Ott
Lengersdorf

Abitur 2026 | *Leistungskurs*

Aufgabensammlung zur zentralen Abiturprüfung
Mathematik am Berufskolleg – Berufliches Gymnasium
– Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung –

CAS

Nordrhein-Westfalen

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Oberstudienrat

Norbert Lengersdorf

Oberstudienrat am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

* * * * *

18. Auflage 2025

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0447-18
ISBN 978-3-8120-1183-9

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält nur auf die neue Prüfungsordnung für das Berufskolleg in Nordrhein-Westfalen abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur 2026 im Fach Mathematik an beruflichen Gymnasien im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung.

Die Aufgaben behandeln nur Themen, die in den Abiturvorgaben 2026 für den Leis-tungs-kurs Mathematik, Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung, aufgeführt sind.

Die zentrale Abiturprüfung 2026 besteht aus zwei Teilen, einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil A und einem Prüfungsteil B mit Hilfsmittel (MMS bzw. CAS)

Die Aufgaben für den Leistungskurs sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten: Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra/Analytische Geometrie.

Durch die Vorgaben für die schriftliche Abiturprüfung 2026 werden inhaltliche Schwerpunkte festgelegt.

Die **Analysis** behandelt im Abitur 2026 als Schwerpunkt ganzrationale Funktionen und Exponentialfunktionen und die Modellierung von berufsbezogenen Anwendungen mithilfe dieser Funktionstypen: Marktpreistheorie, Modelle der vollständigen Konkurrenz und des Monopols, Absatz- und Umsatzentwicklung, Kosten- und Gewinnanalyse.

Die **Lineare Algebra** hat die Schwerpunkte Lineare Gleichungssysteme und **Lineare Optimierungsprobleme**. Mehrstufige Produktionsprozesse und stochastische Prozesse werden als Anwendungen behandelt.

Schwerpunkte in der **Stochastik** sind die bedingte Wahrscheinlichkeit, die Binomialverteilung, der einseitige Hypothesentest und ökonomische Anwendungen wie die Preiskalkulation.

Die Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.

Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben. An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung 2026 ... 8
Operatoren und Dokumentation von Lösungen ... 9

I Hilfsmittelfreier Teil A der zentralen Abiturprüfung ... 12
Aufgaben zur Analysis ... 12
Lösungen ... 17
Aufgaben zu Lineare Algebra/Analytische Geometrie ... 22
Lösungen ... 29
Aufgaben zur Stochastik ... 34
Lösungen ... 41
II Aufgabensätze Aufgabenteil A zur Zentralen Abiturprüfung 2026 ... 46
Aufgabensatz 1 bis 4 ... 46
Lösungen ... 59
III Teil B der zentralen Abiturprüfung mit Hilfsmittel (MMS,CAS) ... 69
1 Analysis ... 69
Mathematische Formeln Wirtschaft und Verwaltung ... 69
Aufgaben zur Analysis ... 70
Lösungen ... 74
2 Lineare Algebra/Analytische Geometrie ... 79
Formelsammlung zur Linearen Algebra ... 79
Aufgaben zu Lineare Algebra/Analytische Geometrie
– Lineare Optimierung und stochastische Prozesse ... 81
Lösungen ... 97
3 Stochastik ... 109
Formelsammlung zur Stochastik ... 109
Aufgaben zu Stochastik
–Hypothesentest und ökonomische Anwendungen ... 110
Lösungen ... 121
IV Zentrale Abiturprüfungen, angepasst an die Vorgaben 2026 ... 134
Zentrale Abiturprüfung 2017 ... 134
Zentrale Abiturprüfung 2018 ... 151
Zentrale Abiturprüfung 2019 ... 166
Zentrale Abiturprüfung 2020 ... 182
Zentrale Abiturprüfung 2021 ... 197
Zentrale Abiturprüfung 2022 ... 215
Zentrale Abiturprüfung 2023 ... 231
Zentrale Abiturprüfung 2024 ... 246
Zentrale Abiturprüfung 2025 ... 263

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung 2026

Leistungskurs

Die schriftliche Abiturprüfung umfasst den Aufgabenteil A (Bearbeitung ohne Hilfsmittel) und den Aufgabenteil B (Bearbeitung mit Hilfsmitteln).
Der Aufgabenteil A besteht aus **vier Pflichtaufgaben** und **vier Wahlaufgaben**, aus denen zwei von den Prüflingen ausgewählt werden.
Die Auswahlentscheidung wird dokumentiert, die beiden angekreuzten Wahlaufgaben werden bewertet.
Der Aufgabenteil B besteht aus drei Pflichtaufgaben.
Bei mindestens zwei der Aufgaben des Aufgabenteils A und B sind Anwendungsbezüge aus Wirtschaft und Verwaltung vorgesehen.

Aufgabenteil A Bearbeitung ohne Hilfsmittel				**Aufgabenteil B Bearbeitung mit Hilfsmittel**	
Pflichtaufgaben		Wahlaufgaben (zwei aus vier, beliebig)		Pflichtaufgaben	
Analysis	5	Analysis	5	Analysis	30
Analysis	5	Analysis	5	Stochastik	30
Stochastik	5	Stochastik	5	Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	30
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	5	Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	5		
Summe	20	Summe	10	Summe	90
Gesamtsumme: 120 BE + 5 BE (Darstellungsleistung) = **125 BE**					

Mindestens zwei der Teilaufgaben sind mit Anwendungsbezug.

Organisation

Zu Beginn der Bearbeitungszeit erhalten die Prüflinge die beiden zu bearbeitenden Aufgabenteile A und B. Die zugelassenen Hilfsmittel (MMS (CAS); Formelsammlung) werden noch nicht ausgegeben.

Die Prüflinge geben individuell nach Bearbeitung ihre Ausarbeitungen zum Aufgabenteil A ab und erhalten im Gegenzug Zugang zu den zugelassenen Hilfsmitteln (MMS; Formelsammlung).

Die Arbeitszeit einschließlich Auswahlzeit beträgt 300 Minuten

Für Prüflinge, die die Aufgaben und die Lösungen des Prüfungsteils A vorzeitig abgeben, verlängert sich entsprechend die Bearbeitungszeit für den Prüfungsteil B.

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist in beiden Prüfungsteilen der Klausur zugelassen.

Operatoren und Dokumentation von Lösungen

1 Allgemeine Bemerkungen zu den Aufgabenstellungen

Der Prüfling wird nicht zur Nutzung einer bestimmten Technologie aufgefordert, da das Erkennen der Sinnhaftigkeit des Einsatzes des MMS eine selbstständige Leistung ist. Die Vorgehensweise und Darstellung der Lösung muss unabhängig von der gewählten Technik nachvollziehbar dokumentiert werden. Der Schüler hat zu verdeutlichen, wie er mit welchen Eingaben mit der genutzten Technik zu welchen Ergebnissen gelangt ist. Die Dokumentation erfolgt immer mit mathematischen Regeln unter Nutzung der Fachsprache.

2 Beispiele zu einigen der häufig genutzten Operatoren

2.1

Operator	AFB	Beschreibung
Angeben, Nennen	I, II	Objekte, Sachverhalte, Begriffe, Daten ohne nähere Erläuterungen bzw. Begründungen und ohne Darstellung von Lösungsansätzen oder Lösungswegen aufzählen

Erläuterungen: Der Prozess der Ergebnisermittlung bleibt gegebenenfalls im Dunkeln, somit auch die Wahl des Hilfsmittels. „Angeben /Nennen“ erfordert keine Einsicht in den Sachzusammenhang oder den mathematischen Zusammenhang.

Beispiel: …und geben Sie eine mögliche Kostenfunktion an.

(Abitur 2017 LK CAS, Analysis 2.1.3)

Erwartungshorizont:

Kostenfunktion z.B. mit c = 12: $K(x) = \frac{1}{400}x^3 - \frac{1}{15}x^2 + 12x + 200$

2.2

Operator	AFB	Beschreibung
Erläutern	I, II	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.

Erläuterungen: Beispielsweise kann zur Problemlösung ein Sachzusammenhang durch zusätzlich hergeleitete Informationen mit eigenen Worten dargelegt werden oder aber auch ein Vorgehen verständlich beschrieben werden.

Beispiel:

Erläutern Sie anhand der kurzfristigen und der langfristigen Preisuntergrenze, ob die Rasolux GmbH einen Preis von 700GE/ME unterbieten kann.

(Abitur 2017 GK Analysis 2.2.1)

Erwartungshorizont:

kPUG: Minimierung der variablen Stückkosten $k_v(x) = 10x^2 - 240x + 1920$

Notwendige und hinreichende Bedingung bei quadratischen Funktionen mit positivem Leitkoeffizient: $k'_v(x) = 0$ $\quad 20x - 240 = 0 \Leftrightarrow x = 12$ $\quad$ kPUG: $k_v(12) = 480$ (GE/ME)

LPUG: Minimierung der Stückkosten $k(x) = 10x^2 - 240x + 1920 + \frac{7840}{x}$

Darstellung des Graphen im Intervall von 0 bis 20 liefert den Tiefpunkt (14 | 1080)

LPUG 1080 GE/ME. Ein Preis von 700GE/ME kann kurzfristig, aber nicht langfristig unterschritten werden.

2.3

Operator	AFB	Beschreibung
Berechnen	I, II	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.

Erläuterungen: Der Ansatz, der auf der symbolischen Ebenen zur Lösung führt, ist zu dokumentieren. Der sich anschließende Lösungsweg muss unter Beibehaltung mathematischer Regeln nachvollziehbar dargestellt werden. Wenn ein MMS (CAS) für einen Lösungsschritt verwendet wird, ist der Ansatz und der logische Schritt zu dokumentieren.

Beispiel: Berechnen Sie den maximalen Gewinn (Abitur 2017 LK, Analysis 2.2.1.2)

Erwartungshorizont

Gewinnmaximum: $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$

Ableitungen: $G'(x) = -3x^2 + 12x - 1{,}25$; $G''(x) = -6x + 12$

Notwendige Bedingung: $G'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 3{,}89 \vee x_2 = 0{,}11$

Mit $G''(3{,}89) < 0$ und $G(3{,}89) = 23{,}32$ gilt:

Bei einer Produktion von 3,89 ME wird der maximale Gewinn von 23,32 GE erzielt.

2.4

Operator	AFB	Beschreibung
Bestimmen, Ermitteln	I, II	Die Art des Vorgehens kann frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.

Erläuterungen: Die Wahl der Mittel (z.B. ob graphisch oder numerisch) bleibt offen. Durch Spezifizierung wie „Ermitteln Sie graphisch" oder „Bestimmen Sie rechnerisch" würde die Verwendung der Werkzeugebene des CAS beschränkt.
Beim graphischen ermitteln von Lösungen kann dies durch Anfertigung einer Zeichnung auf Papier oder durch Darlegung der Lösungsschritte beim graphischen Lösen mit MMS (CAS) erfolgen.

Beispiel: Gehen Sie davon aus, dass gilt: $a = \frac{1}{225}c - \frac{23}{450}$ und $b = -30a$

Ermitteln Sie den Bereich, in dem der Parameter c liegen muss, damit K eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion ist … . (Abitur 2017 LK, Analysis 2.1.3)

Erwartungshorizont

Mit $b^2 \leq 3 \cdot a \cdot c$ ist folgende Ungleichung zu lösen: $(\frac{23}{15} - \frac{2}{15}c)^2 \leq 3(\frac{1}{225}c - \frac{23}{450}) \cdot c$

Lösung mit CAS: $11{,}5 \leq c \leq 46$

Operator	AFB	Erläuterung
angeben, nennen	I, II	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung erforderlich
begründen, nachweisen, zeigen	II, III	Sachverhalte, Aussagen sind durch logisches Schließen zu bestätigen Die Art des Vorgehens ist frei wählbar, das Verfahren ist darzustellen. zu nutzen
berechnen	I, II	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen
beschreiben	I, II	Strukturen, Sachverhalte, Verfahren unter Verwendung der Fachsprache angemessen wiedergeben, eine Begründung ist nicht notwendig.
bestimmen, ermitteln	I, II	Zusammenhänge bzw. Lösungswege finden und die Ergebnisse formulieren
beurteilen	II, III	Das zu fällende Urteil ist zu begründen
bewerten, deuten interpretieren	II, III	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
entscheiden	II, III	Sich bei Alternativen eindeutig und begründet auf eine Möglichkeit festlegen.
erläutern	I, II	Strukturen und Zusammenhänge erfassen, in Einzelheiten verdeutlichen und durch zusätzliche Informationen verständlich machen
herleiten, formulieren	II, III	Eine Formel oder einen Zusammenhang aus bekannten Sachverhalten nachvollziehbar entwickeln
skizzieren	I, II	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie wesentliche Eigenschaften von Sachverhalten oder Objekten beschreibt
untersuchen	I, II	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien bearbeiten
veranschaulichen, verdeutlichen	I, II	Einen Sachverhalt mit verbalen oder graphischen Erläuterungen versehen
vergleichen	I, II	Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln
zeichnen, grafisch darstellen	I, II	hinreichend exakte graphische Darstellungen von Objekten oder Daten anfertigen

Die Verwendung eines Operators, der in der Übersicht nicht genannt wird, ist möglich, wenn aufgrund der standardsprachlichen Bedeutung dieses Operators in Verbindung mit der Aufgabenstellung davon auszugehen ist, dass die jeweilige Aufgabe im Sinne der Aufgabenstellung bearbeitet werden kann. Grundsätzlich können sich alle Operatoren auf alle drei Anforderungsbereiche beziehen.
Die Operatoren können durch **Zusätze** (z. B. „rechnerisch“ oder „grafisch“) konkretisiert werden. Zugelassene Hilfsmittel dürfen zur Bearbeitung verwendet werden, sofern dem kein entsprechender Zusatz entgegensteht. Speziell kann bei der Verfügbarkeit von digitalen Mathematikwerkzeugen im Einzelfall die Darstellung eines Lösungswegs gefordert werden, der auch ohne den Einsatz dieser Technologien nachvollziehbar ist.

I Hilfsmittelfreier Teil A der zentralen Abiturprüfung

Aufgaben zur Analysis

Dieser Teil A der Abiturprüfung enthält 4 Pflichtaufgaben und 4 Wahlaufgaben. Von den Wahlaufgaben sind zwei Aufgaben zu wählen.

Punkte

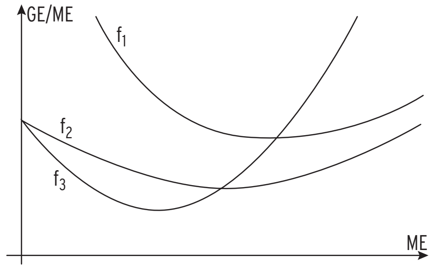
Aufgabe 1 **Lösungen Seite 17**

Zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a, c, d > 0$, $b < 0$,

x in ME, K(x) in GE,

sind in der nebenstehenden Abbildung die Graphen der Grenzkostenfunktion, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion dargestellt.

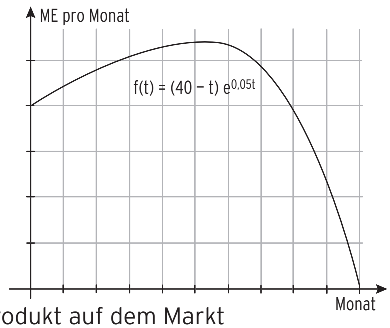


1.1 Ordnen Sie dem jeweiligen Graphen die entsprechende ökonomische Funktion begründet zu. 3

1.2 Beweisen Sie, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge bei $x = -\frac{b}{2a}$ liegt. 2

Aufgabe 2

Die monatlichen Absatzzahlen eines Produkts werden mit $f(t) = (40 - t)e^{0,05t}$, (t in Monaten, f(t) in ME/Monat) modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem das Produkt auf dem Markt abgesetzt werden kann. 2

2.2 Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei t = 20 liegt. 3

($f''(t) = -\frac{1}{400}\, t\, e^{0,05t}$ kann verwendet werden.)

Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 3

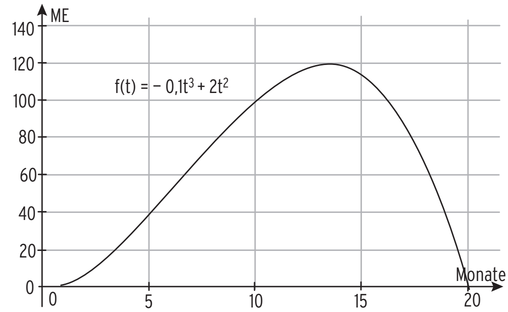
Lösungen Seite 18 **Punkt**

Die monatlichen Absatzzahlen eines neuartigen Produkts werden mit

$f(t) = -\frac{1}{10}t^3 + 2t^2$

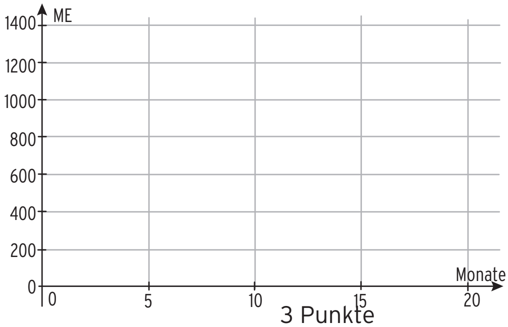
(t in Monaten, f(t) in ME/Monat)

modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



3.1 Bestimmen Sie die in den ersten 20 Monaten insgesamt abgesetzte Menge. 2 Punkte

3.2 Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem den Graphen der Funktion, die den Gesamtabsatz in Abhängigkeit von der Zeit angibt.



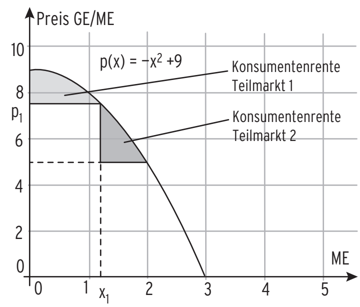
3 Punkte

Aufgabe 4

Die Preisentwicklung eines Produkts entspricht der Nachfragefunktion p mit

$p(x) = -x^2 + 9$; x in ME, p(x) in GE/ME.

Das Produkt wird auf dem Teilmarkt 1 für p_1 GE/ME und auf dem Teilmarkt 2 für 5 GE/ME verkauft. Es werden insgesamt 2 ME abgesetzt (vgl. nebenstehende Abbildung).



4.1 Beschreiben Sie den Einfluss der Höhe des Preises p_1 auf die Konsumentenrente des jeweiligen Teilmarkts. 2

4.2 Weisen Sie nach, dass die gesamte Konsumentenrente optimal abgeschöpft wird, wenn $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ (ME) ist. 3

Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 5 **Lösungen Seite 19** **Punkte**

Die folgende Tabelle gibt die Stückkosten k, die variablen Stückkosten k_v und die Grenzkosten K′ zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K an (x in ME; K(x) in GE):

x	1	2	3	4	5	6	7	8
k(x)	201,0	124,0	97,0	84,0	77,8	76,0	77,6	82,0
$k_v(x)$	57,0	52,0	49,0	48,0	49,0	52,0	57,0	64,0
K′(x)	51,0	44,0	43,0	48,0	59,0	76,0	99,0	128,0

Beurteilen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen allein unter Zuhilfenahme der Tabellenwerte:

1.1 Das Betriebsminimum liegt bei 4 ME. 2

1.2 Die Kosten steigen zwischen 0 und 4 ME degressiv. 2

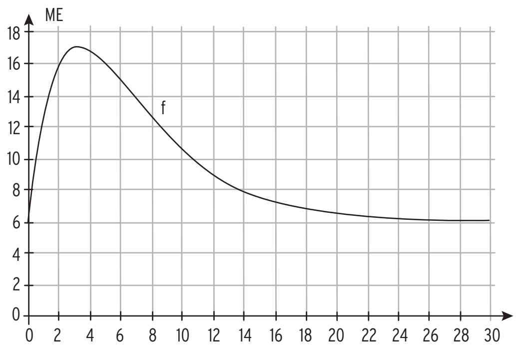
1.3 Die Fixkosten belaufen sich auf 144 GE. 1

Aufgabe 6

Die Absatzentwicklung eines Produktes wird durch die folgende Funktion beschrieben:

$f(t) = 9t \cdot e^{-0,3t} + 6$

dabei steht $t > 0$ für die Monate und f(t) für den Absatz in ME pro Monat.



1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die monatlichen Absatzzahlen maximal werden (notwendiges Kriterium genügt). 3

2 Nehmen Sie mit Hilfe des Graphen Stellung zu der folgenden Aussage:
In der zweiten Hälfte des ersten Jahres liegt der Zeitpunkt des maximalen Absatzrückganges. 2

Aufgaben zur Analysis

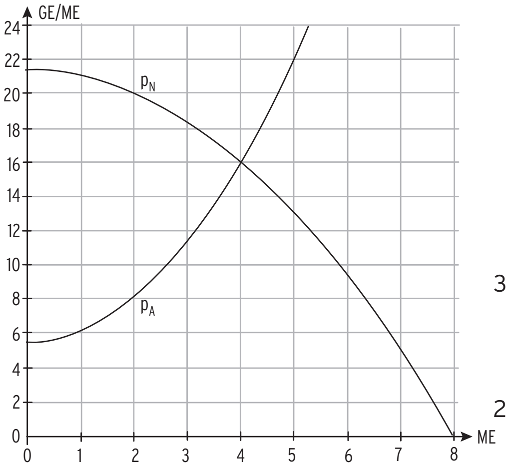
Aufgabe 7 — Lösungen Seite 19/20 — Punkte

Gegeben sind folgende Angebotsfunktion p_A und Nachfragefunktion p_N:

$p_A(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3}$

$p_N(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3}$

x in ME, p(x) in GE/ME



1 Berechnen Sie das Marktgleichgewicht. 3

2 Begründen Sie anhand der Graphen, dass die Konsumentenrente geringer ist als die Produzentenrente. 2

Aufgabe 8

Die Entwicklung der Gesamtkosten der Produktion von Fahrrädern kann durch die Funktion K mit $K(x) = 0{,}5x^3 - 8x^2 + 45x + 70$ mit $D_K = [0; 13]$ beschrieben werden.

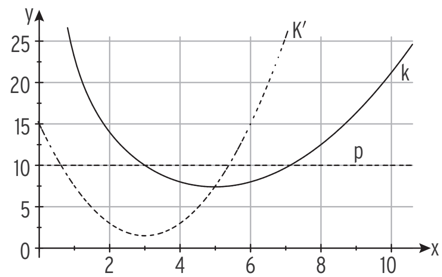
Berechnen Sie das Minimum der variablen Stückkosten und interpretieren Sie ihr Ergebnis.

Aufgabe 9

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$.

Aufgabe 10

Die Unternehmensführung geht von einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K 3. Grades aus. Die Abbildung zeigt den Graph der Grenzkostenfunktion K′, den Graph der Stückkostenfunktion k und den Graph der Preisfunktion p.



Prüfen Sie die folgenden Aussagen auf Richtigkeit und begründen Sie Ihre Entscheidung.

1 Der Graph von K besitzt eine Wendestelle in x = 3.

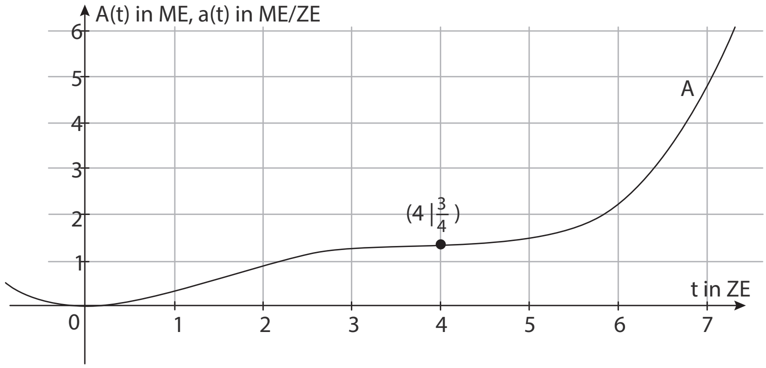
2 Je größer die produzierte Stückzahl, desto geringer sind die Stückkosten.

3 Die Schnittstelle von Preisgerade und Grenzkostenkurve ist die betriebsoptimale Stückzahl. 5

Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 11 **Lösungen Seite 21** **Punkte**

Das Unternehmen Nokateo möchte für die anstehende Sommersaison den Unisex-Pullover Habicht auf den Markt bringen und analysiert den Produktlebenszyklus für den Pullover aus der Vorsaison. Die Abbildung zeigt den Graphen der Gesamtabsatzfunktion A des Vorgängermodells.



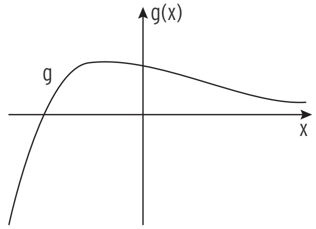
a) Skizzieren Sie den Graphen des Produktlebenszklus a in das vorgegebene Koordinatensystem. 2

b) Kennzeichnen Sie in der Grafik den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich. 1

c) Der Produktlebenszyklus a kann durch eine Funktion der Funktionenschar $a_b(t) = \frac{1}{16}t^3 - bt^2 + t$ beschrieben werden. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der oben eingezeichneten Gesamtabsatzfunktion A. 2

Aufgabe 12

Die Abbildung zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten, differenzierbaren Funktion g.
Betrachtet wird eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f, für deren erste Ableitungsfunktion $f'(x) = e^{g(x)}$ gilt.



a) Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Extrempunkt hat. 2

b) Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Wendepunkt hat. 3

Lösungen - Aufgaben zur Analysis

Hilfsmittelfreier Teil der Zentralen Abiturprüfung

Aufgabe 1 (Aufgaben Seite 12)

1.1 Der Graph der Grenzkostenfunktion schneidet den Graphen der variablen Stückkostenfunktion im Betriebsminimum, den der Stückkostenfunktion im Betriebsoptimum. Also gehört f_3 zur Grenzkostenfunktion. Die kurzfristige Preisuntergrenze ist geringer als die langfristige Preisuntergrenze, so dass f_2 der variablen Stückkostenfunktion und f_1 der Stückkostenfunktion zugeordnet werden kann.

1.2 Minimum der variablen Stückkosten:

$k_v(x) = a\,x^2 + bx + c$; $k_v'(x) = 2ax + b$; $k_v''(x) = 2a > 0$

Notwendig und hinreichend bei ertragsgesetzlicher Kostenfunktion:

$k_v'(x) = 0$ $2ax + b = 0$

$x = -\frac{b}{2a}$; $x > 0$, da $b < 0$; $a > 0$ Minimalstelle

Aufgabe 2

2.1 Nullstellenbetrachtung

$f(t) = 0$ $(40 - t)e^{0,05t} = 0$

da $e^{0,05t} \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ $t = 40$

Nach 40 Monaten verschwindet das Produkt vom Markt.

2.2 Extremwertbetrachtung: Notwendige Bedingung $f'(t) = 0$

$f'(t) = 0,05(40 - t)e^{0,05t} - e^{0,05t} = e^{0,05t}\,(0,05(40 - t) - 1)$

(Produkt- und Kettenregel)

$f'(t) = 0$ $0,05(40 - t) - 1 = 0$

$1 - 0,05t = 0$

$t = 20$

Dazu hinreichend für Maximum ($f''(20) = -\frac{1}{400} \cdot 20 \cdot e^1 = -\frac{e}{20} < 0$

Alternativ: $f'(20) = e^{0,05 \cdot 20}\,(0,05(40 - 20) - 1) = e^1 \cdot 0 = 0$

Lösungen - Aufgaben zur Analysis

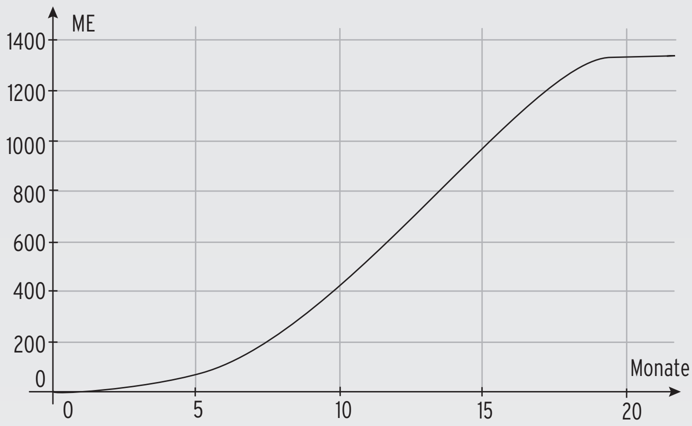
Aufgabe 3

(Aufgaben Seite 13)

3.1 Die gesamte Absatzmenge der ersten 20 Monate wird mit dem Integral berechnet.

$$\int_0^{20} f(t)dt = \int_0^{20} (-\tfrac{1}{10}t^3 + 2t^2)dt = \left[-\tfrac{1}{40}t^4 + \tfrac{2}{3}t^3\right]_0^{20} = -4000 + \frac{16000}{3} \approx 1333{,}3 \ \text{(ME)}$$

3.2



Aufgabe 4

4.1 Bei Erhöhung des Preises p_1 wird die Konsumentenrente im Teilmarkt 1 geringer und gleichzeitig die des Teilmarkts 2 höher. Bei Verringerung des Preises verhält es sich umgekehrt.

(Bei einem Preis p_1 von 9 GE/ME erlischt der Teilmarkt 1, bei einem Preis p_1 von 5 GE/ME erlischt der Teilmarkt 2.)

4.2 Damit die Konsumentenrente höchstmöglich abgeschöpft wird, muss der Preis p_1 so gewählt werden, dass der Flächeninhalt des Rechtecks unter dem Flächenstück zur Konsumentenrente Teilmarkt 1 möglichst groß wird (dadurch wird die Konsumentenrente möglichst klein).

$A(x) = x \cdot f(x) - 5x = -x^3 + 9x - 5x = -x^3 + 4x$

Extremwertbetrachtung: $A'(x) = 0$ $\qquad -3x^2 + 4 = 0$

$x^2 = \frac{4}{3}$

Mit $x > 0$: $\qquad x = \sqrt{\frac{4}{3}}$

Dazu hinreichend: $A''(\sqrt{\frac{4}{3}}) = -6\sqrt{\frac{4}{3}} < 0$

Lösungen - Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 5

(Aufgaben Seite 14)

1.1 Die variablen Stückkosten und die Grenzkosten sind im Betriebsminimum gleich, also ist aus der Tabelle abzulesen: $x_{BM} = 4$. Die Aussage ist also wahr.

1.2 Die Grenzkostenfunktion K′ gibt den Kostenzuwachs an. Dieser nimmt nur bis 3 ME ab (degressiver Zuwachs), danach wieder zu (progressiver Zuwachs). Daher ist die Aussage falsch.

1.3 Die Stückkostenfunktion und die variable Stückkostenfunktion unterscheiden sich nur durch den Term $\frac{K_{fix}}{x}$.

Daher gilt: $K_{fix} = k(1) - k_v(1) = 201 - 57 = 144$.

Die Aussage ist also wahr.

Aufgabe 6

1 $f(t) = 9t \cdot e^{-0,3t} + 6$; $f'(t) = 9 \cdot e^{-0,3t} + (-0,3) \cdot 9t \cdot e^{-0,3t} = 9 \cdot e^{-0,3t}(1 - 0,3t)$

(mit Produkt und Kettenregel)

Notwendige Bedingung: $f'(t) = 0$ $\quad 9(1 - 0,3t) = 0 \quad (e^{-0,3t} \neq 0)$

$-0,3t + 1 = 0$

$t = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$

Der maximale Absatz wird im 4. Monat erreicht.

2 Der stärkste Absatzrückgang entspricht dem Wendepunkt mit re/li-Krümmungswechsel.

Dieser liegt laut Graph bei ungefähr (8 | 12,5). Die Aussage ist also wahr.

Aufgabe 7

(Aufgaben Seite 15)

1 Schnittpunkt von Angebots- und Nachfragefunktion:

$p_A(x) = p_N(x)$ $\quad \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3}$

$x^2 = 16 \quad \Leftrightarrow x = \pm 4$

Da negative Produktionswerte ökonomisch sinnlos sind, liegt die Gleichgewichtsmenge bei 4 ME. Der Gleichgewichtspreis liegt bei 16 GE/ME: $\quad p_A(4) = p_N(4) = 16$

Die Abbildung bestätigt das Ergebnis.

2 Der Inhalt der zwischen dem Graphen von p_N und $y = 16$ eingeschlossenen Fläche stellt den Geldwert der Konsumentenrente dar, der Flächeninhalt zwischen $y = 16$ und dem Graphen von p_A den Geldwert der Produzentenrente. Die Fläche der Konsumentenrente ist kleiner als die Fläche der Produzentenrente, somit ist die Konsumentenrente geringer als die Produzentenrente.

Lösungen - Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 8 (Aufgaben Seite 15)

Gesamtkosten K mit $K(x) = 0{,}5x^3 - 8x^2 + 45x + 70$ mit $D_K = [0; 13]$

Minimum der variablen Stückkosten

variable Stückkosten $k_v(x) = 0{,}5x^2 - 8x + 45$; $k_v'(x) = x - 8$; $k_v''(x) = 1 > 0$

Minimum der variablen Stückkosten: $k_v'(x) = 0$ für $x = 8$

Nachweis: $k_v(8) = 13$ ist das Minimum wegen $k_v''(x) = 1 > 0$

Interpretation: Der minimale Verkaufspreis, bei dem bereits die fixen Kosten als Verlust in Kauf genommen werden, beträgt 13 GE/ME.

Aufgabe 9

Ableitung von f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$ mit der Produktregel

Mit $u(x) = 2x^2 + 5 \Rightarrow u'(x) = 4x$ und $v(x) = e^{-2x} \Rightarrow v'(x) = -2e^{-2x}$

folgt durch Einsetzen in	$f'(x) = u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x)$:
	$f'(x) = (2x^2 + 5) \cdot (-2e^{-2x}) + e^{-2x} \cdot 4x$
Zusammenfassen durch Ausklammern:	$f'(x) = e^{-2x}\left((2x^2 + 5) \cdot (-2) + 4x\right)$
Erste Ableitung von f:	$f'(x) = e^{-2x}\left(-4x^2 - 10 + 4x\right)$

Aufgabe 10

1 Die Aussage ist richtig, da das Grenzkostenminimum etwa in $x = 3$ liegt.
Damit ist $K''(3) = 0$; die notwendige Bedingung für Wendestelle ist erfüllt.

2 Die Aussage ist falsch, denn ab dem Betriebsoptimum (Stückkostenminimum) steigen die Stückkosten wieder an.

3 Die Aussage ist falsch, da die betriebsoptimale Stückzahl x_{BO} die Schnittstelle der Grenzkosten- und der Stückkostenfunktion ist.
Oder: x_{BO} ist die Minimalstelle von $k(x)$ ($k(x_{BO})$ langfristige Preisuntergrenze)
Die Grenzkostenkurve schneidet die Stückkostenkurve in deren Tiefpunkt.

II Teil B der zentralen Abiturprüfung mit Hilfsmittel (MMS)

1 Analysis

Mathematische Formeln Wirtschaft und Verwaltung

Kostenfunktionen x: Ausbringungsmenge in ME y: Gesamtkosten in GE	Gesamtkostenfunktion K mit	$K(x) = K_v(x) + K_f$
	Ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit	K(x) = ax3 + bx2 + cx + d
	K wächst degressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) < 0$
	K wächst progressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) > 0$
	Funktion der variablen Gesamtkosten	$K_v(x)$
	Funktion der gesamten Stückkosten k (Funktion der Durchschnittskosten)	$k(x) = \frac{K(x)}{x}$
	Funktion der variablen Stückkosten k_v	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
	Grenzkostenfunktion	$K'(x)$ Kostenzuwachs
	Grenzstückkostenfunktion	$k'(x)$
	Betriebsoptimum (Minimalstelle von k(x))	x_{BO}
	Langfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BO})$
	Betriebsminimum (Minimalstelle von $k_v(x)$)	x_{BM}
	kurzfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BM})$
	Nachfragefunktion (Preis-Absatz-Funktion)	$p_N(x)$
	Angebotsfunktion	$p_A(x)$
	Gleichgewichtsmenge	x_G; Schnittstelle von $p_N(x)$ und $p_A(x)$
	Gleichgewichtspreis	$p_G = p_N(x_G) = p_A(x_G)$
	Marktgleichgewicht MG	$MG\ (x_G \mid p_G)$
	Konsumentenrente Differenz zwischen den theoretisch möglichen und den tatsächlichen Ausgaben für ein Produkt.	$\int_0^{x_G} (p_N(x) - p_G)dx$
	Produzentenrente Differenz aus erzieltem Umsatz und mindestens erwartetem Umsatz.	$\int_0^{x_G} (p_G - p_A(x))dx$
	Erlösfunktion	$E(x) = p \cdot x$; p Preis pro ME $E(x) = p_N(x) \cdot x$; $p_N(x)$ Preis abhängig von x
	Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$
	Grenzgewinnfunktion	$G'(x)$
	Gewinnschwelle	x_{GS} 1. positive Nullstelle von G
	Gewinngrenze	x_{GG} 2. positive Nullstelle von G
	gewinnmaximale Ausbringungsmenge Maximalstelle von G(x): $G'(x) = 0$	x_{max}
	Cournot'scher Punkt	$C(x_{max} \mid p_N(x_{max}))$
	Stückdeckungsbeitrag d = dB	$dB(x) = p(x) - k_v(x)$
	Deckungsbeitrag D = DB	$DB(x) = G(x) + K_{fix} = E(x) - K_v(x)$

Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 1 **Lösung Seite 74**

Die Pyrokomet GmbH stellt Feuerwerke aller Art her.
Unter anderem werden Feuerwerksraketen, Tischfeuerwerke und Böllersortimente für unterschiedliche Anlässe – z. B. für Hochzeiten – produziert.

1.1 Eine Aufgabe der Marketingabteilung der Pyrokomet GmbH besteht in der Auswertung umfangreicher Marktanalysen. Aus den Daten zur Produktsparte Tischfeuerwerk ergibt sich die folgende Angebotsfunktion p_A und die Nachfragesituation p_N:

$p_A(x) = a \cdot e^{0,2x} + 7$; $a, x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0, a > 0$.

$p_N(x) = 6 \cdot e^{-0,015x+2}$; $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$.

$p_A(x)$ und $p_N(x)$ geben den Preis in Geldeinheiten (GE) pro Mengeneinheit (ME)in Abhängigkeit von der angebotenen bzw. nachgefragten Menge x in ME an.

Dabei ist a ein von Steuern abhängiger Parameter.

1.1.1 Berechnen Sie für a = 0,03 das Marktgleichgewicht. 3 Punkte

1.1.2 Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters a auf das Marktgleichgewicht. 3 Punkte

1.1.3 Der Leiter der Marketingabteilung behauptet:
„Bei einer Gleichgewichtsmenge von 30 ME am Markt ist die Produzentenrente mindestens doppelt so hoch wie die Konsumentenrente.“
Beweisen oder widerlegen Sie seine Aussage.
6 Punkte

1.2 Der Produktentwickler erläutert, dass die Kosten zur Herstellung der Tischfeuerwerke mit Hilfe einer ganzrationalen Funktion dritten Grades modelliert werden können. Folgende Eckdaten liegen dazu vor:

- Bei einer Ausbringungsmenge von 10 ME liegen die Gesamtkosten bei 270 GE.
- Das Betriebsminimum ergibt sich bei 10 ME.
- Die variablen Stückkosten in Höhe von 32 GE/ME werden bei einer Ausbringungsmenge von 20 ME erreicht.
- Die Grenzkosten bei 5 ME betragen 13,25 GE/ME.

1.2.1 Leiten Sie aus den Eckdaten die Gleichung der Kostenfunktion K her. 8 Punkte

Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 1

Gehen Sie im Folgenden von der Kostenfunktion K aus mit

$K(x) = 0{,}15x^3 - 3x^2 + 32x + 100;\ x \in \mathbb{R},\ x \geq 0.$

1.2.2 Der Produktentwickler gibt an, dass der Preis des Tischfeuerwerks mindestens 20 GE/ME betragen sollte, um langfristig die Kosten zu decken.
Beweisen oder widerlegen Sie seine Aussage. 6 Punkte

Aufgrund der bisherigen Analysen entschließt sich die Pyrokomet GmbH, das Tischfeuerwerk zu 27 GE/ME am Markt anzubieten.
Das Verhältnis von Gewinn zu Erlös wird als Rentabilität bzw. Gewinnquote bezeichnet. Entsprechend wird die Funktion der Rentabilität R definiert als Quotient aus Gewinnfunktion G und Erlösfunktion E:

$$R(x) = \frac{G(x)}{E(x)},\ x \in \mathbb{R} \text{ mit } x > 0$$

1.2.3 Berechnen Sie die Rentabilität für 10 ME, 12 ME und für 15 ME. 3 Punkte

1.2.4 Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe 1.2.3 hinsichtlich der Gewinnsituation. 3 Punkte

1.2.5 Zeigen Sie allgemein, dass die Rentabilität nicht größer als 1 werden kann.
4 Punkte

1.3 Die Verkaufsleiterin stellt eine Prognose für die Absatzzahlen der Hochzeitsfeuerwerke im nächsten Jahr auf. Diese modelliert sie mit
$f_k(t) = 200 \cdot (k \cdot t^2 + t) \cdot e^{-0{,}1t},\ \ 0 \leq t \leq 52,\ k \geq 0$
Dabei steht t für die Zeit seit Jahresbeginn in Wochen, k ist ein konjunkturabhängiger Parameter und $f_k(t)$ gibt die prognostizierten Absatzzahlen in Mengeneinheiten pro Woche an.

1.3.1 Bestimmen Sie den Wert des Parameters k so, dass die Absatzzahlen nach 15 Wochen ein lokales Maximum erreichen.
5 Punkte

1.3.2 Innerhalb eines Jahres sollen insgesamt 200 000 ME der Hochzeitsfeuerwerke abgesetzt werden.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert des Parameters k.
4 Punkte

(Abitur Berufskolleg NRW 2016) 45 Punkte

Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 2 **Lösung Seite 76**

Ob als Filterkaffee, Espresso, Cappuccino oder Latte Macchiato – Kaffee ist das Lieblingsgetränk der Deutschen.

War bis vor wenigen Jahren in fast jedem Haushalt eine Kaffeemaschine zur Zubereitung von Filterkaffee zu finden, halten inzwischen die Portionskaffeemaschinen Einzug. Der Markt an Kapsel- und Pad-Automaten wächst. Daher hat sich das Unternehmen Kaffeeduft auf die Produktion und den Verkauf von Kaffeekapseln und den zugehörigen Kaffeemaschinen spezialisiert.

Mehrere Discounter haben in der letzten Zeit Kapseln entwickelt, die zu der von Kaffeeduft hergestellten Maschine „Caps" kompatibel sind. Daher soll dieses Modell durch die neuartige Maschine „Capsule" ersetzt werden, die über ein modifiziertes Anstichverfahren verfügt, wodurch nur Kapseln von Kaffeeduft verwendet werden können.

1.1 Um sich einen Überblick über die Absatzsituation zu verschaffen, soll die Absatzentwicklung der Maschinen des bisherigen Modells „Caps" analysiert werden. Die Tabelle beschreibt die Absatzzahlen der jeweils angegebenen Monate.

Monat seit Januar 2014	0	8	9	12	15
Absatzzahlen in Stück pro Monat	0	33 000	40 000	63 000	67 000

1.1.1 Stellen Sie eine ganzrationale Funktion h vierten Grades auf, die die Absatzentwicklung beschreibt. Dabei gibt t die Zeit in Monaten nach der Markteinführung im Januar 2014 und h(t) die monatlichen Absatzzahlen in Stück zum Zeitpunkt t an. Runden Sie die Koeffizienten auf zwei Nachkommastellen. (6 Punkte)

1.1.2 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h. (4 Punkte)

1.2 Der Vertriebsleiter geht davon aus, dass sich die Entwicklung der Absatzzahlen des Modells „Caps" durch die Funktion f mit

$$f(t) = -10{,}5t^4 + 300t^3 - 2500t^2 + 10000\,t$$

(t Zeit in Monaten, f(t) zugehörige monatliche Absatzzahlen in Stück) beschreiben lässt.

Er vertritt die Auffassung, dass der Verlauf der Absatzzahlen des Modells „Caps" einem Produktlebenszyklus mit den folgenden Phasen entspricht:

Phase	Einführung	Wachstum	Reife	Sättigung	Degeneration
Absatz	degressiv steigend	progressiv steigend	degressiv steigend	langsam fallend	stark fallend

Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 2

1.2.1 Untersuchen Sie die Länge des Produktlebenszyklus, d. h., wie lange mit positiven Absatzzahlen pro Monat für das Modell „Caps“ zu rechnen ist. (3 Punkte)

1.2.2 Bestimmen Sie den Zeitpunkt des Beginns der Wachstumsphase. (6 Punkte)

1.2.3 Der Vertriebsleiter behauptet, dass sich das Produkt 15 Monate nach Markteinführung ($t = 15$) noch vor der Sättigungsphase befindet.
Widerlegen Sie die Aussage des Vertriebsleiters. (3 Punkte)

1.2.4 Die Betriebsleitung plant das Produkt vom Markt zu nehmen, wenn die Absatzmenge auf 20 % der maximalen Absatzmenge gesunken ist.
Berechnen Sie diesen Zeitpunkt. (5 Punkte)

1.3 Die Vertriebsleitung geht davon aus, dass sich die Absatzzahlen des Nachfolgermodells „Capsule“ in Abhängigkeit von der Zeit t in Monaten durch die Funktion $g_{b,c}$ mit

$g_{b,c}(t) = c \cdot e^{-0{,}01 \cdot (t-b)^2}$, $t \geq 0$, $b > 0$, $c > 0$ beschreiben lassen.

Dabei gibt $g_{b,c}(t)$ die Anzahl der verkauften Kaffeemaschinen in ME im Monat t an.
b und c sind konjunkturbedingte Parameter.

1.3.1 Bestimmen Sie den Zeitpunkt des maximalen Absatzes. (8 Punkte)

1.3.2 Analysieren Sie die Auswirkungen der Parameter b und c auf den Zeitpunkt und die Höhe des maximalen monatlichen Absatzes. (4 Punkte)

1.3.3 Nach weiteren Untersuchungen geht der Vertriebsleiter jetzt von $b = 20$ aus, so dass die monatlichen Absatzzahlen durch die Funktion

$g_c(t) = c \cdot e^{-0{,}01 \cdot (t-20)^2}$, $t, c \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $c > 0$

beschrieben werden können. Er erwartet, dass innerhalb des ersten Jahres durchschnittlich 15 ME pro Monat verkauft werden.
Bestimmen Sie den Wert c so, dass dies erfüllt werden kann. (6 Punkte)

45 Punkte

(Abitur Berufskolleg NRW 2015.)

Lösungen - Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 1 (Aufgabe Seite 70)

p_A: $p_A(x) = a \cdot e^{0,2x} + 7$; $a, x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$, $a > 0$.

p_N: $p_N(x) = 6 \cdot e^{-0,015x+2}$; $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$

1.1.1 Für a = 0,03 das Marktgleichgewicht

$p_N(x) = p_A(x) \Leftrightarrow 6 \cdot e^{-0,015x+2} = 0,03 \cdot e^{0,2x} + 7 \Leftrightarrow x \approx 32,56$

$p_N(32,56) \approx 27,2$

Die Gleichgewichtsmenge liegt bei ca. 32,56 ME und der Gleichgewichtspreis bei 27,2 GE/ME.

1.1.2 **Einfluss des Parameters a auf das Marktgleichgewicht**

Wird a größer, so hat die Angebotsfunktion p_A eine stärkere Steigung und damit verringert sich die Gleichgewichtsmenge. Der Gleichgewichtspreis steigt.

1.1.3 **Beweis der Aussage des Leiters der Marketingabteilung**

Konsumentenrente: $KR = \int_0^{30} p_N(x)dx - p_N(30) \cdot 30 \approx 222,97$

Gleichgewichtspreis: $p_N(30) \approx 28,27$

Damit ergibt sich für den Parameter a: $p_A(30) = 28,27 \Leftrightarrow a \approx 0,053$

Produzentenrente: $PR = \int_0^{30} (p_A(30) - p_A(x))dx \approx 531,98$

Da die Produzentenrente etwa 532 GE und die Konsumentenrente etwa 223 GE betragen, trifft die Behauptung des Leiters der Marketingabteilung zu.

1.2.1 **Herleitung der Kostenfunktion**

K ist vom Grad 3: $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $k_v(x) = ax^2 + bx + c$; $k'_v(x) = 2ax + b$

Bedingungen und LGS:

$K(10) = 1000a + 100b + 10c + d = 270$

$k'_v(10) = 20a + b = 0$

$k_v(20) = 400a + 20b + c = 32$

$K'(5) = 75a + 10b + c = 13,25$

LGS lösen: $a = 0,15$, $b = -3$; $c = 32$; $d = 100$

Es ergibt sich die Kostenfunktion K mit $K(x) = 0,15x^3 - 3x^2 + 32x + 100$

Lösungen - Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 1

1.2.2 **Widerlegung der Aussage des Produktentwicklers**

Langfristige Preisuntergrenze:

$k(x) = 0{,}15x^2 - 3x + 32 + \frac{100}{x}$; $k'(x) = 0{,}3x - 3 - \frac{100}{x^2}$; $k''(x) = 0{,}3 + \frac{200}{x^3}$

notwendige Bed.: $k'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 12{,}23$

hinreichende Bed.: $k'(x) = 0 \wedge k''(x) > 0$

$k''(12{,}23) \approx 0{,}41 > 0$

$k(12{,}23) \approx 25{,}92$

Langfristig muss der Preis also mindestens 25,92 GE/ME betragen. Die Aussage des Produktentwicklers trifft daher nicht zu. .

1.2.3 **Umsatzrentabilität für 10 ME, 12 ME und für 15 ME**

Aufzustellen sind : $E(x) = 27x$ und $G(x) = -0{,}15x^3 + 3x^2 - 5x - 100$

Damit ergeben sich die folgenden Rentabilitätswerte:

$R(10) = 0$ $R(12) \approx 0{,}04$ $R(15) \approx -0{,}02$

1.2.4 **Interpretation die Ergebnisse hinsichtlich der Gewinnsituation**

Ist die Rentabilität gleich Null (hier bei 10 ME), so bedeutet das, dass weder Gewinn noch Verlust entsteht. Beim Verkauf von 12 ME ergibt sich eine positive Rentabilität und somit ein Gewinn. Bei 15 ME ist die Rentabilität negativ, es liegt ein Verlust vor. Somit liegt die Gewinnschwelle bei 10 ME, bei einer Produktionsmenge von 12 ME arbeitet man in der Gewinnzone, bei einer Produktionsmenge von 15 ME nicht mehr.

1.2.5 Die Rentabilität kann nicht größer als 1 werden

Da der Gewinn nicht größer als der Erlös ist, gilt für $x > 0$:

$G(x) < E(x) \Leftrightarrow \frac{G(x)}{E(x)} < 1 \Leftrightarrow R(x) < 1$

1.3.1 **Wert des Parameters k**

Notwendige Bedingung für Maximum:

Mit $f'_k(15) = 0 \Leftrightarrow (1500\,k - 100)e^{-1{,}5} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{15}$

Mit $f''_{\frac{1}{15}}(15) \approx -7{,}4 < 0$ ergibt sich das Maximum in der 15. Woche.

1.3.2 **Zugehöriger Wert des Parameters k**

Ansatz: $\int_0^{52} 200 \cdot (k \cdot t^2 + t) \cdot e^{-0{,}1t}\,dt = 200000 \Leftrightarrow k \approx 0{,}51$

Um innerhalb eines Jahres einen Gesamtabsatz von 200 000 ME zu erzielen, muss der Parameter bei 0,51 liegen.

3 Stochastik

Formelsammlung zur Stochastik

Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$

Für das Gegenereignis $\overline{A}$: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Additionssatz $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Multiplikationssatz $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Zufallsvariable X: $e_i \rightarrow X(e_i) = x_i$

Erwartungswert: $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$

Varianz: $V(X) = (x_1 - (E(X))^2 \cdot P(X = x_1) + \ldots + (x_n - (E(X))^2 \cdot P(X = x_n)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Binomialverteilung B(n; p; k)

Die Zufallsgröße X ist **binomialverteilt:** $X \sim B_{n;\,p}$

Formel von Bernoulli $P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

Erwartungswert $\mu = E(X) = n \cdot p$

Varianz: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Kumulierte Binomialverteilung **F(n; p; k):**

Linksseitiges Intervall: $P(X \leq 8) = F(n; p; 8)$

Punktwahrscheinlichkeit: $P(X = 8) = B(n; p; 8)$

Rechtsseitiges Intervall: $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$

Intervallwahrscheinlichkeit: $P(3 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 2)$

Hypothesentest (Signifikanztest):

Fehler 1. Art (α-Fehler): Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese H_0 abgelehnt wird, obwohl sie richtig ist.

Fehler 2. Art (β-Fehler): Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese H_0 nicht abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist.

Die bei einem Test bzw. einer Untersuchung akzeptierte Wahrscheinlichkeit, bei einer Entscheidung einen Fehler 1. Art zu begehen, nennt man auch Signifikanzniveau α.

Aufgaben zur Stochastik – Hypothesentest und ökonomische Anwendungen

Aufgabe 1 **Lösung Seite 121**

Im Bereich Thermodruck verwendet die Druckfix GmbH neben den Walzen aus eigener Herstellung auch Walzen, die regional hergestellt werden und solche, die aus Asien importiert werden. Vor dem Einbau einer Walze durchläuft diese bei Druckfix eine Qualitätsanalyse. Defekte Walzen werden als Ausschuss aussortiert.
Die folgende Tabelle gibt Auskunft über die jährliche Bezugsmenge, die Ausschussquote und den Bezugspreis

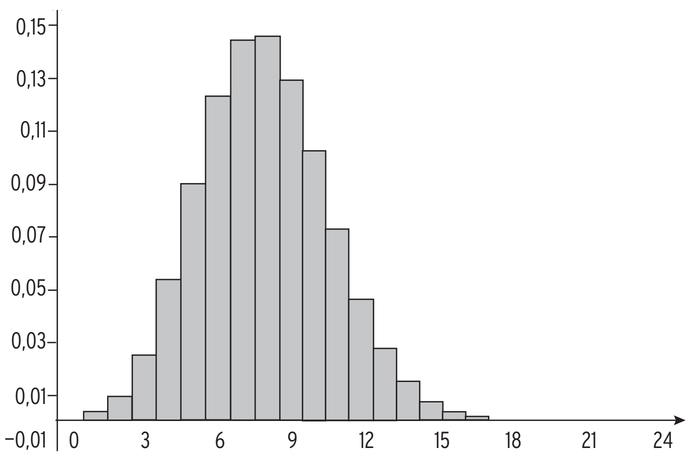
Herkunft	**Druckfix**	**Regional**	**Asien**
Bezugsmenge (Stück)	2000	3000	5000
Ausschussquote (%)	2	5	8
Bezugspreis (€/Stück)	49,98	39,37	18,69

1.1 Für die Preiskalkulation wird der Bezugspreis der defekten Walzen auf die intakten Walzen umgelegt. Ermitteln Sie die jährliche Ausschussmenge, die Anzahl intakter Walzen und den durchschnittlichen Einstandspreis für eine intakte Walze. (8 Punkte)

1.2 Einer Lieferung aus Asien wird eine Stichprobe von 100 Walzen entnommen und hinsichtlich ihrer Qualität untersucht. Man kann davon ausgehen, dass die Verteilung der Zufallsgröße X: „Anzahl der defekten Walzen in der Stichprobe" binomialverteilt ist.

1.2.1 Bestimmen Sie den Erwartungswert der Verteilung und die Wahrscheinlichkeit, dass X tatsächlich den Erwartungswert annimmt. (3 Punkte)

1.2.2 Das folgende Histogramm zeigt die Verteilung der Zufallsgröße X.



Aufgaben zur Stochastik

Aufgabe 1

1.2.2 Prüfen Sie mit Hilfe des Histogramms folgende Aussagen der Qualitätsabteilung:

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 20 Walzen defekt sind, ist so gut wie Null.

B: Die Wahrscheinlichkeit, dass 9 Walzen defekt sind, ist größer als die von jeder anderen Anzahl defekter Walzen.

C: Es ist gleich wahrscheinlich 6 oder 9 defekte Walzen in der Stichprobe zu haben.

D: Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Walzen defekt sind, ist kleiner als 3%.

(5 Punkte)

1.2.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Walzen defekt sind.

(3 Punkte)

Gehen Sie im weiteren Verlauf von Lieferungen im Umfang von n = 100 und binomialverteilten Zufallsgrößen aus.

1.3 Es werden alle 100 Walzen einer regionalen Lieferung einer Qualitätsanalyse unterzogen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Defekt beträgt $p = 0{,}05$.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Höchstens 2 Walzen sind defekt.

B: Es gibt mindestens 3 defekte Walzen.

C: Es befinden sich mindestens 4 und höchstens 7 defekte Walzen in der Stichprobe.

D: In der Stichprobe befindet sich die erwartete Menge intakter Walzen.

E: Alle Walzen sind intakt. (12 Punkte)

1.4 Der asiatische Lieferant beabsichtigt seine Preise zu erhöhen und begründet dies mit einer Qualitätsverbesserung, da der Produktionsprozess neu strukturiert wurde. Der Lieferant möchte mit einem Hypothesentest nachweisen, dass seine Ausschussquote auf unter 4 % gesunken ist.

1.4.1 Leiten Sie eine Entscheidungsregel über die Anzahl defekter Walzen in einer Stichprobe von 100 bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}1$ her. (8 Punkte)

1.4.2 Bestimmen Sie den Fehler 2. Art, wenn die tatsächliche Ausschussquote bei 2 % bzw. 3 % liegt. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis aus Sicht des Lieferanten. (6 Punkte)

(NRW Berufskolleg 2010.)

Aufgaben zur Stochastik

Aufgabe 2 **Lösung Seite 122**

Der Küchenhersteller K-Küchen hat eine Luxus-Küche für das obere Preissegment entwickelt, die sich durch ein hochwertiges Schubladensystem, Echtholzfronten und eine patentierte Schrankbeleuchtung von den bisher produzierten Produktlinien unterscheidet.

3.3 Vor der Auslieferung der Luxus-Küchen überprüft K-Küchen die Beleuchtungen. Erfahrungsgemäß funktionieren 10 % der Beleuchtungen nicht einwandfrei. Ein nachträglicher Austausch der defekten Beleuchtung kostet das Unternehmen 80 € pro Küche.
Ein Prüfgerät, das die Beleuchtungen bereits vor dem Einbau prüft, kann für 580 € erworben werden. Sein Einsatz kostet täglich 30 € und ein Austausch der als defekt eingestuften Beleuchtung kostet dann nur 20 €. Das Testgerät erkennt mit 99 %-iger Sicherheit eine defekte Beleuchtung, allerdings zeigt es auch bei 2 % der funktionierenden Beleuchtungen einen Defekt an.

3.3.1 Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm. 4 Punkte

3.3.2 In 100 Tagen werden insgesamt 1000 Küchen produziert.
Beurteilen Sie, ob die Anschaffung des Testgeräts zu einer Kostenersparnis führt.
7 Punkte

Für die Echtholzfronten bestellt K-Küchen Kirschbaum-Furnierholzplatten bei einem heimischen Holzlieferanten, der damit wirbt, dass mindestens 85 % seiner Platten über eine einheitliche Maserung verfügen.

3.4 Ein Mitarbeiter von K-Küchen glaubt dem Werbeversprechen des Holzlieferanten nicht und prüft 80 der gelieferten Platten. Damit soll die Behauptung des Herstellers auf einem Signifikanzniveau von 5 % widerlegt werden.

3.4.1 Leiten Sie eine Entscheidungsregel her. 8 Punkte

(Teile aus NRW Berufskolleg 2012.)

Zentrale Abiturprüfung 2023

Leistungskursfach Mathematik

Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

Beschreibung der Ausgangssituation zu Aufgabenteil A

Die FruitLane GmbH stellt hochwertige Smoothies aus frischem Obst her.

Aufgabe 1 (24 Punkte)

1.1 Analysis

In Abbildung 1 sind für den Smoothie Feely die Graphen der Kostenfunktion K, der Grenzkostenfunktion K′ und der Preis-Absatz-Funktion p dargestellt.
Dabei wird die Menge x in Mengeneinheiten (ME) an gegeben,
K(x) in Geldeinheiten (GE)
und K′ (x) und p(x) in GE/ME.

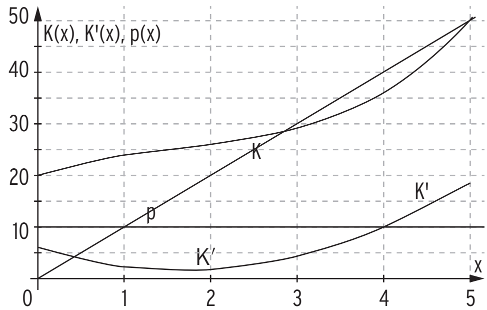


Abbildung 1

1.1.1 Beurteilen Sie begründet, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind.

A1: Der minimale Kostenanstieg liegt bei 3 ME.

A2: Bei 5 ME beträgt der Gewinn 0 GE.

A3: Der maximale Gewinn beträgt 15 GE.

(6 Punkte)

1.2 Analysis

Die FruitLane befindet sich in Konkurrenz zu anderen obstverarbeitenden Unternehmen. Für die Nachfragefunktion p_N und die Angebotsfunktion p_A gilt in Abhängigkeit vom Parameter a:

$p_N(x) = -ax + 5a^2$

$p_A(x) = 2x^2 + ax + a^2$ mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

Dabei gibt x mit $x \geq 0$ die Menge in ME und $p_A(x)$ bzw. $p_N(x)$ den Preis in GE/ME an.

1.2.1 Bestätigen Sie die beiden Aussagen:

A: $S(a|4a^2)$ ist der Schnittpunkt von p_A und p_N.

B: $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5a^2$ ist eine Stammfunktion von p_N.

(3 Punkte)

1.2.2 Ermitteln Sie die Konsumentenrente in Abhängigkeit von a.

(3 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2023
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

1.3 Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Es werden Smoothies aus Erdbeeren und Johannisbeeren hergestellt und als Sorten S1, S2 und S3 angeboten. Alle anderen Zutaten können in dieser Aufgabe unberücksichtigt bleiben. In der folgenden Tabelle wird angegeben, wie viele Mengeneinheiten (ME) der Erdbeeren bzw. Johannisbeeren für je eine ME der Sorten S1, S2 und S3 benötigt werden.

	S1	S2	S3
Erdbeeren	4	6	2
Johannisbeeren	4	2	6

1.3.1 Berechnen Sie die Mengen an Erdbeeren, die insgesamt benötigt werden, um jeweils 5 ME der Sorten S1, S2 und S3 herzustellen. (2 Punkte)

1.3.2 Es werden 60 ME Erdbeeren und 100 ME Johannisbeeren verarbeitet. Zur Berechnung der daraus hergestellten Mengen der Sorten S1, S2 und S3 wird ein lineares Gleichungssystem aufgestellt.

Die entsprechende erweiterte Koeffizientenmatrix lautet: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 2 & 60 \\ 4 & 2 & 6 & 100 \end{array}\right)$

Daraus ergibt sich die Diagonalform $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \end{array}\right)$

Bestimmen Sie den Lösungsvektor, der die möglichen Mengenkombinationen für die Herstellung der Sorten angibt. (4 Punkte)

1.4 Stochastik

Leider kommt es manchmal durch Oxidationsprozesse der zerkleinerten Früchte zu einer Verfärbung der Smoothies. Zudem erfüllen einige Smoothies die strenge Qualitätsanforderung an die Haltbarkeit nicht.

Folgende Wahrscheinlichkeiten wurden ermittelt:

	Haltbarkeitsanforderung erfüllt (H)	Haltbarkeitsanforderung nicht erfüllt $(\overline{H})$
Verfärbung (V)	0,08	
Keine Verfärbung $(\overline{V})$	0,72	0,18

1.4.1 Berechnen Sie die folgenden beiden Wahrscheinlichkeiten und erläutern Sie deren Bedeutung im Sachzusammenhang.

$P(V \cap \overline{H})$; $P_V(\overline{H})$ (3 Punkte)

1.4.2 Beurteilen Sie, ob die Ereignisse V und H stochastisch unabhängig sind und interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang. (3 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2023

Aufgabenteil B: Hilfsmittel MMS (CAS)
Aufgabenstellung

Die *FruitLane* GmbH stellt hochwertige Smoothies aus frischem Obst her.

Aufgabe 2 – Analysis (32 Punkte)

2.1 Nicht in den verbindlichen Schwerpunkten für das Abitur 2026 enthalten

(10 Punkte)


Abbildung 2

2.2 Zur Erschließung eines neuen Marktes müssen die Produktionsmengen erhöht werden. Deshalb wird eine neue Produktionsanlage angeschafft, wodurch sich die Kosten folgendermaßen ändern:

Menge in ME	0	2	5	10	15	20
Kosten in GE	20	25	32	50	80	200

Die monatliche Kapazitätsgrenze liegt jetzt bei 20 ME.

2.2.1 Die Kosten werden nicht mehr abschnittsweise modelliert.
Bestimmen Sie jeweils durch Regression
- eine ganzrationale Funktion 3. Grades
- eine Exponentialfunktion der Form $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$ [bzw. $f(x) = a \cdot b^x$]

und beurteilen Sie, welche der beiden Funktionen die Kostensituation besser beschreibt.

(4 Punkte)

2.2.2 *FruitLane* geht aufgrund der Regression von der Kostenfunktion K_{neu} aus:
$K_{neu}(x) = 0{,}05x^3 - x^2 + 7x + 18$ mit $0 \le x \le 20$
Im aktuellen Monat werden die Smoothies zu einem Preis von 13 GE/ME verkauft.
Berechnen Sie den Gewinn an der Kapazitätsgrenze von 20 ME.

(3 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2023

Aufgabenteil B: Aufgabe 2 — Analysis

2.3 Eine neue Smoothie-Sorte soll auf den Markt gebracht werden. Der monatliche Absatz der neuen Sorte kann mit der Funktion a_w dargestellt werden. Dabei gibt t die Zeit in Monaten, $w > 0$ den Einfluss einer Werbeaktion auf die Höhe des Absatzes (Werbeparameter) und $a_w(t)$ den Absatz in ME/Monat an:

$$a_w(t) = 20t \cdot e^{-\frac{1}{2w} \cdot t} + 30 \text{ mit } t \geq 0.$$

2.3.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes in Abhängigkeit von w.

(4 Punkte)

2.3.2 Zum Zeitpunkt $t = 5$ soll ein Absatz von 100 ME/Monat erreicht werden. Bestimmen Sie die Höhe des Werbeparameters w, damit dies erreicht wird.

(3 Punkte)

2.3.3 Untersuchen Sie, wie sich der Absatz nach der Funktion a_w langfristig entwickeln wird.

(3 Punkte)

2.3.4 Ermitteln Sie, wie hoch der Werbeparameter w sein muss, damit in den ersten 12 Monaten pro Monat durchschnittlich 80 ME verkauft werden.

(5 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2023

Aufgabenteil B: Aufgabe 3 — Lineare Algebra/Analytische Geometrie

(32 Punkte)

Die *FruitLane GmbH* verarbeitet die Obstsorten Apfel, Orange und Himbeere zu den Smoothies S-rot und S-gelb. Danach werden die Smoothies zu den Packungen P1 und P2 für den Verkauf zusammengestellt.

Die Mengen der einzelnen Obstsorten in Gramm für die Smoothies sowie für die Packungen sind den nebenstehenden Tabellen zu entnehmen.

	S-rot	S-gelb
Apfel	40	50
Orange	20	50
Himbeere	40	0

	P1	P2
Apfel	360	380
Orange	280	340
Himbeere	160	80

Für die Rohstoffkosten gilt:

	Apfel	Orange	Himbeere
Kosten in Euro pro g	0,001	0,003	0,008

Zentrale Abiturprüfung 2023

Aufgabenteil B: Aufgabe 3 — Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Die Fertigungskosten (Kosten für die Verarbeitung der Rohstoffe zu Smoothies und das Abpacken) sowie die Verkaufspreise betragen:

	P1	P2
Fertigungskosten in Euro pro Packung	1,5	1

	P1	P2
Verkaufspreis in Euro pro Packung	p	22

3.1.1 Ein Einzelhändler bestellt 20 Packungen P1 und 30 Packungen P2.
Untersuchen Sie, ob einLagerbestand von 19 000 g Äpfeln, 14 500 g Orangen und 6000 g Himbeeren zur Erfüllung des Auftrags ausreicht.
(3 Punkte)


Abbildung 3

3.1.2 Bestimmen Sie die Anzahl der Smoothies S-rot und S-gelb in einer Packung P1 und die in einer Packung P2. (4 Punkte)

3.1.3 Ermitteln Sie den Preis für die Packung P1 so, dass mit einem Auftrag in Höhe von 20 Packungen P1 und 30 Packungen P2 ein Deckungsbeitrag von 1000 € erzielt wird.
(6 Punkte)

3.2 Die Smoothies sollen nach neuen Rezepturen zusammengesetzt werden.
Die Menge der verwendeten Obstsorten (in Gramm) zur Herstellung der Smoothies ist in der folgenden Tabelle angegeben. Bei den neuen Rezepturen sind einige Variationen möglich. Diese Variationen werden durch die Variable t ausgedrückt.

	S-rot	S-gelb
Apfel	$t^2 - 1$	25
Orange	50	$3t$
Himbeere	$25 - t$	0

Zentrale Abiturprüfung 2023

Aufgabenteil B: Aufgabe 3 — Lineare Algebra/Analytische Geometrie

3.2.1 Berechnen Sie die Werte, die t annehmen kann, sodass sich positive Produktionszahlen ergeben.

(3 Punkte)

3.2.2 Es sollen 200 Smoothies der Sorte S-rot und 100 der Sorte S-gelb möglichst günstig produziert werden.
Bestimmen Sie den Wert für t, sodass die Rohstoffkosten möglichst gering sind, und geben Sie die geringsten Rohstoffkosten für diese Produktion an.

(5 Punkte)

3.3 Es wird das Kaufverhalten bezüglich der Smoothie-Sorten S-rot (r), S-gelb (g) und einer weiteren Sorte S-orange (o) untersucht.
Die stochastische Matrix M gibt das Wechselverhalten der Kundschaft von einer Woche zur nächsten wieder.

$$M = \begin{array}{c} \\ r \\ g \\ o \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & g & o \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ a & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array}$$

3.3.1 Erklären Sie, warum a den Wert 0,2 annehmen muss.

(4 Punkte)

3.3.2 In einem Bezirk haben 4500 Personen den roten, 2200 Personen den gelben und 1300 Personen den orangenen Smoothie gekauft.
Berechnen Sie, wie die Verteilung der Kundschaft eine Woche zuvor war und wie sie sich nach zwei Wochen entwickeln wird.

(4 Punkte)

3.4 *FruitLane* bietet neben seiner konventionellen Smoothie-Serie auch eine Bio-Serie aus nachhaltigem Obstanbau an. Die folgende Tabelle gibt die prozentuale Verteilung der Kundschaft auf die beiden Smoothie-Serien an.

	2020	2021	2022
Bio-Smoothies	50	60	64
konventionelle Smoothies	50	40	36

Die Änderung des Kaufverhaltens der Kundschaft von 2020 zu 2021 und von 2021 zu 2022 kann durch eine stochastische (2×2) Matrix A beschrieben werden.
Ermitteln Sie die Matrix A

(5 Punkte)

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2023

Aufgabenteil B: Hilfsmittel CAS

Aufgabe 2 – Analysis

2.1 nicht verlangt

2.2.1 **Regression**

ganzrationale Funktion 3. Grades: $K_1(x) = 0{,}054x^3 - 0{,}968x^2 + 6{,}892x + 17{,}557$

mit Bestimmtheitsmaß $r^2 \approx 0{,}996$

Exponentialfunktion: $K_2(x) = 18{,}9e^{0{,}108x}$ bzw. $K_2(x) = 18{,}9 \cdot 1{,}115^x$

mit Bestimmtheitsmaß $r^2 \approx 0{,}975$

Da die Funktion 3. Grades (K_1) ein höheres Bestimmtheitsmaß hat, bildet sie die Werte der Tabelle besser ab.
[Allerdings werden die Fixkosten durch die Exponentialfunktion besser modelliert.]

2.2.2 **Gewinn an der Kapazitätsgrenze von 20 ME**

$G(x) = 13x - K_{neu}(x) = -0{,}05x^3 + x^2 + 6x - 18$

$G(20) = 102$

Der Gewinn an der Kapazitätsgrenze beträgt 102 GE.

2.3 $a_w(t) = 20t \cdot e^{-\frac{1}{2w} \cdot t} + 30$ mit $t \geq 0$

2.3.1 $a'_w(t) = 20 \cdot e^{-\frac{1}{2w} \cdot t}\,(1 - \frac{t}{2w})$

notwendige Bedingung: $a'_w(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{t}{2w} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 2w \qquad (e^{-\frac{1}{2w} \cdot t} > 0)$

hinreichende Bedingung: $a''_w(2w) = -\frac{10}{w} \cdot e^{-1} < 0$

Also ist der monatliche Absatz nach 2w Monaten maximal.

2.3.2 **Bestimme w, so dass in t = 5 ein Absatz von 100 ME/Monat**

$a_w(5) = 100 \quad \Leftrightarrow \quad 100 \cdot e^{-\frac{1}{2w} \cdot 5} + 30 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad w \approx 7{,}01$

2.3.3 Langfristige Entwickung des Absatzes nach der Funktion a_w

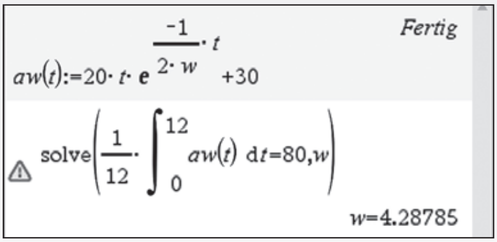
$\lim\limits_{t \to \infty} (20t \cdot e^{-\frac{1}{2w} \cdot t} + 30) = 0 + 30$

Langfristig wird sich der Absatz 30 ME/Monat annähern.

2.3.4 Bestimme w, so dass in den ersten 12 Monaten pro Monat durchschnittlich 80 ME verkauft werden.

$\frac{1}{12}\int_0^{12} a_w(t)\,dt = 80 \quad \Leftrightarrow \quad w \approx 4{,}287$

Der Parameter muss einen Wert von ca. 4,3 annehmen.



Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2023

Aufgabenteil B: Aufgabe 3 – Lineare Algebra/ Analytische Geometrie

3.1.1 **Untersuchung, ob ein Lagerbestand zur Erfüllung des Auftrags ausreicht**

Rohstoff-Endprodukt-Matrix $C_{RE} = \begin{pmatrix} 360 & 380 \\ 280 & 340 \\ 180 & 80 \end{pmatrix}$

$C_{RE} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18600 \\ 15800 \\ 5600 \end{pmatrix}$

Es werden 18 600 g Äpfel, 15 800 g Orangen und 5600 g Himbeeren benötigt,

der Lagerbestand reicht nicht aus.

3.1.2 $A_{RZ} = \begin{pmatrix} 40 & 50 \\ 20 & 50 \\ 40 & 0 \end{pmatrix}$; $B_{ZE} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Aus $C_{RE} = A_{RZ} \cdot B_{ZE}$ folgt

$\begin{pmatrix} 40 & 50 \\ 20 & 50 \\ 40 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 & 380 \\ 280 & 340 \\ 160 & 80 \end{pmatrix}$

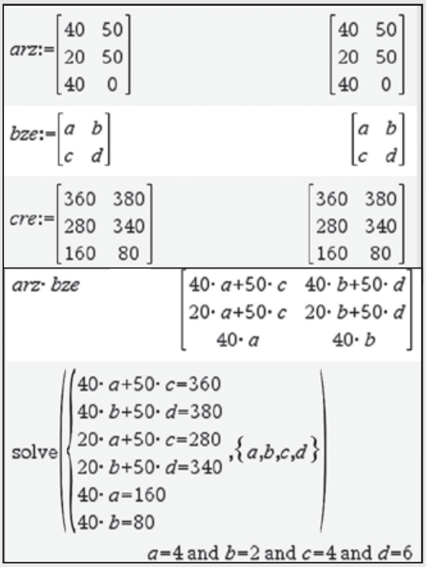
LGS aus insgesamt 6 Gleichungen

mit 4 Unbekannten,

Lösen des LGS ergibt:

a = 4, b = 2, c = 4, d = 6

In der Packung P1 sind 4 Smoothies S-rot und 4 Smoothies S-gelb und in der Packung P2 sind 2 Smoothies S-rot und 6 Smoothies S-gelb.



3.1.3 **Preis für die Packung P1**

$DB = E - K_v$

$K_v = (0{,}001 \quad 0{,}003 \quad 0{,}008) \cdot \begin{pmatrix} 360 & 380 \\ 280 & 340 \\ 180 & 80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} + (1{,}50 \quad 1{,}00) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$

$K_v = 110{,}80 + 60 = 170{,}80$ [€]

p: Preis für P1

$E = (p \quad 22) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = (20p + 660)$

$DB = 1000 = 20p + 660 - 170{,}8 \Leftrightarrow \quad p = 25{,}54$ [€]

Der Preis muss hierzu 25,54 € betragen.

Lösungen - Zentrale Abiturprüfung 2023

Aufgabenteil B: Aufgabe 3 – Lineare Algebra/Analytische Geometrie

3.2.1 **Werte für t, sodass sich positive Produktionszahlen ergeben**

Alle Mengen müssen größer gleich Null sein.

$3t > 0 \Leftrightarrow\ t > 0$

$t^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow\ t > 1$

$25 - t > 0 \Leftrightarrow\ t < 25$ also $1 < t < 25$

3.2.2 **Wert von t, sodass die Rohstoffkosten möglichst gering**

$K_R(t) = (0{,}001\quad 0{,}003\quad 0{,}008) \cdot \begin{pmatrix} t^2-1 & 25 \\ 50 & 3t \\ 25-t & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = 0{,}2t^2 - 0{,}7t + 72{,}3$

Bedingung: $K'_R(t) = 0$ $0{,}4t - 0{,}7 = 0 \Leftrightarrow t = 1{,}75$

$K_R(1{,}75) = 71{,}69$

Da die dazugehörige Parabel nach oben geöffnet ist, sind die Rohstoffkosten für t= 1,75 minimal und betragen 71,69 €.

3.3.1 Bei der stochastischen Matrix M muss die Summe jeder Spalte 1 ergeben. Also muss $a = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ sein.

3.3.2 **Verteilung der Kundschaft eine Woche zuvor und nach zwei Wochen**

Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ Spaltensumme = 1

Verteilung eine Woche zuvor: $M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4500 \\ 2200 \\ 1300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 1000 \\ 2000 \end{pmatrix}$

Verteilung nach zwei Wochen: $M^2 \cdot \begin{pmatrix} 4500 \\ 2200 \\ 1300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3756 \\ 3352 \\ 892 \end{pmatrix}$

3.4 **Ermitteln Sie die Matrix A.**

Aus der vorgegebenen Entwicklung ergibt sich ein LGS:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 34 \end{pmatrix}$

$50a + 50b = 60 \wedge 60a + 40b = 64 \Leftrightarrow\ a = 0{,}8 \wedge b = 0{,}4$

Daraus ergibt sich die Übergangsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

Zentrale Abiturprüfung 2025
Leistungskursfach Mathematik
Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

Dokumentation der Auswahlentscheidung

Der Aufgabenteil A besteht aus vier Pflichtaufgaben und **vier Wahlaufgaben**, aus denen Sie **zwei auswählen**.

Es werden die beiden Wahlaufgaben bewertet, die Sie in der Tabelle ankreuzen.

Name des Prüflings: ____

Aufgabe	**Teilgebiet**	**Pflicht**
1.1	Analysis	☒
1.2	Analysis	☒
1.3	Stochastik	☒
1.4	Lineare Algebra/ Analytische Geometrie	☒
Aufgabe	**Teilgebiet**	**Wahl (zwei aus vier, beliebig)**
1.5	Analysis	☐
1.6	Analysis	☐
1.7	Stochastik	☐
1.8	Lineare Algebra/ Analytische Geometrie	☐

Zentrale Abiturprüfung 2025
Leistungskursfach Mathematik
Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

Aufgabenstellung

Der „Smart-Living“-Markt boomt. Die intelligente Vernetzung von Elektrogeräten in Häusern und Wohnungen entwickelt sich zu einem Massenmarkt. Das Start-up-Unternehmen SmartWork GmbH bietet intelligente Elektronik an, die per App ferngesteuert wird und Daten über das Nutzungsverhalten zur Einsparung von Energie nutzt.

Aufgabe 1 (30 Punkte)

Die Teilaufgaben 1.1 bis 1.4 sind Pflichtaufgaben.

1.1 **Pflichtaufgabe Analysis**

Die bei der Produktion des smarten Lichtschalters Lux1 anfallenden Kosten lassen sich durch die ganzrationale Kostenfunktion

$$K(x) = 10x^3 - 40x^2 + 60x + 180 \text{ mit } x \geq 0$$

beschreiben, wobei die Produktionsmenge x in Mengeneinheiten (ME) und die Kosten K(x) in GE (Geldeinheiten) angegeben werden.

1.1.1 Berechnen Sie die kurzfristige Preisuntergrenze.

(3 Punkte)

1.1.2 Der gegenwärtige Marktpreis liegt bei 100 GE/ME, die langfristige Preisuntergrenze beträgt 90 GE/ME. Eine der beiden folgenden Abbildungen stellt die entsprechende Situation dar.

Entscheiden Sie begründet, ob dies Abbildung 1 oder Abbildung 2 ist.

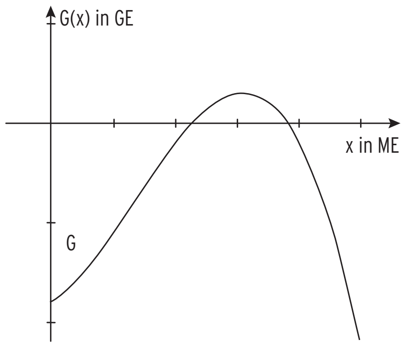


Abbildung 1

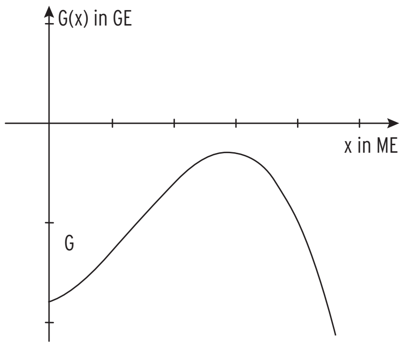


Abbildung 2

(2 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2025
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

1.2 Pflichtaufgabe Analysis

Die Absatzentwicklung des smarten Lichtschalters Lux1 kann durch eine Funktion f_a mit Parameter $a \geq 1$ beschrieben werden:

$$f_a(t) = (a \cdot t + 5) \cdot e^{-\frac{1}{10}t}$$

Dabei steht $t \geq 0$ für die Zeit in Monaten seit Produkteinführung und $f_a(t)$ für den monatlichen Absatz in ME/Monat.

Die Graphen von f_1 und f_2 sind in Abbildung 3 dargestellt.

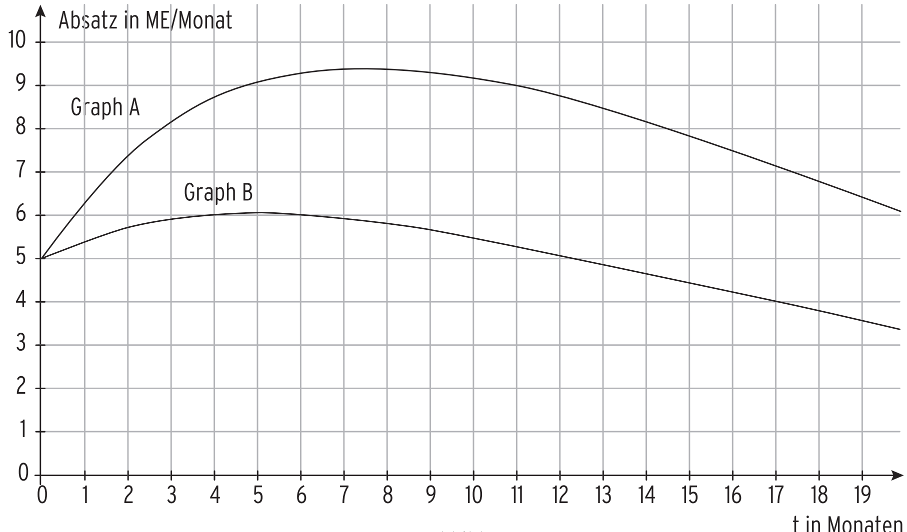


Abbildung 3

1.2.1 Entscheiden Sie begründet, welcher Graph zu welchem Funktionsterm gehört.

(2 Punkte)

1.2.2 Überprüfen Sie die folgenden Aussagen anhand der Graphen:

A1: Der Gesamtabsatz im 1. Halbjahr beträgt in beiden Fällen mindestens 36 ME.

A2: Der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes ist unabhängig von a.

(3 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2025
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

1.3 Pflichtaufgabe Stochastik

Erfahrungsgemäß haben 20 % des smarten Lichtschalters Lux1 eine fehlerhafte Schaltverzögerung (S).
Im Schnitt treten bei 10 % der Schalter Pixelfehler (P) im Display auf.
Die beiden Fehler treten unabhängig voneinander auf.
Fehlerfreie Lichtschalter werden für 10 € verkauft. Tritt nur einer der beiden Fehler auf, können die Lichtschalter noch für 5 € verkauft werden. Wenn beide Fehler auftreten, können die Lichtschalter nicht verkauft werden.

1.3.1 Erstellen Sie hierzu ein Baumdiagramm einschließlich aller Pfadendwahrscheinlichkeiten.

(3 Punkte)

1.3.2 Es werden 100 Lichtschalter produziert.
Berechnen Sie den zu erwartenden Erlös.

(2 Punkte)

1.4 Pflichtaufgabe Lineare Algebra/Analytische Geometrie

1.4.1 Der Lichtschalter Lux1 wird in einem zweistufigen Produktionsprozess zusammengebaut.
Die SmartWork GmbH stellt zunächst aus Rohstoffen die Zwischenprodukte her und aus diesen danach die Endprodukte.
Die folgenden Matrizen werden zur Berechnung der jeweiligen Mengen benutzt:

$$\begin{pmatrix} 2 & r \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} s & 22 \\ 8 & 17 \\ 8 & 12 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ t & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie die Matrizengleichung der Form A · B = C zur Bestimmung der Rohstoff-Endproduktmatrix auf und berechnen Sie r, s und t.

(5 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2025

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

Wahlaufgaben

Aus den folgenden vier Wahlaufgaben sind zwei zu bearbeiten.

1.5 Wahlaufgabe Analysis

Folgende Graphen zur Angebots- und Nachfragefunktion eines Produktes verdeutlichen die Preisbildung:

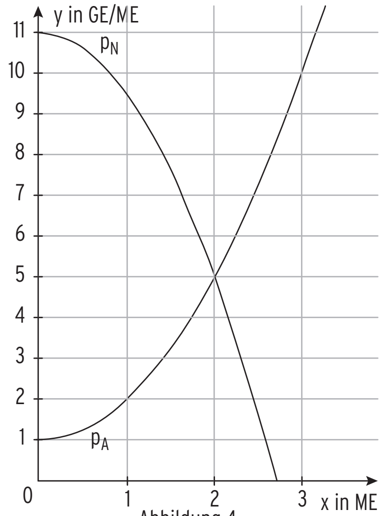


Abbildung 4

1.5.1 Nehmen Sie begründet Stellung zu den folgenden Aussagen.

A: Wenn der Markt sich im Gleichgewicht befindet, beträgt der Erlös aller Produzenten 10 GE.

B: Bei einem Preis von 4 GE/ME besteht ein Nachfrageüberschuss von 1 ME.

(2 Punkte)

1.5.2 Berechnen Sie den folgenden Term und benennen Sie den ökonomischen Sachzusammenhang.

$$\int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 11\right)dx - 2 \cdot 5$$

(3 Punkte)

1.6 Wahlaufgabe Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 6x \cdot e^{-\frac{3}{2}x^2}$

$f'(x) = (6 - 18x^2) \cdot e^{-\frac{3}{2}x^2}$

1.6.1 Bestätigen Sie, dass für die 2. Ableitung gilt: $f''(x) = (-54x + 54x^3) \cdot e^{-\frac{3}{2}x^2}$

(3 Punkte)

1.6.2 Berechnen Sie die drei Wendestellen der Funktion f.

Ohne weiteren Nachweis kann davon ausgegangen werden, dass die Funktion drei Wendestellen hat.

(2 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2025
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

Wahlaufgaben

1.7 Wahlaufgabe Stochastik

Erfahrungsgemäß führen Verkaufsgespräche der SmartWork GmbH im Schnitt in 25 % der Fälle zu einem Vertragsabschluss.

Das folgende Diagramm gehört zur binomialverteilten Zufallsgröße X:

Anzahl der Vertragsabschlüsse bei n = 30, p = 0,25

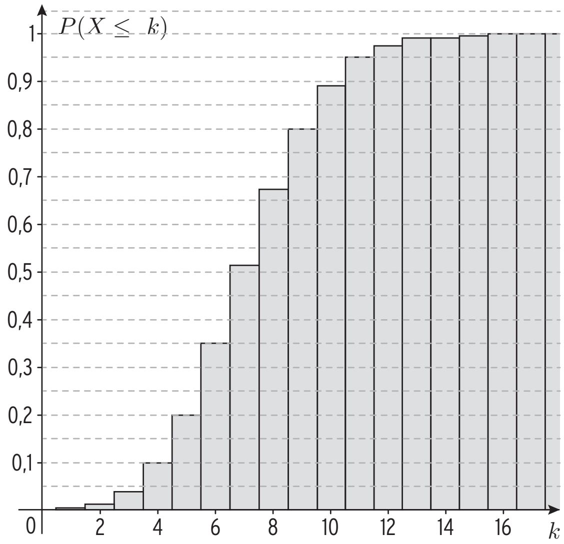


Abbildung 5

1.7.1 Bestimmen Sie mit Hilfe des Diagramms die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Es kommt zu höchstens 9 Vertragsabschlüssen.

B: Es kommt zu genau 6 Vertragsabschlüssen.

(2 Punkte)

1.7.2 Die Marketingabteilung befürchtet, dass die Wahrscheinlichkeit eines Vertragsabschlusses inzwischen unter p = 0,25 gesunken ist, und möchte dies mithilfe eines Hypothesentests mit n = 30 nachweisen.

Leiten Sie hierfür anhand der Abbildung 5 eine Entscheidungsregel bei einem Signifikanzniveau von 5 % her.

(3 Punkte)