x - 3)) = 0$

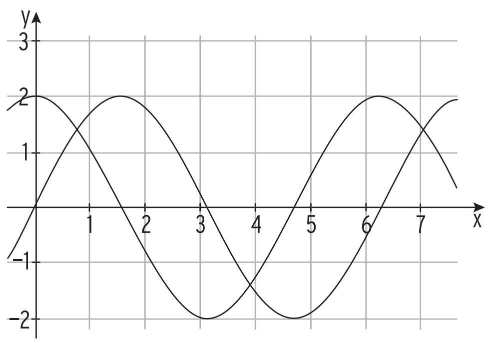
Gemeinsame Punkte

1 Lösen Sie die Gleichung $f(x) = 0$, indem Sie drei Lösungen angeben.

$f(x) = 3\sin(3x)$	$f(x) = -\cos(x-1)$	$f(x) = 1 + \sin(\frac{1}{2}x)$

2 Begründen Sie: Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - 1;\ x \in \mathbb{R}$ hat keine Nullstelle.

3 Die abgebildeten Graphen der Funktionen f und g schneiden sich in $x = \frac{\pi}{4}$.
Bestimmen Sie f(x) und g(x).
Geben Sie weitere Schnittstellen an.



4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2} \cdot (x-1)) + 1;\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

a) Wie entsteht das Schaubild K aus der Sinuskurve mit $y = \sin(x)$? Skizzieren Sie K.
Bestimmen Sie den Wertebereich von f.

b) Die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ und das Schaubild K schneiden sich.
Bestimmen Sie zwei Schnittstellen.

Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben

mvurl.de/zaax

1 Welche Modellierung passt zur gegebenen Situation? Ordnen Sie zu, indem Sie die Koordinatenachsen benennen.

A: An einer Hafenmauer ändert sich die Meerestiefe ständig aufgrund der Gezeiten. Über einen gewissen Zeitraum wird die Meerestiefe gemessen und dargestellt.

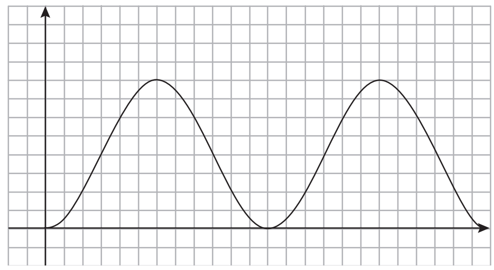


Abb.1

B: Jannis fährt Riesenrad. Zu jedem Zeitpunkt nach dem Einsteigen wird seine Höhe über dem Boden dargestellt.

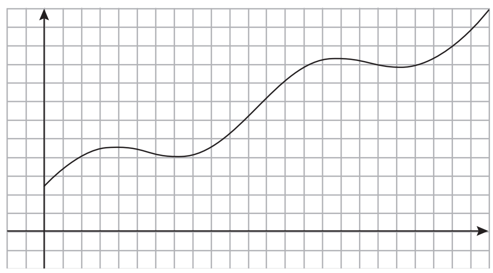


Abb.2

C: Ein Unternehmen bietet erfolgreich Saisonware an. Die Entwicklung der monatlichen Verkaufszahl über mehrere Jahre wird dargestellt.

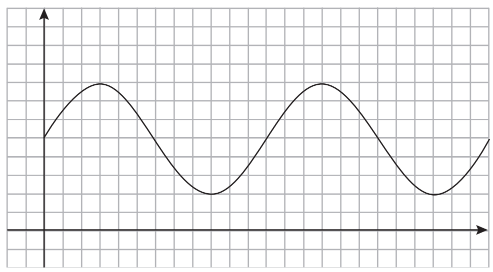


Abb.3

2 Die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion eines guten Brustschwimmers lässt sich näherungsweise beschreiben durch $v(t) = 0{,}4\sin(6t) + 1{,}5$.
(Zeit t in s, Geschwindigkeit v(t) in $\frac{m}{s}$).

a) Die Zeitspanne zwischen zwei Zügen beträgt _______s.

b) Die maximale Geschwindigkeit des Schwimmers beträgt _______ , die minimale Geschwindigkeit beträgt _______ .

c) Die mittlere Geschwindigkeit beträgt _______ . Somit benötigt der Schwimmer für eine Strecke von 100 m_______ s.

d) Treffen Sie Annahmen darüber, welche Werte für einen guten Kraulschwimmer gelten könnten. Geben Sie einen entsprechenden Funktionsterm an.

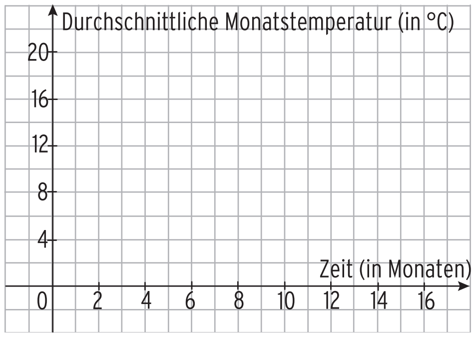
Mittlere Geschwindigkeit: _______ Maximale Geschwindigkeit: _______

Zeitspanne zwischen zwei Zügen:_______s g(t)= _____________

3 Die nachfolgende Tabelle gibt für jeden Monat des Jahres 2021 die durchschnittliche Monatstemperatur in Freiburg an

Monat	Jan	Feb	Mär	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez
Temperatur (in °C)	0,2	0,6	2,2	9,4	11,6	16,7	21,4	18,6	14,5	11,1	4,8	2,7

a) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der durchschnittlichen Monatstemperatur in das Koordinatensystem.



b) Weshalb ist für die Modellierung ein trigonometrischer Funktionsterm sinnvoll?

c) Ermitteln Sie einen beschreibenden Funktionsterm nur aus den beiden Monaten, in welchen die maximale bzw. minimale durchschnittliche Monatstemperatur vorliegt: Die maximale bzw. minimale durchschnittliche Monatstemperatur liegt bei

y_{max} = ____ bzw. y_{min} = ____.

Hieraus erhält man die Koeffizienten $d = \frac{y_{max} + y_{min}}{2}$ = ___ und $a = \frac{y_{max} - y_{min}}{2}$ = ____ .

Die Periodenlänge beträgt p = ____ Monate. Somit gilt: b = ____.

Da die maximale durchschnittliche Monatstemperatur im Juli erreicht wird, muss das Ausgangsschaubild um ____ Einheiten nach ________ verschoben werden.

Dies führt auf c = ____ . Insgesamt erhält man f(t) = ________________

d) In welchem Monat besteht die größte Abweichung zwischen der wirklichen und der mithilfe von f(t) berechneten durchschnittlichen Monatstemperatur?

2 Verknüpfung, Verkettung und Umkehrung von Funktionen

1 Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = x - 1$ und g mit $g(x) = \frac{1}{2}x^2$; $x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die Funktion mit dem Funktionsterm.

a) $f(x) + g(x) =$

b) $f(x) - g(x) =$

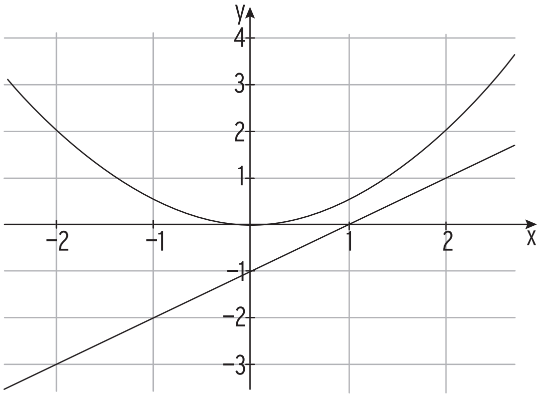
c) $f(x) \cdot g(x) =$

d) $f(g(x)) =$

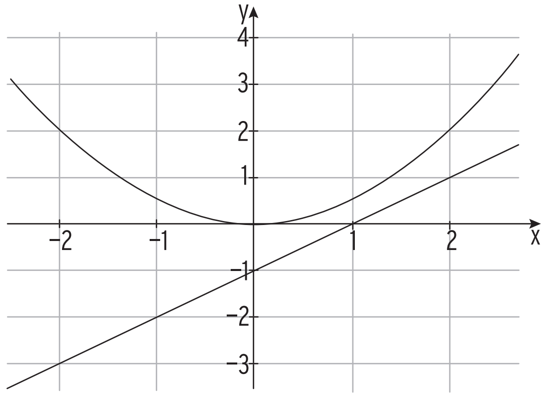
e) $g(f(x)) =$

Zeichnen Sie das Schaubild der Funktionen a) bis d).

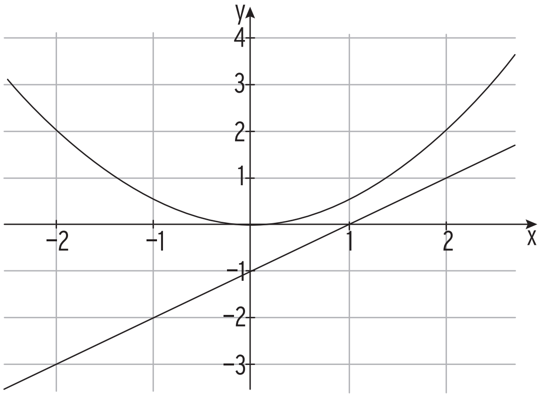
a)



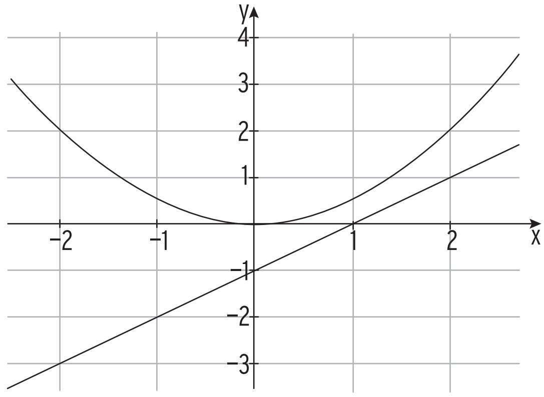
b)



c)

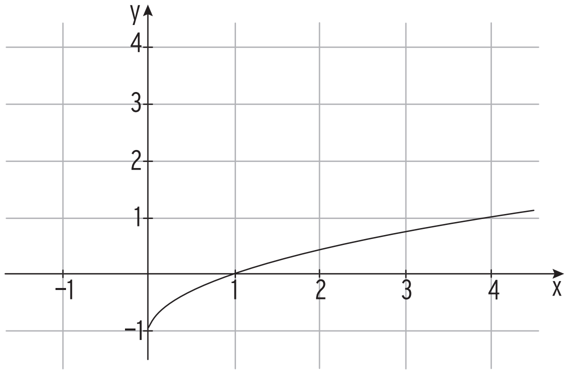


d)

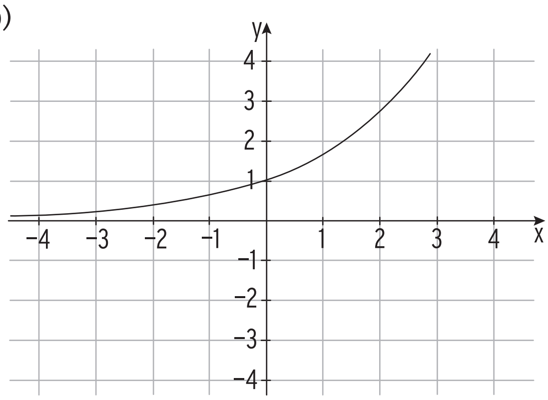


2 Zeichnen Sie das Schaubild der Umkehrfunktion der abgebildeten Funktion.

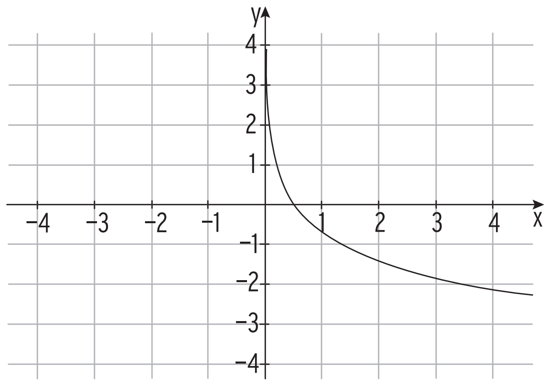
a)



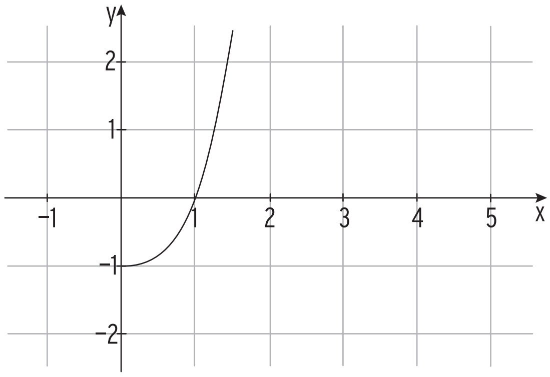
b)



c)



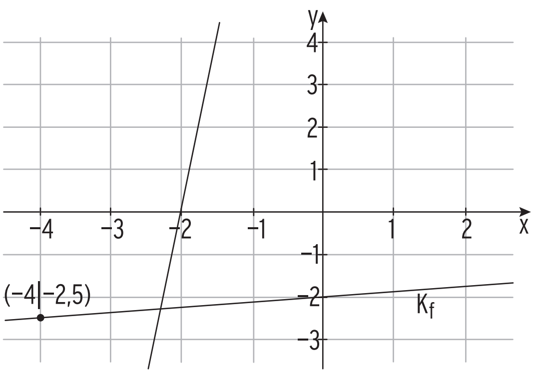
d)



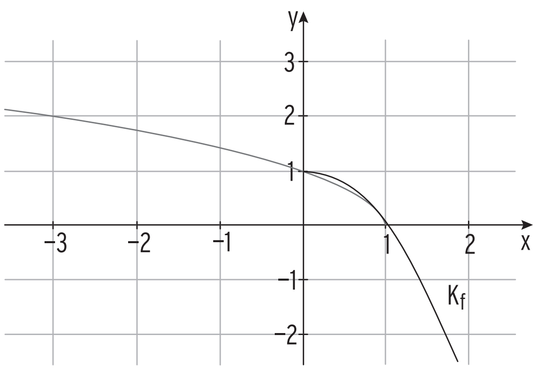
3 Die Abbildung zeigt die Graphen von f und f^{-1}.

Bestimmen Sie f(x) und $f^{-1}(x)$.

a)



b)



3 Differenzialrechnung

mvurl.de/295r

Ableitung

1 Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate auf [a; b].

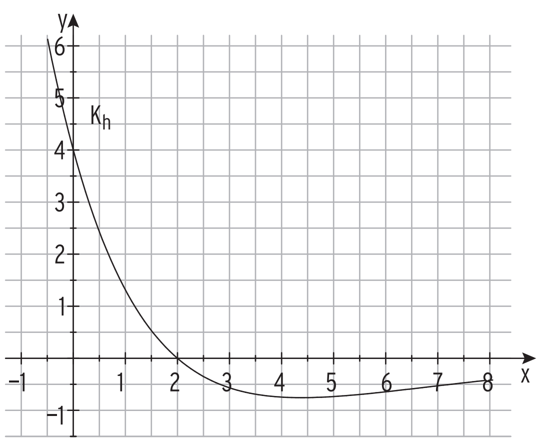
$f(x) = (x-3)^2$; [0; 3]	$\frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{0-9}{3} = -3$
$f(x) = 4x^2 - 2x^3$; [1; 3]	
$f(x) = 3e^{\frac{1}{2}x}$; [− 1; 2]	
$f(x) = 2\sin(2x)$; [0; $\frac{\pi}{4}$]	

2 Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate in x_0.

$f(x) = x^2 + 2$; $x_0 = 2$	$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2+2-6}{h} = \frac{h^2+4h}{h} = h+4$ $h + 4 \to 4$ für $h \to 0$ $m_t = f'(2) = 4$
$f(x) = 6x^2 - 2$; $x_0 = 1$	
$f(x) = x^2 - x$; $x_0 = 0$	

3 Gezeichnet ist das Schaubild einer Funktion h mit der Definitionsmenge D = [− 0,5; 8]. Prüfen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

$h'(1) < 0$	☐ (w) ☐ (f)
Das Schaubild von h' geht durch den Punkt Q(2 | 0).	☐ (w) ☐ (f)
$h'(7) = -0,5$	☐ (w) ☐ (f)
Es gibt ein $x \in D$ für das gilt: $h'(x) = 0$.	☐ (w) ☐ (f)
Die Gleichung $h'(x) = 1$ hat eine Lösung.	☐ (w) ☐ (f)



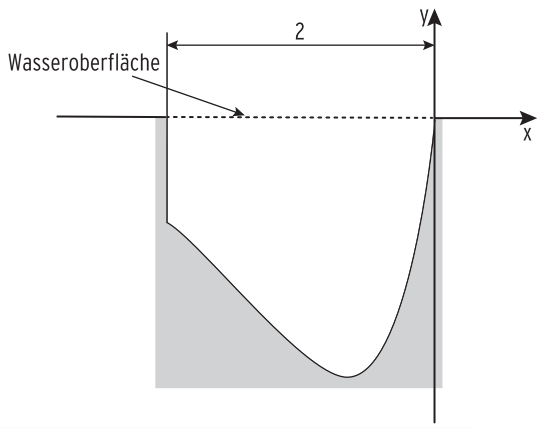
Anwendungen des Integrals

1

a) Die Anzahl der Käufer einer neu eingeführten App soll modelliert werden. Dabei wird die momentane Änderungsrate beschrieben durch f mit $f(t) = 6000te^{-0,5t}$ (t in Monaten nach der Einführung; f(t) in Käufer pro Monat).
Zeigen Sie: F mit $F(t) = -6000(2t + 4)e^{-0,5t} + 24000$ ist eine Stammfunktion von f.
Berechnen Sie das Integral $\int_0^6 f(t)\,dt$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

b) An einem Stausee wird der Zu- und Abfluss künstlich geregelt. Dabei wird die momentane Zuflussrate beschrieben durch z mit $z(t) = 20\sin(\frac{\pi}{12}t) + 25$; $t \geq 0$. Die konstante Abflussrate wird beschrieben durch a mit $a(t) = 19$; $t \geq 0$. (t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, z(t); a(t) in $1000\frac{m^3}{h}$).
Zu Beobachtungsbeginn befinden sich 2500000 m^3 Wasser im See. Berechnen Sie die Wassermenge im Stausee 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

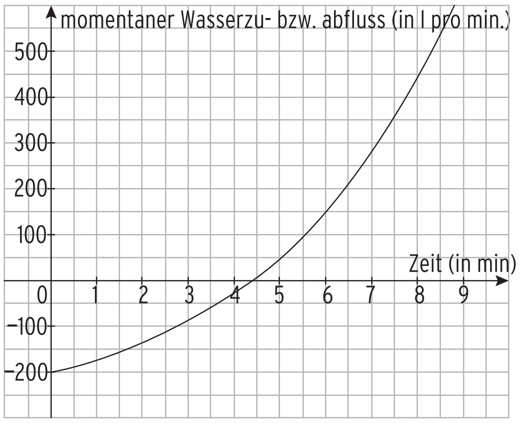
c) Eine Fahrrinne zum Testen von Schiffsmodellen ist im Koordinatensystem nach unten begrenzt durch die Kurve K von f mit $f(x) = x\,e^{1,5x+2}$.
Alle Angaben in Meter.
Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = \frac{2}{3}(x - \frac{2}{3})\,e^{1,5x+2}$ eine Stammfunktion von f ist.
Wie viel Wasser befindet sich in der Fahrrinne, wenn sie 20 m lang ist?



2 Die Funktion f mit $f(t) = 100e^{0{,}25t} - 300$ gibt für die ersten 9 Minuten den momentanen Wasserzu- bzw. abfluss in einem Wasserspeicher an. Das zugehörige Schaubild ist nebenstehend dargestellt. Positive Werte stehen hierbei für einen Wasserzufluss, negative für einen Wasserabfluss.

mvurl.de/2w2z

a) Zu welchem Zeitpunkt fließt am meisten Wasser ab?

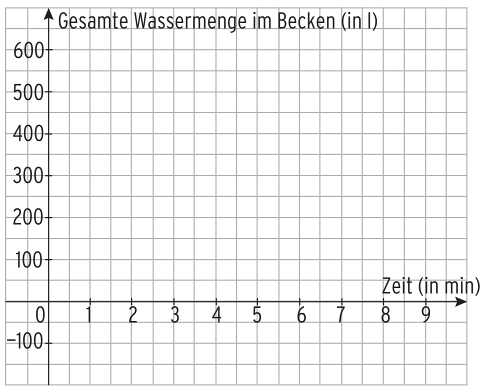


b) In welchem Zeitraum fließt Wasser ab?

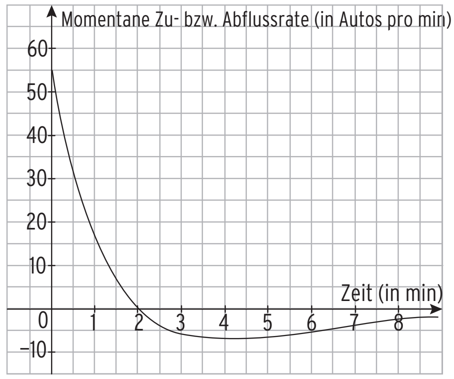
c) Welche gesamte Wassermenge fließt ab?

d) Wie ändert sich die vorhandene Wassermenge im Becken zwischen t=3 und t=6?

e) Zu Beginn befanden sich 550 l Wasser im Becken. Ermitteln Sie den Term der Funktion, welche für jeden Zeitpunkt die gesamte Wassermenge im Becken angibt. Zeichnen Sie diese in das Koordinatensystem ein.



3 Auf der Autobahn A8 bildet sich ein Stau.

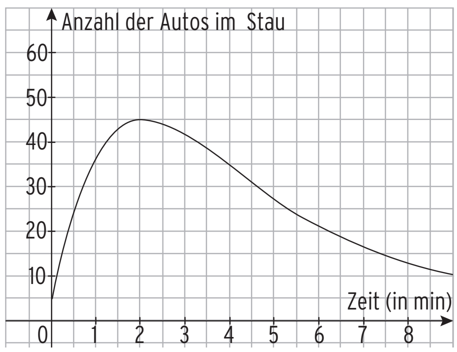


Das Koordinatensystem zeigt den Graphen der Funktion f, welche die momentane Zu- bzw. Abflussrate an Autos dargestellt.

a) Ergänzen Sie eine passende Aufgabenformulierung bzw. einen Rechenansatz.

Rechenansatz	Aufgabenformulierung
$\int_0^1 f(t)dt$	Wie viele Autos stehen in t = 1 mehr im Stau als in t = 0?
$\int_1^6 f(t)dt$	
	Wie ist die momentane Zuflussrate im Stau in t = 1,4?
	Zu welchem Zeitpunkt fahren genau so viele Autos in den Stau ein, wie aus diesem heraus?
$f'(t) = 0$	
	Zu welchem Zeitpunkt stehen ebenso viele Autos im Stau, wie zum Zeitpunkt 0?
$\int_0^{t_1} f(t)dt = -10$	

b) Das Koordinatensystem zeigt den Graphen der Funktion g, welche die Anzahl der Autos im Stau angibt. In welchem Zusammenhang stehen die Funktion f (aus a) und die Funktion g zueinander?



	Zu welchem Zeitpunkt stehen genau 30 Autos im Stau?
$g'(t) = 0$	
	Die Anzahl der Autos im Stau verringert sich.

Rotationskörper

mvurl.de/k1hc

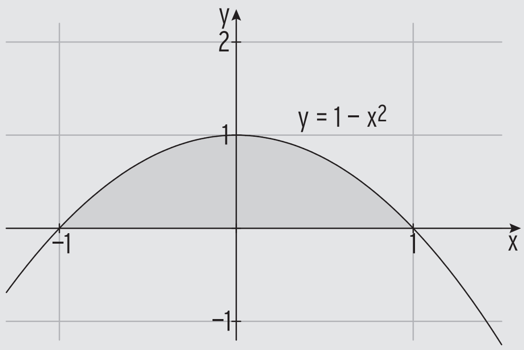
1 Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, wenn das Schaubild der Funktion f im Intervall [a; b] um die x-Achse rotiert.

$f(x) = 3 - x^2$ $[a;b] = [-1;1]$	$V = \pi\int_{-1}^{1}(3 - x^2)^2dx = \pi\int_{-1}^{1}(9 - 6x^2 + x^4)\,dx$ $V = \pi\left[9x - 2x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = \pi\left(9 - 2 + \frac{1}{5} - \left(-9 + 2 - \frac{1}{5}\right)\right) = \frac{72}{5}\pi$
$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x$ $[a;b] = [-2;1]$	
$f(x) = 1 + x^2$ $[a;b] = [-3;0]$	
$f(x) = e^{-0,5x}$ $[a;b] = [0;2]$	

2 Entscheiden Sie, ob die Behauptung richtig oder falsch ist.

	richtig	falsch
Eine Funktion hat genau eine Ableitungsfunktion und somit auch genau eine Stammfunktion.	☐	☐
Die von den Kurven K: $f(x) = x^2$ und G: $g(x) = x$ eingeschlossene Fläche rotiert um die x-Achse. Mit dem Term $V = \pi\int_0^1(f(x) - g(x))^2\,dx$ lässt sich das Rotationsvolumen berechnen.	☐	☐
Die von den Kurven K: $f(x) = x^2$ und G: $g(x) = x$ eingeschlossene Fläche rotiert um die x-Achse. Mit dem Term $V = \pi\int_0^1((g(x))^2 - (f(x))^2)\,dx$ lässt sich das Rotationvolumen berechnen.	☐	☐

3 Die markierte Fläche rotiert um die x-Achse.
Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.



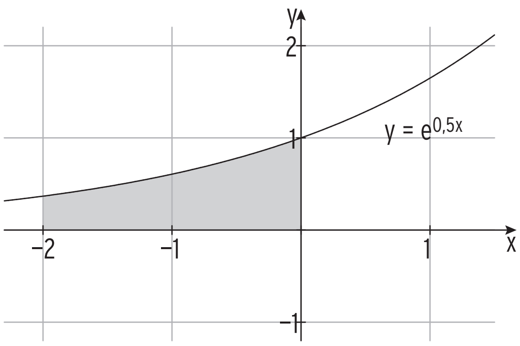
$V = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2 dx$

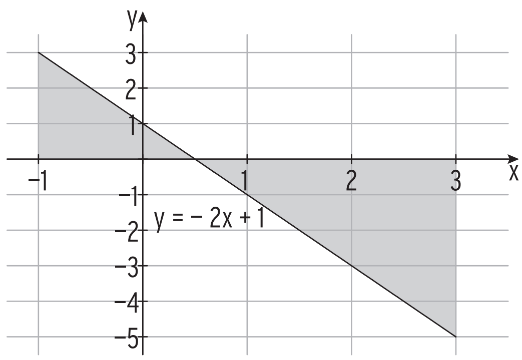
$V = \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\, dx$

$V = \pi \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1}$

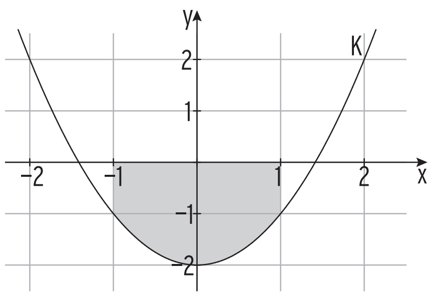
$V = \pi\,(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - (-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5})) = \frac{16}{15}\,\pi$

Volumen $V = \frac{16}{15}\,\pi$



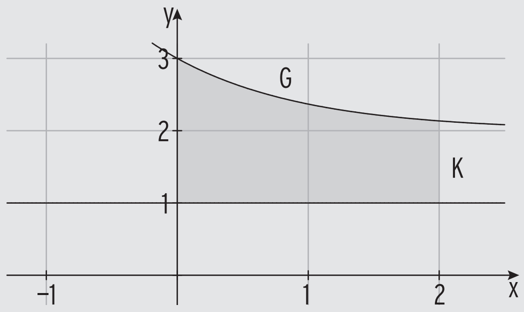


K: $f(x) = x^2 - 2$



4 Die markierte Fläche rotiert um die x-Achse.
Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

K: $f(x) = 1$; G: $g(x) = e^{-x} + 2$



$V = \pi\int_0^2 ((g(x))^2 - (f(x))^2)\,dx$

$(g(x))^2 = (e^{-x} + 2)^2 = e^{-2x} + 4e^{-x} + 4$

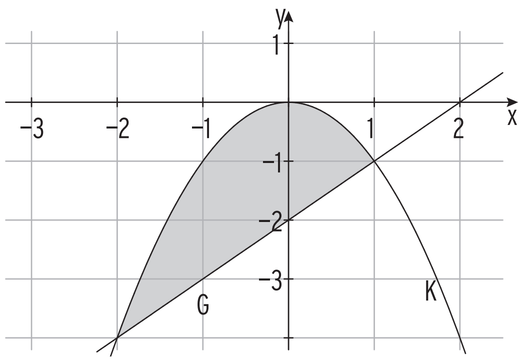
$V = \pi\int_0^2 (4 + 4e^{-x} + e^{-2x} - 1)\,dx$

$V = \pi\left[3x - 4e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^2 \approx 9{,}95\pi$

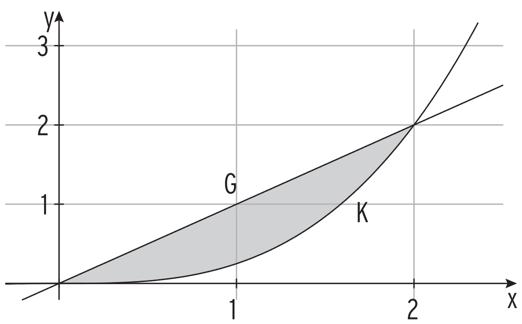
Volumen $V = 9{,}95\pi$

Hinweis: $V = V_{\text{außen}} - V_{\text{innen}}$

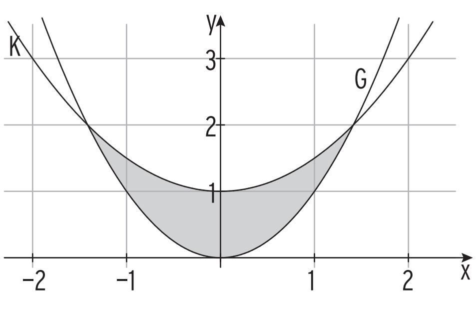
K: $f(x) = -x^2$; G: $g(x) = x - 2$



K: $f(x) = 0{,}25\,x^3$; G: $g(x) = x$



K: $f(x) = 0{,}5x^2 + 1$ G: $g(x) = x^2$



II Vektorielle Geometrie

1 Lineare Gleichungssysteme

mvurl.de/t56e

1 Lösen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 4 & 3 & 2 & -9 \\ -3 & -4 & -3 & 6 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 4 & 3 & 2 & -9 \\ -3 & -4 & -3 & 6 \end{array}\right) \quad \cdot(-2) \quad \cdot 3 \quad \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -8 & -35 \\ 0 & -5 & 9 & 51 \end{array}\right) \quad \cdot 5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -8 & -35 \\ 0 & 0 & -31 & -124 \end{array}\right)$$

$-31x_3 = -124 \Rightarrow x_3 = 4$

Einsetzen in $x_2 - 8x_3 = -35$ ergibt:

$x_2 - 32 = -35 \Rightarrow x_2 = -3$

Einsetzen in $2x_1 + x_2 + 5x_3 = 13$

ergibt: $2x_1 - 3 + 5 \cdot 4 = 13$

$x_1 = -2$

Lösung: $(-2; -3; 4)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 & -5 \end{array}\right)$

2 Das lineare Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3 ist mehrdeutig lösbar. Bestimmen Sie die Lösung.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right) \cdot(-2) \quad \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -15 \end{array}\right) \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wählen Sie: $x_3 = r$

Einsetzen in $-x_2 - x_3 = 5$ ergibt:

$-x_2 - r = 5 \Rightarrow x_2 = -r - 5$

Einsetzen in $x_1 + x_2 + x_3 = -2$ ergibt:

$x_1 + (-r - 5) + r = -2 \Rightarrow x_1 = 3$

Lösung: $(3; -r-5; r)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 13 \\ 4 & -5 & 0 & -9 \\ -3 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -6 & 24 \end{array}\right)$

3 Das lineare Gleichungssystem wird mit dem Gaußverfahren gelöst. Ergänzen Sie die fehlenden Zahlen.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & \square \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \square \\ 0 & 0 & \square & -9 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & -5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & \square & -3 & 7 \\ 0 & -8 & \square & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 14 & -3 & 7 \\ 0 & \square & 0 & \square \end{array}\right)$

4 Das lineare Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3 hat genau eine Lösung. Bestimmen Sie die Lösung.

a) $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$	$3x_3 = -3;\ \ x_3 = -1$ $2x_2 = 3;\ \ x_2 = 1{,}5$ Eingesetzt in $x_1 + 2x_3 = 1$ ergibt: $x_1 + 2 \cdot (-1) = 1 \Rightarrow x_1 = 3$	Lösung: $(3;\ 1{,}5;\ -1)$ oder: $x_1 = 3;\ x_2 = 1{,}5;\ x_3 = -1$
b) $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$		

5 Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

a) $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	Wählen Sie: $x_3 = r$ Eingesetzt in $x_2 - x_3 = 2$: $\ x_2 = 2 + r$ Eingesetzt in $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ $x_1 - 2\,(2 + r) + r = 0$: $\ x_1 = 4 + r$	Lösung: $(4 + r;\ 2 + r;\ r)$ oder: $x_1 = 4 + r;\ x_2 = 2 + r;$ $x_3 = r$
b) $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$		
c) $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$		

6 Ist die dargestellte Umformung beim Gauß-Verfahren korrekt? Beschreiben Sie ansonsten den Fehler.

Umformung	Umformung ist		Fehlerbeschreibung
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \;\; \| -1$	☐	richtig	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right)$	☐	falsch	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \| \cdot 0$	☐	richtig	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	☐	falsch	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$	☐	richtig	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$	☐	falsch	

7 Ergänzen Sie die Werte in der erweiterten Koeffizientenmatrix so, dass das LGS

a) eindeutig lösbar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right)$$

Lösung:

b) mehrdeutig lösbar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & \square & \square & \square \end{array}\right)$$

Lösung:

c) unlösbar ist.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & \square & \square & \square \end{array}\right)$$

8 Gegeben ist die allgemeine Lösung eines linearen Gleichungssystems.
Ist der gegebene Vektor eine Lösung?

allgemeine Lösung	Lösungsvektor?		Lösungsvektor?	
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2r-1 \\ r-1 \\ r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	☐ ist Lösung ☐ ist keine Lösung	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	☐ ist Lösung ☐ ist keine Lösung
$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r \\ 4r \\ -r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	☐ ist Lösung ☐ ist keine Lösung	$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$	☐ ist Lösung ☐ ist keine Lösung
$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ r+1 \\ 3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	☐ ist Lösung ☐ ist keine Lösung	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	☐ ist Lösung ☐ ist keine Lösung

9 Dargestellt ist ein LGS in Matrixform. Ordnen Sie dieses bezüglich der Lösbarkeit ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Anzahl Unbekannte = Anzahl Gleichungen

a)

LGS in Matrixform	Lösbarkeit	Begründung
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$	☐ eindeutig lösbar ☐ mehrdeutig lösbar ☐ unlösbar	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$	☐ eindeutig lösbar ☐ mehrdeutig lösbar ☐ unlösbar	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 2{,}5 \end{array}\right)$	☐ eindeutig lösbar ☐ mehrdeutig lösbar ☐ unlösbar	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$	☐ eindeutig lösbar ☐ mehrdeutig lösbar ☐ unlösbar	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$	☐ eindeutig lösbar ☐ mehrdeutig lösbar ☐ unlösbar	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$	☐ eindeutig lösbar ☐ mehrdeutig lösbar ☐ unlösbar	

b) Anzahl Unbekannte $<$ Anzahl Gleichungen

$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{array}\right)$	☐ eindeutig lösbar ☐ mehrdeutig lösbar ☐ unlösbar	
$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$	☐ eindeutig lösbar ☐ mehrdeutig lösbar ☐ unlösbar	

c) Anzahl Unbekannte $>$ Anzahl Gleichungen

$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$	☐ eindeutig lösbar ☐ mehrdeutig lösbar ☐ unlösbar	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right)$	☐ eindeutig lösbar ☐ mehrdeutig lösbar ☐ unlösbar	

2 Vertiefung der Vektoriellen Geometrie

Geraden im Anschauungsraum

mvurl.de/wtd1

1 Gegeben ist die Gerade g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie für die angegebenen Parameterwerte die zugehörigen Geradenpunkte.

a) $r = -2$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ A(4 |− 5 | 8)

b) $r = 3$

c) $r = -1$

2 Der Punkt A liegt auf der Geraden g. Vervollständigen Sie.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; A(3 |___|___)

Aus $x_1 = 3$: $r = 4$

Einsetzen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

A(3 |− 5| 1)

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; A(− 2 |__ |__)

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; A(__ | 6 |__)

3 Untersuchen Sie, ob die Punkte auf der Geraden g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$ liegen.

a) A(0 |1 |− 2)

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$

$0 = -2 + 2r \qquad r = 1$

$1 = 3 - 2r \qquad r = 1$

$-2 = 2 - 7r \qquad r = \frac{4}{7}$

Der Punkt A liegt nicht auf g.

b) B(− 12 |13 |37)

$\begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$

__ = ______ r =

__ = ______ r =

__ = ______ r =

Der Punkt A liegt ________

4 Ermitteln Sie die Koordinaten des gesuchten Punktes auf g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$.

a) Punkt mit x_3-Koordinate − 9

$-9 = -3 - 3r \Rightarrow r = 2$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \\ -9 \end{pmatrix}$; A(− 6 | 16 | − 9)

b) Punkt mit x_1-Koordinate − 2:

c) Spurpunkt mit x_1x_2-Ebene:

d) Spurpunkt mit der x_1x_3-Ebene:

e) Punkt mit der x_2-Koordinate 10:

5 Ermitteln Sie eine mögliche Geradengleichung.

a) Die Gerade g verläuft durch A (− 1 | 0 |−3) mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$. (Aufpunktsvektor + r · Richtungsvektor)

b) Die Gerade g verläuft durch A (1 | 4 |−3) mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

g: $\vec{x}$ =

c) Die Gerade g verläuft durch A (− 3 | 1 |−3) parallel zu h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$

g: $\vec{x}$ =

d) Die Gerade g verläuft durch A (− 3 | 1 | 1) parallel zur x_3-Achse

g: $\vec{x}$ =

e) Die Gerade g verläuft durch A (0 | 2 |−1) parallel zur x_1x_3-Ebene

g: $\vec{x}$ =

f) Die Ursprungsgerade g verläuft durch A (6 | 2 |− 4)

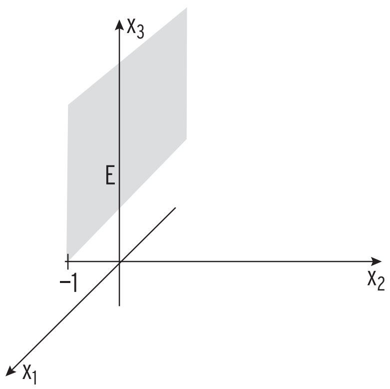
g: $\vec{x}$ =

8 Ist hierdurch eine Ebene eindeutig festgelegt?

Drei verschiedene Punkte.	☐ ja ☐ nein
Drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.	☐ ja ☐ nein
Zwei echt parallele Geraden.	☐ ja ☐ nein
Zwei sich schneidende Geraden.	☐ ja ☐ nein
Eine Gerade und ein Punkt, der nicht auf der Geraden liegt.	☐ ja ☐ nein
Zwei windschiefe Geraden.	☐ ja ☐ nein

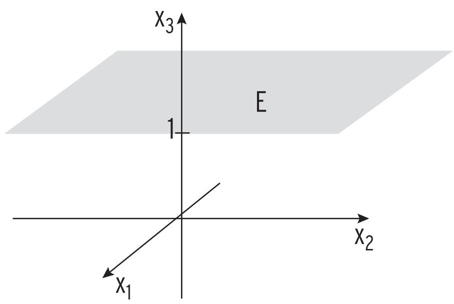
9 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene mit Hilfe der Abbildung.

a)



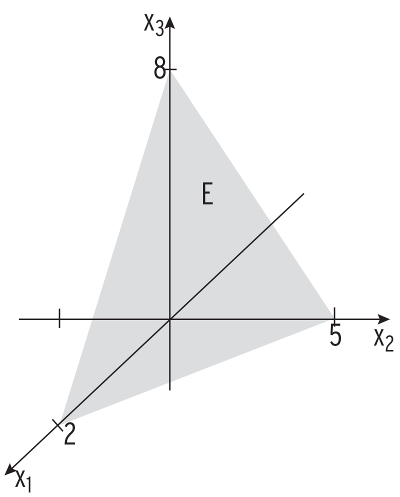
E:

b)



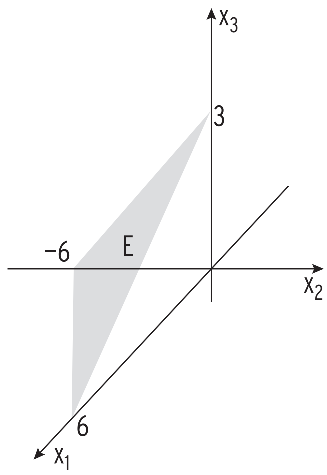
E:

c)



E:

d)



E:

Umformungen

1 Geben Sie eine Ebenengleichung in Koordinatenform an.

a)	$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$	$E: 1 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - ((-1) \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3) = 0$ $E: x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 12 = 0$
b)	$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$	E: E:
c)	$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$	E: E:

2 Geben Sie eine Ebenengleichung in Parameterform an.

a)	$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$	$x_3 = r;\ x_2 = s$ $x_1 + 2s + r = 1$ $x_1 = 1 - 2s - r$	$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - r - 2s \\ s \\ r \end{pmatrix}$ $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
b)	$x_1 + x_2 - x_3 = 3$		

3 Gegeben ist eine Parameterform der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix};\ r; s \in \mathbb{R}$.

a) Wandeln Sie die Parameterform der Ebenengleichung in die Normalenform um.

b) Wandeln Sie die Normalenform der Ebenengleichung in die Koordinatenform um.

c) Geben Sie die Ebenengleichung in der Achsenabschnittsform an.

mvurl.de/agpz

Spurpunkte und Spurgeraden

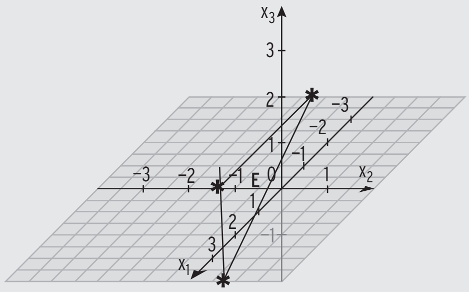
1 Berechnen Sie jeweils die Koordinaten der Spurpunkte und zeichnen Sie einen Ausschnitt der Ebene in das Koordinatensystem ein.

a) $E: -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4$

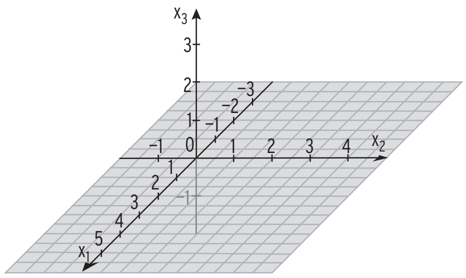
x_1-Achse: $x_2 = x_3 = 0$; $x_1 = 4$; $S_1(4 \mid 0 \mid 0)$

x_2-Achse: $x_1 = x_3 = 0$; $x_2 = -2$; $S_2(0 \mid -2 \mid 0)$

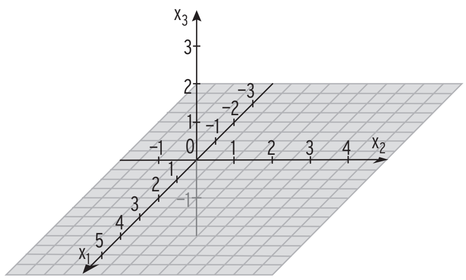
x_3-Achse: $x_1 = x_2 = 0$; $x_3 = 2$; $S_3(0 \mid 0 \mid 2)$



b) $E: 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 12$



c) $F: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$



2 Eine Ebene hat die Spurpunkte $S_1(-2 \mid 0 \mid 0)$, $S_2(0 \mid 1{,}5 \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid -5)$. Geben Sie zwei mögliche zugehörige Ebenengleichungen an.

E:

oder

E:

3 Berechnen Sie jeweils die Spurgerade der Ebene E: $x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$.

a) mit der x_1x_2-Ebene:

Spurpunkt mit der x_1-Achse: $x_2 = x_3 = 0$ ergibt $x_1 = 1$: $S_1(1\,|\,0\,|\,0)$
Spurpunkt mit der x_2-Achse: $x_1 = x_3 = 0$ ergibt $x_2 = 0{,}5$: $S_2(0\,|\,0{,}5\,|\,0)$
Spurgerade s_{12}: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\0{,}5\\0\end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

b) mit der x_1x_3-Ebene:

c) mit der x_2x_3-Ebene:

4 Gegeben sind die Koordinatengleichungen der Ebenen E, F, G, H und I:
E: $5x_2 - 4x_3 = 2$; F: $2x_2 = 1$; G: $4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$; H: $-x_1 - 2x_3 = 1$; I: $x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$
Auf welche der Ebenen treffen die Aussagen zu?

Die Ebene schneidet alle drei Koordinatenachsen.	☐ E ☐ F ☐ G ☐ H ☐ I
Die Ebene enthält den Ursprung.	☐ E ☐ F ☐ G ☐ H ☐ I
Die Ebene ist parallel zu mindestens einer Koordinatenachse.	☐ E ☐ F ☐ G ☐ H ☐ I
Die Ebene ist parallel zur x_1-Achse.	☐ E ☐ F ☐ G ☐ H ☐ I
Die Ebene ist parallel zur x_3-Achse.	☐ E ☐ F ☐ G ☐ H ☐ I
Die Ebene ist parallel zur x_1x_3-Ebene.	☐ E ☐ F ☐ G ☐ H ☐ I

mvurl.de/eg3v

Gegenseitige Lage einer Geraden und einer Ebene

1 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene E zur Geraden g. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S.

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

Gleichsetzen ergibt ein LGS für r, s, t: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Auflösen: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$

Das LGS ist eindeutig lösbar mit t = 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $S(10 \mid -2 \mid -1)$

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

Gleichsetzen ergibt ein LGS für r, s, t: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Auflösen: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$

Das LGS ist unlösbar, die Gerade g und die Ebene E verlaufen echt parallel zueinander.

c) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

d) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

2 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene E zur Geraden g. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S.

a) E: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -6$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

Einsetzen von $x_1 = 5 + 2r$, $x_2 = 8 + 4r$, $x_3 = 5 + 6r$ (aus der Geradengleichung)

in die Ebenengleichung $5 + 2r + 2(8 + 4r) + 3(5 + 6r) = -6$

$r = -1{,}5$

Einsetzen von $r = -1{,}5$ in g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} - 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

E und g schneiden sich in S(2 | 2| − 4).

b) E: $x_1 + x_2 - x_3 = -2$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

c) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

d) E: $\frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{-4} = 1$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

3 Tragen Sie ein, welche Bedingungen in der jeweiligen Lagebeziehung gelten.

Lagebeziehung	Bedingungen
g ist echt parallel zu E ☐ I. ☐ II. ☐ III. ☐ IV. g schneidet E senkrecht ☐ I. ☐ II. ☐ III. ☐ IV. g liegt in E ☐ I. ☐ II. ☐ III. ☐ IV.	I. Der Richtungsvektor von g und der Normalenvektor von E sind Vielfache voneinander. II. Der Aufpunkt von g liegt auf E. III. Der Normalenvektor von E steht senkrecht auf dem Richtungsvektor von g. IV. Eine Linearkombination aus den beiden Richtungsvektoren von E ergibt den Richtungsvektor von g.

4 Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E in Parameterform. Die Untersuchung auf gemeinsame Punkte ergibt folgendes Gleichungssystem. Wie liegen g und E zueinander? Begründen Sie Ihre Antwort.

	Lage	Begründung
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$	E und g schneiden sich in S.	Das LGS ist eindeutig lösbar.
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$		
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$		
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$		

5 Gegeben sind die Gerade g (Parameter r) und die Ebene E in Koordinatenform. Die Untersuchung auf gemeinsame Punkte ergibt die folgende Gleichung in r. Beschreiben Sie, wie g und E zueinander liegen. Begründen Sie Ihre Antwort.

$r = 2$	$0 \cdot r = 1$	$1 = 1$	$4 \cdot r = 0$
E und g	E und g		E und g
denn:	denn:	denn:	denn:

Gegenseitige Lage von zwei Ebenen

mvurl.de/3b5l

1 Die Ebene E und die Ebene F schneiden sich in einer Geraden.
Berechnen Sie die Gleichung der Schnittgeraden.

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $u, v \in \mathbb{R}$ F : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$,

Gleichsetzen ergibt ein LGS für u, v, r, s: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar; s ist frei wählbar; $r - s = -1 \Rightarrow r = s - 1$

Gleichung der Schnittgeraden: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + (s-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$, F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $u, v \in \mathbb{R}$

2 Die Ebene E und die Ebene F schneiden sich in einer Geraden.
Berechnen Sie die Gleichung der Schnittgeraden.

a) E: $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ F: $x_2 + 2x_3 = 6$

Das LGS $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$ ist mehrdeutig lösbar. $x_3 = r$ frei wählbar

Einsetzen in $x_2 + 2x_3 = 6$ ergibt: $x_2 + 2r = 6 \Rightarrow x_2 = 6 - 2r$

Einsetzen in $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ ergibt: $x_1 + 6 - 2r + r = 2 \Rightarrow x_1 = -4 + r$

Schnittgerade: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 + r \\ 6 - 2r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

b) E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$ F: $2x_2 + x_3 = 2$

mvurl.de/4x2a

Erwartungswert, Standardabweichung einer Binomialverteilung

1 Es liegt eine binomialverteilte Zufallsvariable vor.

a) Ergänzen Sie die unvollständigen Spalten.

n	50	50	80		125
p	0,2	0,6		0,5	
μ	$n \cdot p = 10$		40	60	12,5
σ	$\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 2{,}83$				

b) Vervollständigen Sie die nachfolgenden Aussagen. Berechnen Sie hierzu eventuell weitere Spalten in der Tabelle aus a).

- Eine Vervierfachung von n (p = konstant) führt zu einer ________________ von μ.
- Eine Vervierfachung von n (p = konstant) führt zu einer ________________ von σ.
- Eine Vervierfachung von p (n = konstant) führt zu einer ________________ von μ.
- Bei gegebenem n erhält man den höchsten Wert für σ, wenn man p = _____ wählt. Hingegen sinkt σ, wenn p gegen die Zahl ___ oder gegen die Zahl ___ strebt.

2 Eine Maschine produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % fehlerfreie Schrauben. Bei einer Qualitätskontrolle werden 3 Schrauben überprüft. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl an fehlerfreien Schrauben bei der Qualitätskontrolle an.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen: ________________

b) μ gibt inhaltlich ____ an.

c) Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X an.

k	0	1	2	3
P(X = k)				

d) Berechnen Sie μ erneut. Verwenden Sie hierzu jedoch die Wahrscheinlichkeitsverteilung. ____

e) Berechnen Sie die Standardabweichung der Zufallsvariablen.

f) σ gibt inhaltlich ____________________________________.____________ an.

3 Vervollständigen Sie die Tabelle.

n	p	μ	σ	σ-Intervall	2σ-Intervall	3σ-Intervall
500	0,7	350	10,25	[339,75; 360,25]	[329,50; 370,50]	[319,25; 380,75]
600	0,5					
	0,17	34	5,31			
10				[3,32; 6,48]		
	0,25					[21,60; 53,40]

4 Ein Glücksrad hat drei farbige Sektoren, die beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt werden: Rot 20 %; Grün 30 %; Blau 50 %.
Das Glücksrad wird n-mal gedreht. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Farbe Rot angezeigt wird.

a) Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist.

b) Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
P(X = k)	0,01	0,06	0,14	0,21	0,22	0,17	0,11	0,05	

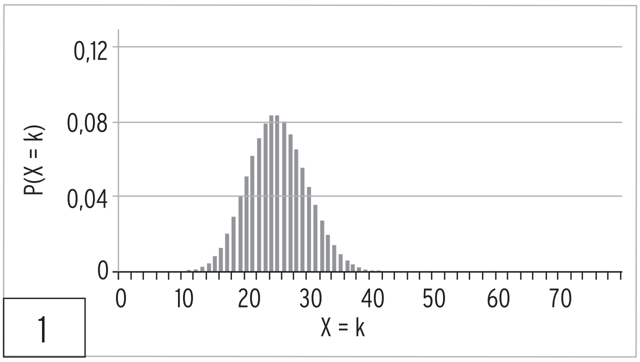
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3-mal rot angezeigt wird.

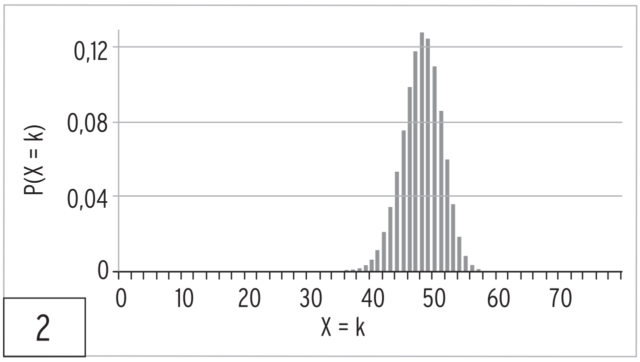
Entscheiden Sie, welcher der folgenden Werte von n der Tabelle zugrunde liegen kann: 20, 25 oder 30. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

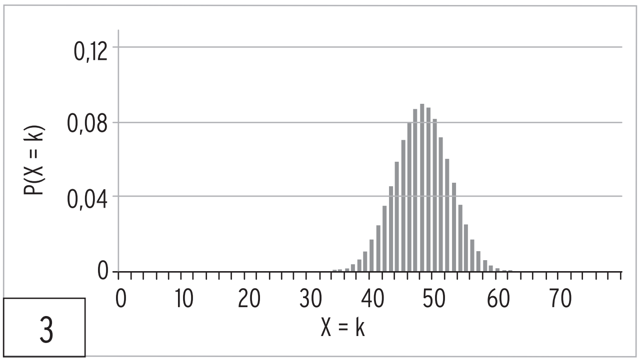
c) Es gilt n = 30. Berechnen Sie μ und σ.

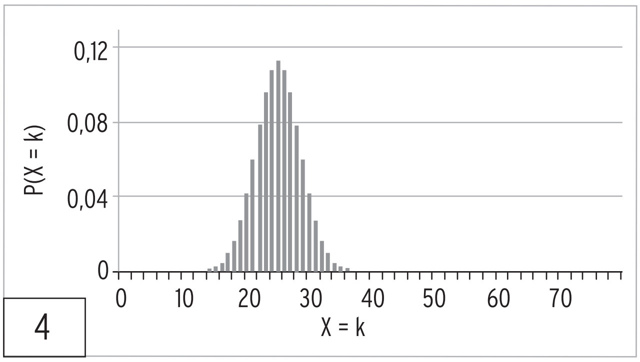
5 Vervollständigen Sie die Tabelle. Ordnen Sie dann die Schaubilder zu.

n	250	50	80	60
p	0,1	0,5	0,6	0,8
μ				
σ				
Schaubild				









6 In einem Hallenbad gibt der Eintrittskartenautomat jedem zwölften Besucher eine unbrauchbare Eintrittskarte aus. An einem Samstag Vormittag benutzen 155 Personen den Automat.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Personen an diesem Tag mit einer unbrauchbaren Eintrittskarte im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegt.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Anzahl der unbrauchbaren Eintrittskarten

- 14 oder mehr
- 10 bis 13
- weniger als 9
- mindestens 8 und höchstens 12

7

a) Die binomialverteilte Zufallsgröße X hat die Parameter $n = 4$ und p sowie den Erwartungswert 2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X = 4)$.

b) Die binomialverteilte Zufallsgröße Y hat die Parameter n und $p = 0{,}2$. Formulieren Sie dazu eine Aufgabenstellung, die sich mithilfe des Ansatzes $1 - 0{,}8^n < 0{,}3$ lösen lässt.

8 Im Folgenden werden zwei Würfel stets gemeinsam geworfen. Bei jedem der beiden Würfel sind die Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert.

a) Die beiden Würfel werden einmal geworfen. Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei keine „6“ auftritt, $\frac{25}{36}$ beträgt.

b) Die beiden Würfel werden 36-mal geworfen. Die binomialverteilte Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Würfe an, bei denen keine „6“ auftritt. Begründen Sie für jede der folgenden Abbildungen, dass sie nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X zeigt.

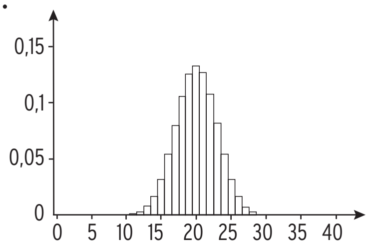


Abb. 1

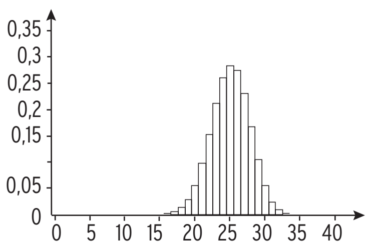


Abb. 2

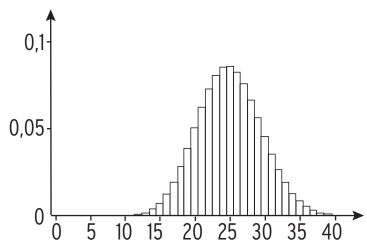


Abb. 3

mvurl.de/pmiw

Normalverteilung

1 Die Zufallsgröße X sei ein normalverteiltes Merkmal mit den Parametern $\mu = 80$ und $\sigma = 5$. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten.

a) $P(X \leq 70) =$

b) $P(40 \leq X \leq 90) =$

c) $P(X > 65) =$

2 Die Hama AG stellt unter anderem in hoher Stückzahl Chips für Laptops her. Aufgrund von technischen Problemen wird davon ausgegangen, dass durchschnittlich 10 % der Chips fehlerhaft sind. Eine Lieferung umfasst 1500 Chips.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Lieferung höchstens 160 Chips fehlerhaft sind.

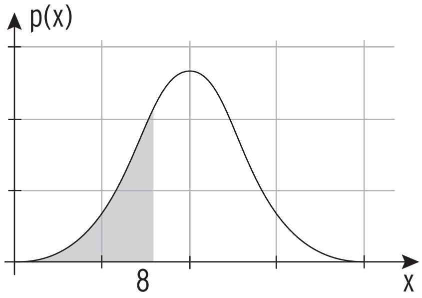
b) Ermitteln Sie für die Anzahl der fehlerhaften Chips in einer Lieferung eine Obergrenze, die nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 überschritten wird.

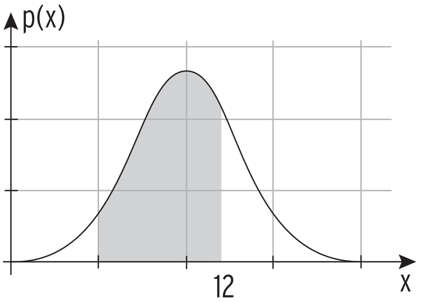
3 Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt, Prüfen Sie, ob die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung angenähert werden kann und berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

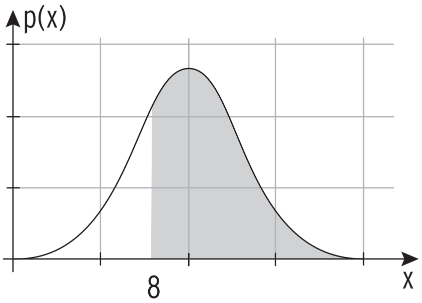
$n = 800$ $p = 0,4$		$P(X \leq 300) =$ $P(200 \leq X \leq 300) =$ $P(X \geq 350) =$
$n = 20$ $p = 0,5$		$P(X \leq 8) =$ $P(5 \leq X \leq 10) =$
$n = 1200$ $p = 0,01$		$P(X \leq 10)=$ $P(2 \leq X \leq 10)=$ $P(X \geq 6)=$

4 Die Abbildungen zeigen die Normalverteilung einer Zufallsgröße X mit $\sigma = 3{,}2$.

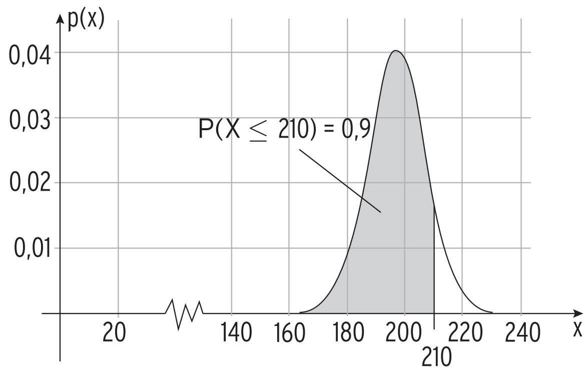
Berechnen Sie die dargestellten Wahrscheinlichkeiten.







5 Für die Kaffeemaschine NESTO wurde die normalverteilte Füllmenge für einen Becher mit einem Sollwert von 200 ml untersucht. Erläutern Sie drei wesentliche Informationen, die in der Graphik enthalten sind.



mvurl.de/xdnq

Sigmaregel und Prognoseintervall

1 Auf dem Weg zur Arbeit kommt Stefan jeden Tag an einer Ampel vorbei, welche mit einer Wahrscheinlichkeit von 35 % auf Rot steht.
Pro Jahr arbeitet Stefan an 220 Tagen.

a) Mit wie vielen Tagen pro Jahr, an welchen die Ampel auf Rot steht, muss Stefan rechnen?

b) An wie vielen Tagen im nächsten Jahr steht die Ampel mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,4 % auf Rot? Geben Sie hierfür ein Intervall an.

Der gegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit ist der c-Wert ____ in der Tabelle zugeordnet.

Mit der Standardabweichung von σ =

führt dies zu dem Intervall [________________; ________________]

= ____________.

c) Geben Sie ein Intervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit γ = 0,99 an.

[________________; ________________].

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt diese Anzahl an Tagen im Intervall [69,93; 84,07]?

Ansatz:

Dieses Intervall erhält man für c =______ .

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit ______ %.

2 Eine Münze wird 150 Mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft Wappen geworfen wurde.

X ist binomialverteilt mit $n =$______ und $p =$______.

Somit beträgt der Erwartungswert $\mu =$______

und die Standardabweichung $\sigma =$________________________.

Nach der σ-Regel nimmt X einen Wert an, welcher mit einer Wahrscheinlichkeit

von 68,3 % im Intervall [___________ ; ___________],

mit einer Wahrscheinlichkeit

von 95,4 % im Intervall [___________ ; ___________]

und mit einer Wahrscheinlichkeit

von 99,7 % im Intervall [___________ ; ___________]

liegt.

3 Sind die Aussagen, bezogen auf eine binomialverteilte Zufallsvariable, wahr (w) oder falsch (f)?

Der Erwartungswert gibt stets die Trefferanzahl an, die die höchste Wahrscheinlichkeit aufweist.	☐ (w) ☐ (f)
Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung der Werte einer Zufallsvariablen um den Erwartungswert.	☐ (w) ☐ (f)
Die Standardabweichung misst die Breite der Verteilung.	☐ (w) ☐ (f)
Ein Intervall, das mithilfe der Sigmaregeln berechnet wird, ist stets symmetrisch zum Erwartungswert.	☐ (w) ☐ (f)
Eine Binomialverteilung ist annähernd normalverteilt für $\sigma > 5$.	☐ (w) ☐ (f)
Die Sigmaregeln treffen umso besser zu, je größer der Stichprobenumfang ist.	☐ (w) ☐ (f)
Mit den Sigmaregeln können Wahrscheinlichkeiten abgeschätzt werden.	☐ (w) ☐ (f)

mvurl.de/hb5e

Konfidenzintervall

1

a) Vervollständigen Sie die Tabelle.

h	n	γ	c	Konfidenzintervall
0,6	100	90%	1,64	$\left[h - c\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}};\ h + c\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\right] = [0{,}520;\ 0{,}680]$
0,6	100	99%		
0,22	1000	90%		
0,45	300	95%		
0,64	120	95,4%		

b) Vervollständigen Sie die nachfolgenden Aussagen.

Eine Erhöhung von n führt zu einem ☐ längeren ☐ kürzeren Intervall.

Eine Erhöhung von γ führt zu einem ☐ längeren ☐ kürzeren Intervall.

c) Erklären Sie einem Mitschüler anschaulich (ohne Rechnung), weshalb eine Erhöhung von γ diese Wirkung auf die Länge des Vertrauensintervalls besitzt:

d) Ermitteln Sie die fehlenden Werte.

h	n	γ	c	Konfidenzintervall
	350			[0,4476; 0,5524]

2 An einer großen beruflichen Schule wird der Schülersprecher gewählt, wobei jeder Schüler einen Wahlzettel mit seinem gewünschten Kandidaten abgegeben hat. Nachdem 100 Stimmzettel ausgezählt sind, wird eine erste „Hochrechnung“ gemacht.
47 Stimmzettel entfallen auf den Kandidaten Vincent.
Geben Sie ein Intervall an, in welchem der Stimmenanteil von Vincent nach Auszählung aller Stimmzettel mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegen wird.

n = ; h = ; γ = ; c =

Vertrauensintervall:

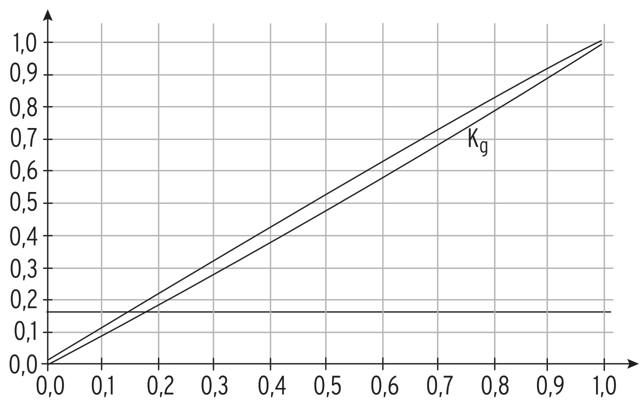
Der gesamte Stimmenanteil für Vincent wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %

zwischen und liegen.

3 Ein Unternehmen möchte den neuen Joghurt „choco-mint“ am Markt platzieren und bietet diesen hierzu einen Monat lang in einem Testsupermarkt an. 253 der insgesamt 1572 Testkunden haben den Joghurt in diesem Zeitraum gekauft.

a) Ermitteln Sie zum Vertrauensniveau γ = 95 % ein Vertrauensintervall für den gesamten Marktanteil des neuen Joghurts.

- Mit dem WTR:
- Mithilfe einer Konfidenzellipse. Beschriften Sie die Abbildung. Kennzeichnen Sie das Konfidenzintervall.



f(p) =

g(p) =

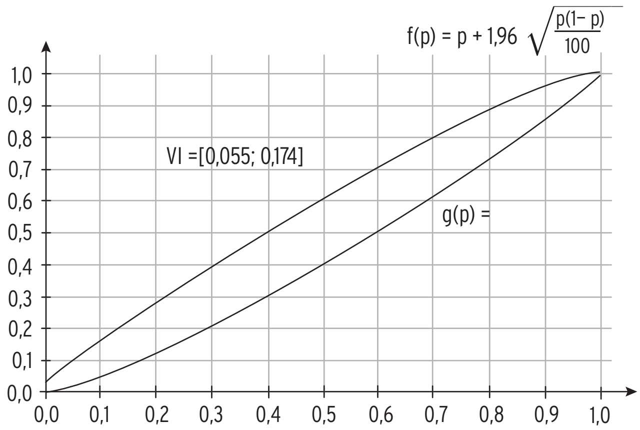
h =

VI =

b) Deutschlandweit rechnet das Unternehmen mit 14 Millionen Personen, welche durchschnittlich einen Joghurt pro Woche kaufen. Gemäß a) kann das Unternehmen also mit mindestens ______________ und höchstens ______________ verkauften „choco-mint“- Joghurts pro Woche rechnen. An einem verkauften Joghurt verdient das Unternehmen 0,11 EUR. Das Unternehmen wird durch die Einführung des Joghurts (mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %) also mindestens ______________ EUR und höchstens ______________ EUR Gewinn pro Woche erwirtschaften.

4 Die Agrema AG bezieht Rohpolyester in Polyesterbahnen vom Unternehmen CheijDong aus Taiwan. Die Ware wird beim Eingang durch eine Stichprobe mit Umfang n = 100 überprüft.

- In einer ersten Stichprobe waren 10 fehlerhafte Polyesterbahnen. Ergänzen Sie die Zeichnung um die fehlenden Elemente und die Beschriftungen. Erläutern Sie die Zeichnung in diesem Zusammenhang. (VI: Vertrauensintervall)



- Nach Aussage des Unternehmens sind höchstens 4 % der Polyesterbahnen fehlerhaft und damit Ausschuss. Diese Aussage ist mit dem Stichprobenergebnis verträglich. Nehmen Sie Stellung.
- Prüfen Sie, ob man bei einem Stichprobenausfall von 8 defekten Polyesterbahnen mit der Sicherheit von 99 % auf eine höhere Ausschussquote schließen kann.

Bearbeitung

- Erläuterungen:

- Stellungnahme:

- Ausschussquote:

Bohner | Ott | Deusch | Rosner

Arbeitsheft
Mathematik – Jahrgangsstufen 1 und 2
erhöhtes Anforderungsniveau

Berufliches Gymnasium
Baden-Württemberg

Analysis

Vektorielle Geometrie

Stochastik

Matrizen – Grundlagen

Lösungen

Merkur
Verlag Rinteln