„Sie müssen das Buch so schreiben, dass alles drin ist, aber man es trotzdem versteht!“
(Aufforderung einer Schülerin)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das Abitur in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- Ihr gewonnenes Wissen anhand von Basisübungen mit ausführlichen Lösungen schnell und prüfungsbezogen zu vertiefen.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.
- eine gute Note in der Abiturprüfung zu erreichen.

Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.
- den Notendurchschnitt Ihrer Klasse in der Abiturprüfung zu optimieren.

Konzept

Der Kern des Buches besteht aus eingängigen **Stoffzusammenfassungen zu allen Lehrplanthemen** des **erhöhten Anforderungsniveaus** am beruflichen Gymnasium in Baden-Württemberg.
Die Zusammenfassungen sind so konzipiert, dass alle mathematischen Inhalte direkt aufgenommen und kognitiv verarbeitet werden können.

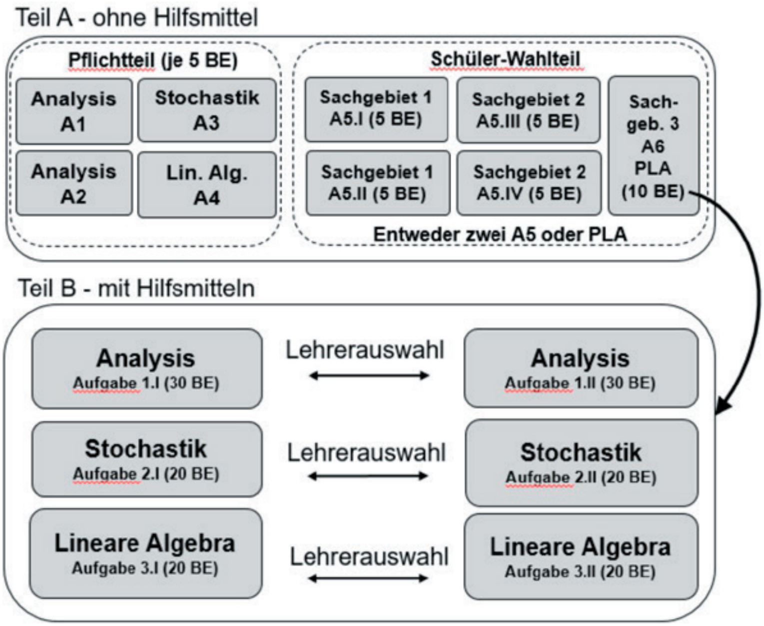
Die über **100 Videos** im Buch bieten einen weiteren Lernzugang, welcher in Kombination mit dem Buch bei vielen Schülerinnen und Schülern nachweisbar zu besseren Lernergebnissen führt.

Das Ende des Buches besteht aus kurzen, elementaren **Basisübungen** zu allen Themen. Diese werden **ausführlich gelöst**.

Ablauf der Abiturprüfung

Arbeitszeit: 300 Minuten (maximal 110 Minuten für Teil A)

Bewertungseinheiten: 100 gesamt



* Sachgebiete sind Analysis, Stochastik und Lineare Algebra — Quelle: IBBW Baden-Württemberg

Erläuterungen

- **Pflichtteil (Teil A, ohne Hilfsmittel)**: Die vorgelegten 4 Aufgaben (zu allen Themen des Lehrplans) müssen bearbeitet werden.
- **Schüler-Wahlteil (Teil A, ohne Hilfsmittel)**
  Beispiel: Es liegen 2 Aufgaben zur Analysis (Sachgebiet 1) und 2 Aufgaben zur Stochastik (Sachgebiet 2) vor. Alle diese Aufgabe sind mit „Aufgabe 5“ bezeichnet. Zusätzlich liegt die Aufgabe 6 zum Problemlösen (PLA) zur Linearen Algebra vor.
  Die Schüler*in wählt dann **entweder zwei beliebige Aufgaben 5** aus **oder wählt (nur) die Aufgabe 6 zum Problemlösen** aus. In diesem Fall gibt die Schüler*in **vor** der Bearbeitung der Problemlöseaufgabe den Teil A ab und erhält dann zur Bearbeitung der Problemlöseaufgabe die **Hilfsmittel (Taschenrechner und Merkhilfe)**.
- **Teil B, mit Hilfsmittel:** Vor der Prüfung wählt die Lehrer*in aus je zwei Aufgaben zur Analysis, Stochastik und Linearer Algebra jeweils eine Aufgabe aus.

Faustformel zur Zeitplanung: Aus 300 min für 100 BE ergeben sich **3 min pro BE**.

Hinweis: Zur weiteren Erläuterung sei auf das nachfolgende **Video** verwiesen.

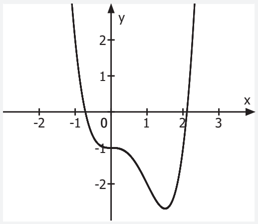
www.mvurl.de/lv7y

Inhaltsverzeichnis

Ganzrationale Funktion

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$

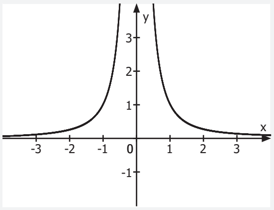
(S. 12)



Potenzfunktionen

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

(S. 16)

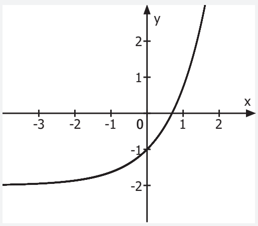


Funktionstypen

Exponentialfunktion

$f(x) = e^x - 2$

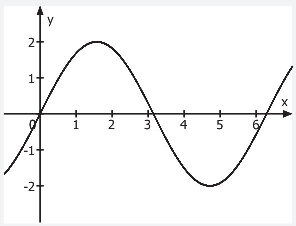
(S. 18)



Trignonometrische Funktion

$f(x) = 2 \cdot \sin(x)$

(S. 20)

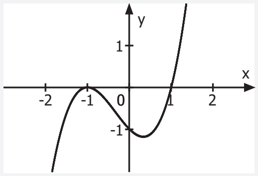


Analysis
Funktionen

Nullstellenansatz

$f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-1)$

(S. 14)

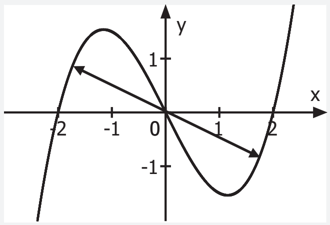


Symmetrie

…zur y-Achse

…zum Ursprung

(S. 24)



Spiegeln, Strecken und Verschieben

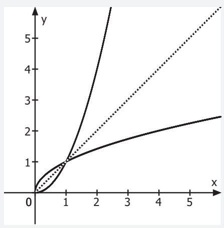
(S. 22)

Umkehrfunktion

$f(x) = x^2$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

(S. 25)



2 Gleichungen

2.1 Gleichungstypen: Übersicht

	Typ 1	**Typ 1S**
Gleichung 1. Grades (linear) (S. 30)	$2x-4=0$	
Gleichung 2. Grades (quadratisch) (S. 30)	$2x^2-4=0$	
Gleichung 3. Grades (S. 30)	$2x^3-4=0$	
Gleichung 4. Grades (S. 31)	$2x^4-4=0$	
Exponentialgleichung (S. 31)	$e^x=0{,}5$ oder $e^{2x-1}=0{,}5$	
Sinusgleichung (S. 32)	$\sin(x)=0{,}5$	$\sin(2x-1)=0{,}5$
Kosinusgleichung (S. 32)	$\cos(x)=0{,}5$	$\cos(2x-1)=0{,}5$
Merkmal	umformbar auf $\left\{\begin{matrix} x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ e^x \text{ oder } e^{\text{„}nicht\ nur\ x\text{“}} \\ \sin(x) \\ \cos(x) \end{matrix}\right\} = \ldots$	umformbar auf $\left\{\begin{matrix} \sin(\text{„}nicht\ nur\ x\text{“}) \\ \cos(\text{„}nicht\ nur\ x\text{“}) \end{matrix}\right\} = \ldots$
Lösungsstrategie	**Gegenoperation** $\left\{\begin{matrix} : \\ \sqrt{} \\ \sqrt[3]{} \\ \sqrt[4]{} \\ \ln \\ \sin^{-1} \\ \cos^{-1} \end{matrix}\right\}$	**Substitution:** $u =$ „*nicht nur x*“ **führt zu** $\left\{\begin{matrix} \mathbf{\sin(u)} \\ \mathbf{\cos(u)} \end{matrix}\right\} = \ldots$; Trig. Gleichung vom Typ 1 lösen; **Rücksubstitution**

Abkürzung: ... steht für eine Zahl.

www.mvurl.de/hutq

Typ 2	**Typ 3**	**Typ S**
$2x^2 - 4x = 0$	$x^2 - 8x + 15 = 0$	
$2x^3 - 4x = 0$		
$2x^4 - 4x = 0$		$x^4 - 8x^2 + 15 = 0$
$2e^{2x} - e^x = 0$		$e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$
Alle Summanden enthalten mindestens x (bzw. $e^x / \sin(x) / \cos(x)$). Kein Summand besteht nur aus einer „Zahl“. Somit kann „etwas mit x“ ausgeklammert werden.	umformbar auf $\ldots x^2 + \ldots x + \ldots = 0$	umformbar auf $\left\{\begin{array}{cccc} \ldots x^4 & + & \ldots x^2 & +\ldots \\ \ldots e^{2x} & + & \ldots e^x & +\ldots \end{array}\right\} = 0$
(evtl.) Ausklammern; **Satz vom Nullprodukt** (S. 36)	**abc -** bzw. **pq - Formel**	**Substitution führt zu** $\boldsymbol{\ldots u^2 + \ldots u + \ldots = 0}$; abc- bzw. pq-Formel; **Rücksubstitution**

Bemerkung: Eine Gleichung, die keinem dieser Gleichungstypen zuordenbar ist, kann in der Regel nicht „von Hand“ gelöst werden.

2.2 Gleichungstypen: Konkretes Lösungsvorgehen

1. Polynomgleichungen

Typ 1 **Gegenoperation**	**Typ 2** **Satz vom Nullprodukt**	**Typ 3** **abc -** bzw. **pq - Formel**
$2x-4=0 \quad \vert +4$ $2x=4 \quad \vert :2$ $x=2$		
$2x^2-4=0 \quad \vert +4$ $2x^2=4$ $x^2=2 \quad \vert \sqrt{\ }$ $x_1=\sqrt{2}\approx 1,41$ $x_2=-\sqrt{2}\approx -1,41$	$2x^2-4x=0$ $x\cdot(2x-4)=0$ **S. v. Nullpr.** (S. 36) $x_1=0 \qquad 2x-4=0$ $2x=4$ $x_2=2$	$x^2-8x+15=0$ mit **abc - Formel**: $(a=1;\ b=-8;\ c=15)$ $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 15}}{2}$ $=\frac{8\pm 2}{2}$ $x_1=5; \qquad x_2=3$ oder mit **pq - Formel**: $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ (*Bei dieser Formel muss vor dem* x^2 *stets eine* $+1$ *stehen!*)
$2x^3-4=0$ $2x^3=4$ $x^3=2 \quad \vert \sqrt[3]{\ }$ $x=\sqrt[3]{2}$ $x\approx 1,26$	$2x^3-4x=0$ $x\cdot(2x^2-4)=0$ **S. v. Nullpr.** $x_1=0 \qquad 2x^2-4=0$ $2x^2=4$ $x^2=2 \quad \vert \sqrt{\ }$ $x_2=\sqrt{2}\approx 1,41$ $x_3=-\sqrt{2}\approx -1,41$	

www.mvurl.de/eps4

Typ 1 **Gegenoperation**	**Typ 2** **Satz vom Nullprodukt**	**Typ S** **Substitution führt zu** $\ldots u^2+\ldots u+\ldots=0$
$2x^4-4=0 \quad \vert +4$ $2x^4=4 \quad \vert :2$ $x^4=2 \quad \vert \sqrt[4]{\ }$ $x_1=\sqrt[4]{2}\approx 1{,}19$ $x_2=-\sqrt[4]{2}\approx -1{,}19$	$2x^4-4x=0$ $x\cdot\left(2x^3-4\right)=0$ **S. v. Nullpr.** $x_1=0 \qquad 2x^3-4=0$ $2x^3=4$ $x^3=2$ $x_2=\sqrt[3]{2}$ $x_2\approx 1{,}26$	$x^4-8x^2+15=0$ **Substitution :** $\left(x^4=u^2;\ x^2=u\right)$ $u^2-8u+15=0$ $u_{1/2}=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 15}}{2}$ (abc-Formel) $=\frac{8\pm 2}{2}$ $u_1=5; \qquad u_2=3$ **Rücksubstitution :** $x^2=5 \qquad x^2=3$ $x_1=\sqrt{5}\approx 2{,}34 \qquad x_3=\sqrt{3}\approx 1{,}73$ $x_2=-\sqrt{5}\approx -2{,}34 \qquad x_4=-\sqrt{3}\approx -1{,}73$

2. Exponentialgleichungen

Typ 1 **Gegenoperation**	**Typ 2** **Satz vom Nullprodukt**	**Typ S** **Substitution führt zu** $\ldots u^2+\ldots u+\ldots=0$
$e^x=0{,}5 \quad \vert \ln$ $x=\ln(0{,}5)$ $x\approx -0{,}69$ oder $e^{2x-1}=0{,}5 \quad \vert \ln$ $2x-1=\ln(0{,}5) \quad \vert +1$ $2x=\ln(0{,}5)+1 \quad \vert :2$ $x=\frac{\ln(0{,}5)+1}{2}$ $x\approx 0{,}153$	$2e^{2x}-e^x=0$ $e^x\cdot(2e^x-1)=0$ **S. v. Nullpr.** $e^x=0 \qquad 2e^x-1=0$ $x=\ln(0) \qquad e^x=0{,}5$ keine Lösung $\qquad x=\ln(0{,}5)$ $x\approx -0{,}69$	$e^{2x}-8e^x+15=0$ **Substitution :** $\left(e^{2x}=u^2;\ e^x=u\right)$ $u^2-8u+15=0$ $u_{1/2}=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 15}}{2}$ (abc-F.) $=\frac{8\pm 2}{2}$ $u_1=5; \qquad u_2=3$ **Rücksubstitution :** $e^x=5 \qquad e^x=3$ $x_1=\ln(5)\approx 1{,}6 \qquad x_2=\ln(3)\approx 1{,}1$

3.9 Ermittlung von Funktionsgleichungen

1. Möglichkeit: Differenzialrechnung („Steckbriefaufgaben“)

Beispiel
Gesucht ist die Gleichung einer Funktion 4. Grades, deren Schaubild symmetrisch zur y-Achse ist. Das Schaubild hat den Tiefpunkt T(2 | 1) und besitzt an der Stelle 1 die Steigung $-2{,}4$.

Lösung

Allgemeiner Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Da symm. zur y-Achse: $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (*nur gerade Hochzahlen*)

$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$

Bedingungen

T(2 | 1) (*Punktprobe*): $f(2) = 1 \Rightarrow a \cdot 2^4 + c \cdot 2^2 + e = 1 \quad \Rightarrow \quad 16a + 4c + e = 1$

T(2 | 1) (*Bed.* $f'(x) = 0$): $f'(2) = 4a \cdot 2^3 + 2c \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 32a + 4c = 0$

In $x = 1$ Steigung $-2{,}4$: $f'(1) = 4a \cdot 1^3 + 2c \cdot 1 = -2{,}4 \quad \Rightarrow \quad 4a + 2c = -2{,}4$

Lösen des LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 1 \\ 32 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2{,}4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 10{,}6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12{,}6 \end{array}\right)$$

(Hinweis: Schnelleres Lösen des LGS durch Tausch der 1. mit der 3. Spalte möglich.)

III: $3e = 12{,}6$
$e = 4{,}2$

in II: $2c + 1 \cdot 4{,}2 = 1$
$c = -1{,}6$

in I: $16a + 4 \cdot (-1{,}6) + 1 \cdot 4{,}2 = 1$
$a = 0{,}2$

Man erhält: $f(x) = 0{,}2x^4 - 1{,}6x^2 + 4{,}2$

Notwendig
Mindestens so viele Bedingungen bzw. Gleichungen wie unbekannte Koeffizienten im Ansatz vorhanden (im Beispiel: 3 Bedingungen bzw. Koeffizienten).

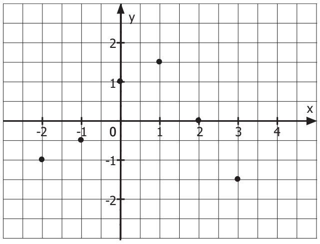
www.mvurl.de/q42e

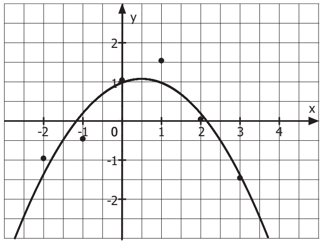
Typische Beschreibungen von Schaubildern und zugehörige math. Bedingungen

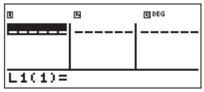
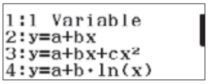
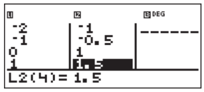
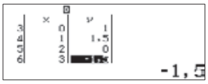
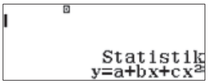
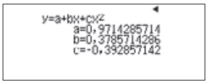
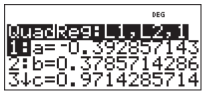
Beschreibungen des Schaubildes	Mathematische Bedingungen
Schaubild ist punktsymmetrisch zum Ursprung	$f(x)$ *enthält nur ungerade Hochzahlen* *z.B.* $f(x) = ax^3 + cx$ *bei Grad 3*
Schaubild ist achsensymmetrisch zur y-Achse	$f(x)$ *enthält nur gerade Hochzahlen* *z.B.* $f(x) = ax^4 + cx^2 + \mathrm{e}$ *bei Grad 4*
Schaubild verläuft durch P(3|8)	$f(3) = 8$
Schaubild besitzt an der Stelle 2 die Steigung 5 (oder: besitzt am x-Wert 2 eine Tangente mit Steigung 5)	$f'(2) = 5$
Schaubild berührt an der Stelle 3 die x-Achse	$\begin{cases} f(3) = 0 & (\textit{verläuft durch } \mathrm{P}(3\mid 0)) \\ f'(3) = 0 & (\textit{hier Steigung } 0) \end{cases}$
Schaubild besitzt den Hochpunkt H(−2|3)	$\begin{cases} f(-2) = 3 & (\textit{verläuft durch } \mathrm{P}(-2\mid 3)) \\ f'(-2) = 0 & (\textit{hier Steigung } 0) \end{cases}$
Schaubild besitzt den Tiefpunkt T(−2|3)	*gleiche Bedingungen wie bei* H(−2|3)
Schaubild besitzt den Wendepunkt W(5|7)	$\begin{cases} f(5) = 7 & (\textit{verläuft durch } \mathrm{P}(5\mid 7)) \\ f''(5) = 0 & (\textit{hier „keine Krümmung“}) \end{cases}$
Schaubild besitzt den Sattelpunkt S(1|4)	$\begin{cases} f(1) = 4 & (\textit{verläuft durch } \mathrm{P}(1\mid 4)) \\ f'(1) = 0 & (\textit{hier Steigung } 0) \\ f''(1) = 0 & (\textit{hier „keine Krümmung“}) \end{cases}$
Schaubild schneidet das Schaubild der bekannten Funktion $g(x)$ an der Stelle 2	$f(2) = g(2) \quad (\textit{hier gleicher } y\textit{-Wert})$
Schaubild berührt das Schaubild der bekannten Funktion $g(x)$ an der Stelle 4	$\begin{cases} f(4) = g(4) & (\textit{hier gleicher } y\textit{-Wert}) \\ f'(4) = g'(4) & (\textit{hier gleiche Steigung}) \end{cases}$

2. Möglichkeit: Regression

Beispiel:
Gesucht ist die Gleichung einer Parabel (2. Grades), deren Schaubild **näherungsweise** durch die dargestellten Punkte verläuft.





<table>
<tr><th>CASIO fx-87DE X</th><th></th><th>TI-30X Plus MultiView</th><th></th></tr>
<tr><td>[MENU]
[3]</td><td></td><td>[data]</td><td></td></tr>
<tr><td>[3]</td><td></td><td>Koordinaten aller Punkte eintragen;</td><td></td></tr>
<tr><td>Koordinaten aller Punkte eintragen;</td><td></td><td>[2nd]; [mode]</td><td></td></tr>
<tr><td>[AC]</td><td></td><td>[2nd]; [data]</td><td></td></tr>
<tr><td>[OPTN];
[3]</td><td></td><td>[↓]; [↓]; [↓]; [↓]</td><td></td></tr>
<tr><td>Achtung: Der CASIO-WTR geht von $y = \mathrm{a} + \mathrm{b}x + \mathrm{c}x^2$ aus!</td><td></td><td>[enter]</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>[↓]; [↓]; [↓]; [→];
[↓]; [enter]</td><td></td></tr>
</table>

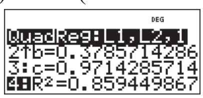
Gleichung der Regressionsfunktion: $f(x) = -0{,}393x^2 + 0{,}379x + 0{,}971$

Notwendig: Mindestens so viele Punkte wie unbekannte Koeffizienten im Ansatz.

Das Bestimmtheitsmaß r^2

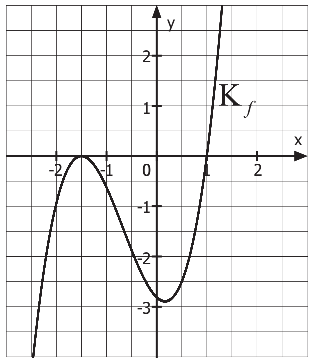
• Gibt die **Güte einer Regression** an, beurteilt also, wie „genau“ die Kurve durch die Punkte verläuft.

• r^2 kann hierbei Werte zwischen 0 (Kurve „passt nicht“ zur Punktwolke) und 1 (Kurve verläuft durch alle Punkte) annehmen.
Im Beispiel gilt $r^2 \approx 0{,}86$, was auf eine „recht hohe“ Anpassung der Kurve an die Punkte hindeutet.



www.mvurl.de/88xx

3. Möglichkeit: Nullstellenansatz bei ganzrationalen Funktionen



Beispiel

Gesucht ist die Funktionsgleichung zum nebenstehenden Schaubild.

Lösung

Da die Nullstellen $\left(x_{1/2} = -1{,}5;\ \ x_3 = 1\right)$ des Schaubildes ablesbar sind, kann der Nullstellenansatz der Funktion (S. 14) weitgehend aufgestellt werden:

$f(x) = a \cdot (x + 1{,}5)^2 \cdot (x - 1)$

Dann werden die Koordinaten eines weiteren Punktes, der kein Schnittpunkt mit der x-Achse ist, eingesetzt:

$$\text{P}(0{,}5\,|-2{,}5)\text{:} \qquad \begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x + 1{,}5)^2 \cdot (x - 1) \\ -2{,}5 &= a \cdot (0{,}5 + 1{,}5)^2 \cdot (0{,}5 - 1) \\ -2{,}5 &= -2a \\ \frac{5}{4} &= a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{4} \cdot (x + 1{,}5)^2 \cdot (x - 1)$$

Notwendig

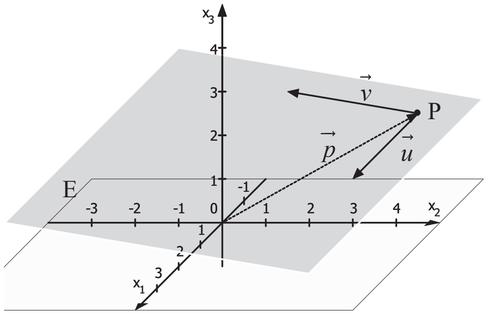
$$\left\{\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\right. \text{ Nullstellen bei einer ganzrationalen Funktion } \left\{\begin{matrix} 2. \\ 3. \\ 4. \end{matrix}\right. \text{ Grades und mind. ein weiterer Punkt.}$$

4 Ebenen

4.1 Ebenengleichungen in Parameterform

Die Punkt-Richtungs-Form:

$\mathbf{E}: \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{r} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{s} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$ (mit $r, s \in \mathbb{R}$)

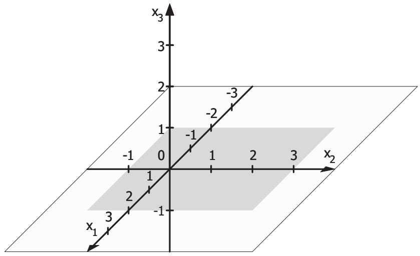


- $\vec{p}$: Stützvektor (Ortsvektor des Stützpunktes P)
- $\vec{u}$, $\vec{v}$: Spannvektoren (keine Vielfachen voneinander)
- r, s: Parameter (mit $r, s \in \mathbb{R}$)

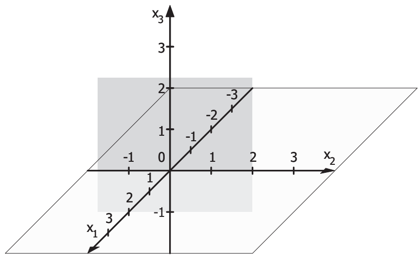
Beispiel: $\mathrm{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{r} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{s} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

Die Koordinatenebenen in der Parameterform

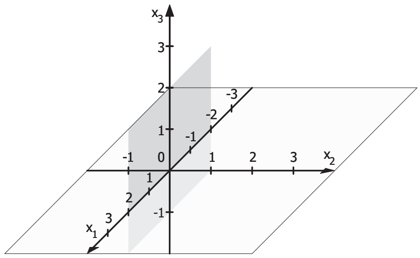
x_1x_2-Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$



x_2x_3-Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



x_1x_3-Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}$



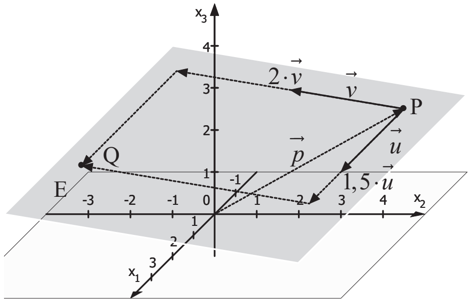
www.mvurl.de/jrh3

Elementare Aufgabenstellungen in der Parameterform

• Überprüfen, ob ein Punkt in einer Ebene liegt (Punktprobe)

Beispiel: Liegt $Q(1,5\,|\,-3\,|\,2)$ in der Ebene

$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\0,5\end{pmatrix}\ (\text{mit } r,\, s\in\mathbb{R})?$$



Durch Einsetzen erhält man ein LGS:

$$\begin{pmatrix}1,5\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\0,5\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{lcll}1,5=-3+3r & & r=1,5 & (1)\\ -3=3-3s & \Leftrightarrow & s=2 & (2)\\ 2\ =1+0,5s & & s=2 & (3)\end{array}$$

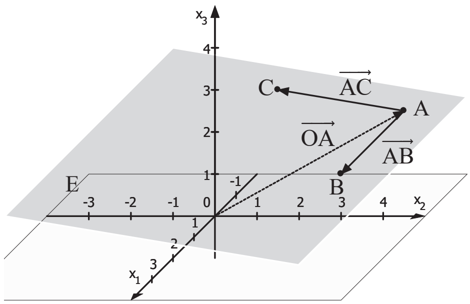
Das LGS hat eine Lösung. Somit liegt Q in der Ebene.

• Ebenengleichung aufstellen aus 3 Punkten

Zwei-Punkte-Form:

$$\mathbf{E:\ \vec{x}=\overrightarrow{OA}+r\cdot\overrightarrow{AB}+s\cdot\overrightarrow{AC}}\quad(\text{mit } r,\, s\in\mathbb{R})$$

- $\overrightarrow{OA}$, der Ortsvektor des Punktes A, wird als Stützvektor verwendet
- $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$, die Verbindungsvektoren der Punkte, bilden die Richtungsvektoren.
- $r,\ s$: Parameter (mit $r,\, s\in\mathbb{R}$)



Beispiel: Ebene durch $A(0\,|\,1\,|\,2)$, $B(3\,|\,2\,|\,2)$ und $C(-1\,|\,1\,|\,0)$.

$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3-0\\2-1\\2-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1-0\\1-1\\0-2\end{pmatrix}\Leftrightarrow E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}\ (\text{mit } r,\, s\in\mathrm{R})$$

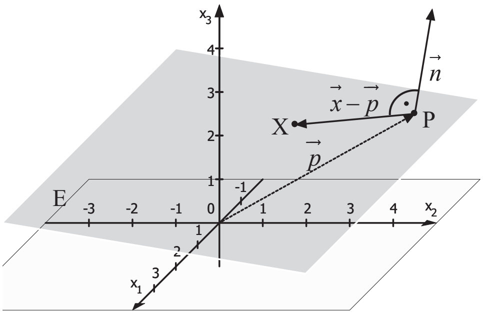
Parameterform, geeignet für:
Aufstellen aus 3 Punkten

4.2 Ebenengleichungen in Normalenform

$$\mathbf{E:}\ \left(\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{p}}\right)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}=\mathbf{0}$$

- $\vec{p}$: Stützvektor (Ortsvektor des Ebenenpunktes P)
- $\vec{n}$: Normalenvektor (steht senkrecht auf der Ebene)

Beispiel: $E:\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\0,5\\3\end{pmatrix}=0$



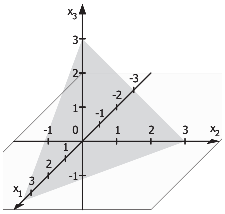
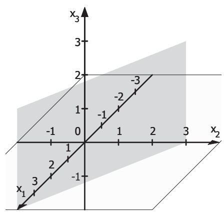
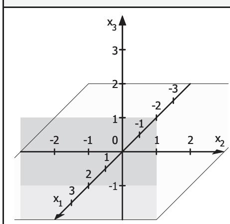
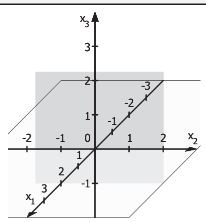
Hinweise

- Der Vektor $\overrightarrow{PX}=\vec{x}-\vec{p}$, der ausgehend von P zu einem allgemeinen Ebenenpunkt X zeigt, steht senkrecht auf $\vec{n}$. Deshalb ergibt das Skalarprodukt in der Normalengleichung 0.

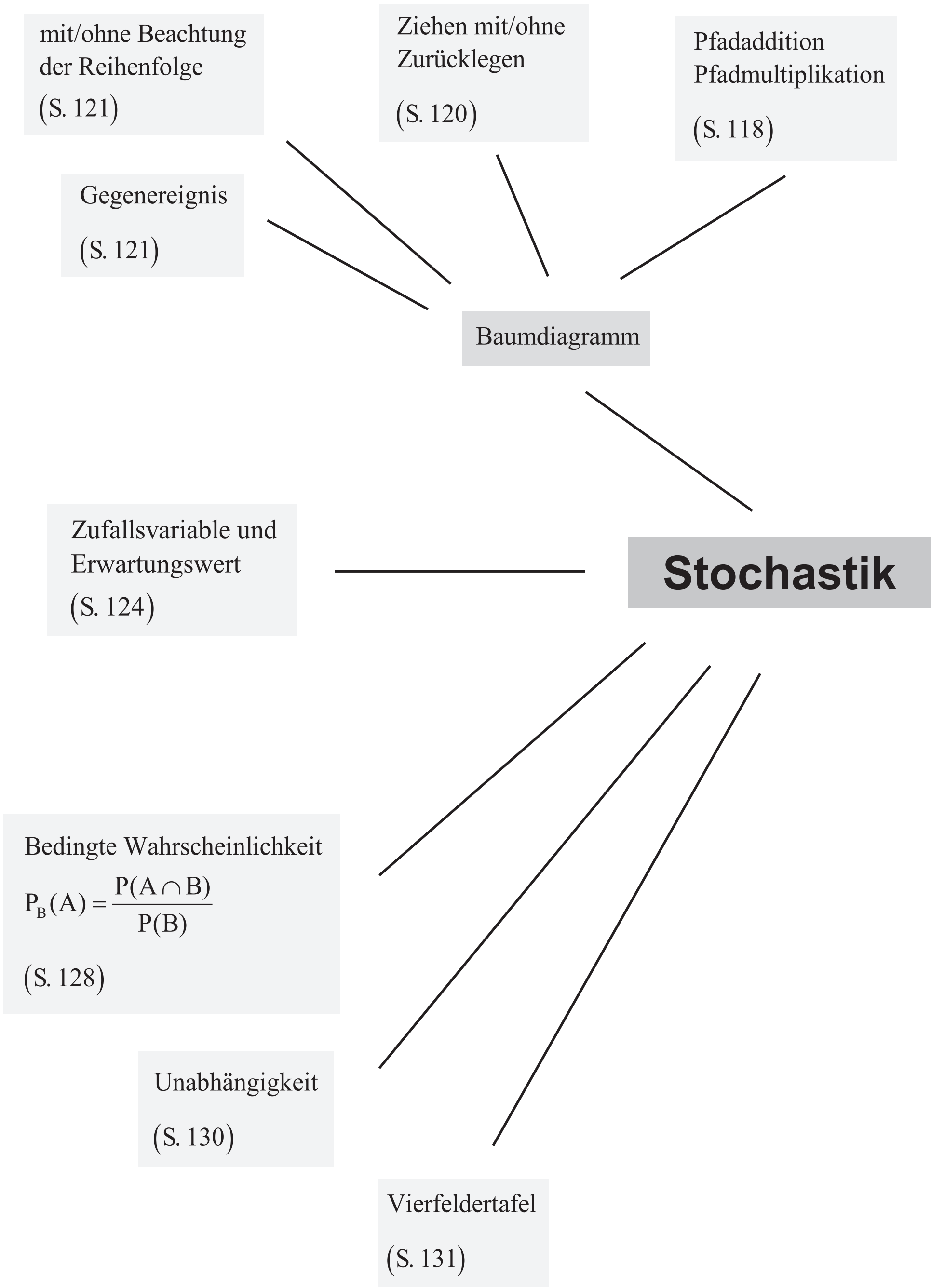
- Machen Sie sich klar, dass eine Ebene schon eindeutig festgelegt ist, wenn man nur **einen** Ebenenpunkt und **einen** Vektor kennt, der senkrecht auf der Ebene steht.

Normalenform, geeignet für:
Aufstellen aus senkrechtem Vektor + Punkt

Beispiele und Lage im Koordinatensystem

1. „Normalfall“: 3 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen	2. Parallel zu einer Achse (x_3-Achse)
 $E:\left(\vec{x}-\vec{p}\right)\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0$	 $E:\left(\vec{x}-\vec{p}\right)\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\\mathbf{0}\end{pmatrix}=0$
3. Parallel zu 2 Achsen (x_2 und x_3-Achse) bzw. einer Koordinatenebene (x_2x_3-Ebene)	4. Ebene liegt in einer Koordinatenebene (x_2x_3-Ebene)
 $E:\left(\vec{x}-\vec{p}\right)\cdot\begin{pmatrix}n_1\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}=0$	 $E:\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}n_1\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}=0$

www.mvurl.de/9pl1

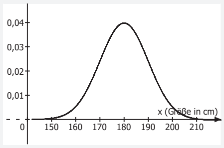

Stochastik
Baumdiagramm
mit/ohne Beachtung der Reihenfolge (S. 121)
Ziehen mit/ohne Zurücklegen (S. 120)
Pfadaddition Pfadmultiplikation (S. 118)
Gegenereignis (S. 121)
Zufallsvariable und Erwartungswert (S. 124)
Bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (S. 128)
Unabhängigkeit (S. 130)
Vierfeldertafel (S. 131)

Vertrauensintervalle
(S. 156)

Sigmaregeln
(S. 154)

Aufgabentypen
(S. 150)

Gaußsche Glockenkurve
(S. 148)



Normalverteilung

Erwartungswert und
Standardabweichung
(S. 146)

Binomialverteilung

Aufgabentypen
(S. 142 – 145)

Binomialverteilung und
kumulierte Binomialverteilung
(S. 140)

Bernoulliformel (S. 138)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

1 Baumdiagramme und Pfadregeln

1.1 Einführung

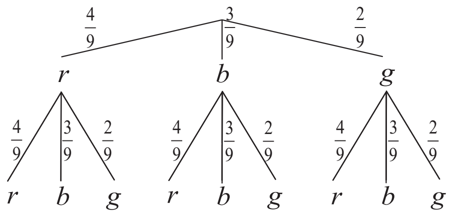
Beispiel 1: In einer Urne befinden sich 4 rote, 3 blaue und 2 grüne Kugeln. Es werden nacheinander 2 Kugeln entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird 2-mal die gleiche Farbe gezogen? Entnommene Kugeln werden hierbei …

a) … wieder zurückgelegt.
(Ziehen mit Zurücklegen)

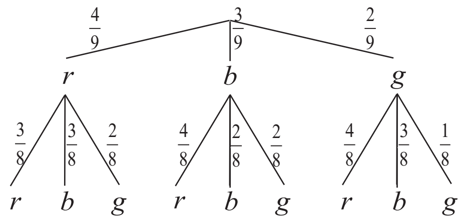
b) … nicht wieder zurückgelegt.
(Ziehen ohne Zurücklegen)

1. Schritt: Baumdiagramm anlegen

a)



b)



Hinweise

- Zu Beginn befinden sich 9 Kugeln in der Urne, von denen 4 rot sind. Dies führt zu einer Wahrscheinlichkeit von 4/9 für rot. (P = günstige/mögliche)
- Summe der Wahrscheinlichkeiten an jeder Verzweigung: 100 %
- **Ziehen ohne Zurücklegen:** Wahrscheinlichkeiten ändern sich hier von Stufe zu Stufe, abhängig davon: **Wie viele** Kugeln schon gezogen wurden (Änderung im **Nenner**) und **welche** Kugeln in den Vorstufen gezogen wurden (Änderung im **Zähler**).

2. Schritt: Ereignis definieren, welches alle gefragten Ergebnisse enthält

$$\mathrm{E} = \{rr; bb; gg\}$$

3. Schritt: Wahrscheinlichkeit des Ereignisses berechnen

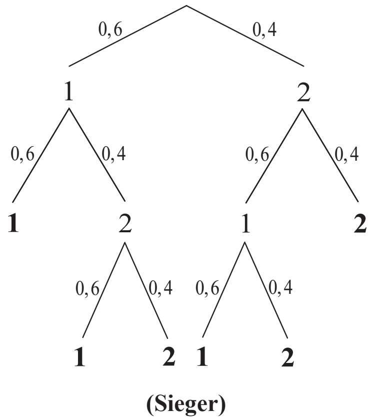
$$\mathrm{P(E)} = \mathrm{P}(rr) + \mathrm{P}(bb) + \mathrm{P}(gg) = \frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9} + \frac{3}{9}\cdot\frac{3}{9} + \frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9} = \frac{29}{81} \approx 0{,}358$$

$$\mathrm{P(E)} = \mathrm{P}(rr) + \mathrm{P}(bb) + \mathrm{P}(gg) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} + \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} = \frac{5}{18} \approx 0{,}278$$

- **Pfadaddition:** Ergebniswahrscheinlichkeiten aller zugehörigen Ergebnisse addieren.
- **Pfadmultiplikation:** Ergebniswahrscheinlichkeiten durch Multiplikation „entlang ihres Ergebnispfades“.

www.mvurl.de/lm2r

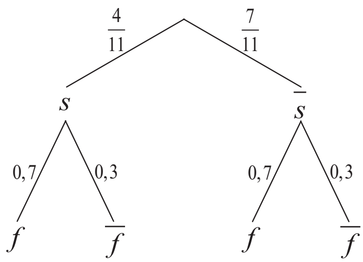
Beispiel 2: Beim Rundlauf (Mäxle) im Tischtennis stehen sich im Finale zwei Spieler gegenüber. Spieler 1 entscheidet mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % einen Ballwechsel für sich. Wer zuerst 2 Ballwechsel gewonnen hat, ist Sieger.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Spieler 1 insgesamt?



$$E = \{11; 121; 211\}$$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(11) + P(121) + P(211) \\ &= 0,6 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \\ &= 0,648 = 64,8\ \% \end{aligned}$$

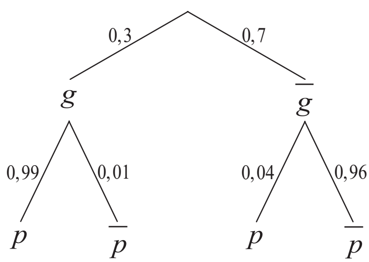
Beispiel 3: In einem Paket befinden sich 11 Smartphones. 4 davon sind vom Hersteller Samsung (s). Für 70 % der Handys eines jeden Herstellers wird eine Flatrate (f) gebucht. Ein Smartphone wird blind entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es nicht von Samsung und ohne Flatrate.



$$E = \{\overline{s}\,\overline{f}\}$$

$$P(E) = P(\overline{s}\,\overline{f}) = \frac{7}{11} \cdot 0,3 \approx 0,191 = 19,1\%$$

Beispiel 4: 30 % der 100 m-Läufer sind bei einem Wettkampf gedopt (g). Ein Dopingtest entlarvt gedopte Sportler mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 %. Jedoch erhält auch ein nicht gedopter Sportler mit einer Wahrscheinlichkeit von 4 % ein positives Dopingtestergebnis (p). Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein zufällig ausgewählter Läufer positiv getestet?



$$E = \{gp; \overline{g}p\}$$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(gp) + P(\overline{g}p) \\ &= 0,3 \cdot 0,99 + 0,7 \cdot 0,04 = 0,325 = 32,5\% \end{aligned}$$

4.4 Die JOKER-Liste für schwierige Aufgabentypen

In den Abiturprüfungen zeichnen sich **anspruchsvolle Aufgaben** zur Binomialverteilung oft dadurch aus, dass eben nicht „nur", bei gegeben Werten für n, p und k nach der Wahrscheinlichkeit P gefragt wird, sondern, dass **„rückwärts"** aus gegebenen Werten von P auf n, p oder k geschlossen werden muss, indem verschiedene Werte **am WTR ausprobiert** werden.
Zudem sind die Aufgaben oft in Anwendungen„eingekleidet".

Die nachfolgende **Joker-Liste** soll Ihnen bei diesen Aufgaben helfen, indem sie Ihnen Struktur gibt und den Fokus auf die wesentlichen Werte lenkt.

Beispiel

a) Ein Glücksrad hat 18 gleich große Felder. Einige davon sind rot eingefärbt.
Das Glücksrad wird 40 Mal gedreht. Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau 16 Mal die Farbe Rot kommt, beträgt etwa 12,6 %. Wie viele Felder sind rot eingefärbt?

Joker - Liste

[X] BV oder [ ] kum. BV

über Gegenereignis [ ] ja / [X] nein

$n = 40$ oder [ ] gesucht

$p = ?$ oder [X] gesucht

$k = 16$ oder [ ] gesucht

$P \approx 0{,}126$ oder [ ] gesucht

Vorgehen

X: Anzahl der Treffer

verschiedene Werte von p probieren, bis $P \approx 0{,}126$ gilt.

$p = \frac{7}{18}$: $P(X = 16) \approx 0{,}126$

A: Es sind 7 Felder rot eingefärbt.

b) Ein Basketballspieler trifft einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %.
Er wirft 30 Mal. Bei welcher Trefferanzahl überschreitet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er höchstens diese Trefferanzahl erreicht, zum ersten Mal 95 %?

Joker - Liste

[ ] BV oder [X] kum. BV

über Gegenereignis [ ] ja / [X] nein

$n = 30$ oder [ ] gesucht

$p = 0{,}75$ oder [ ] gesucht

$k = ?$ oder [X] gesucht

$P > 0{,}95$ oder [ ] gesucht

Vorgehen

k erhöhen, bis 95 % überschritten wird.

$P(X \leq 24) \approx 0{,}797 < 0{,}95$

$P(X \leq 25) \approx 0{,}902 < 0{,}95$

$P(X \leq 26) \approx 0{,}963 > 0{,}95$

A: Bei mindestens 26 Treffern.

www.mvurl.de/8g8z

c) Ein Flugzeug hat 100 Plätze. Es werden jedoch mehr als 100 Tickets verkauft, da durchschnittlich nur 90 % der buchenden Personen auch zum Flug erscheinen.
Wie viele Tickets dürfen höchstens verkauft werden, sodass die vorhandenen Plätze mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % ausreichen?

Joker - Liste			
☐ BV	oder	☒	kum. BV
über Gegenereignis		☐ ja / ☒ nein	
$n = ?$	oder	☒	gesucht
$p = 0,9$	oder	☐	gesucht
$k = 100$	oder	☐	gesucht
$P > 0,95$	oder	☐	gesucht

Vorgehen

X: Anzahl der Fluggäste

n erhöhen, bis 95 % unterschritten wird.

$n = 106 \quad P(X \leq 100) \approx 0,960 > 0,95$

$n = 107 \quad P(X \leq 100) \approx 0,919 < 0,95$

A: Es dürfen höchstens 106 Tickets verkauft werden.

d) An einer Umfrage nimmt erfahrungsgemäß nur jede fünfte angesprochene Person teil. Ermitteln Sie die Anzahl der Personen, die mindestens angesprochen werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95%, mindestens 1000 Personen zu bekommen, die an der Umfrage teilnehmen. (Abiturprüfung 2022)

Bedingung: (X: Anzahl der Teilnehmer)

$$\begin{aligned} P(X \geq 1000) &\geq 0,95 \\ 1 - P(X \leq 999) &\geq 0,95 \\ 0,05 &\geq P(X \leq 999) \end{aligned}$$

Joker - Liste			
☐ BV	oder	☒	kum. BV
über Gegenereignis		☒ ja / ☐ nein	
$n = ?$	oder	☒	gesucht
$p = \frac{1}{5}$	oder	☐	gesucht
$k = 999$	oder	☐	gesucht
$P \leq 0,05$	oder	☐	gesucht

Vorgehen

n erhöhen, bis 0,05 unterschritten wird

$n = 5234: \ P(X \leq 999) \approx 0,0505 \geq 0,05$

$n = 5235: \ P(X \leq 999) \approx 0,0498 \leq 0,05$

A: Es müssen mindestens 5235 Personen angesprochen werden.

VII Basisübungen

1 Basisübungen zur Analysis

1.1 Funktionen

Aufgabe 1: Eine Gerade verläuft durch die beiden Punkte $P_1(3|-2)$ und $P_2(-1|4)$. Berechnen Sie deren Gleichung.

Aufgabe 2: Geben Sie jeweils die Gleichung einer möglichen Geraden an.

a) Verläuft parallel zu $y=-2x+3$: $y=$ ________________

b) Verläuft parallel zu $y=-x$: $y=$ ________________

c) Verläuft senkrecht zu $y=-2x+3$: $y=$ ________________

d) Ursprungsgerade mit Steigungswinkel von 60°: $y=$ ________________

e) Verläuft parallel zur x-Achse durch $P(2|-4)$: $y=$ ________________

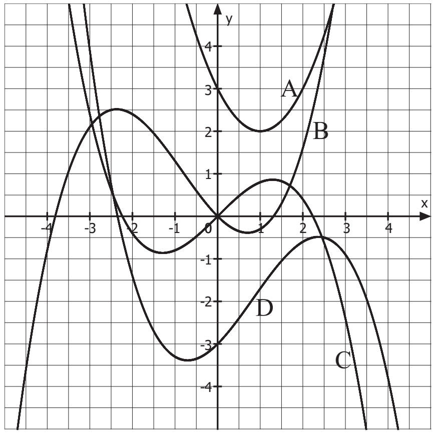
f) Verläuft parallel zur y-Achse durch $P(2|-4)$: __ $=$ ________________

Aufgabe 3: Füllen Sie aus. (Hinweis: S_y bezeichnet der Schnittpunkt mit der y-Achse.).

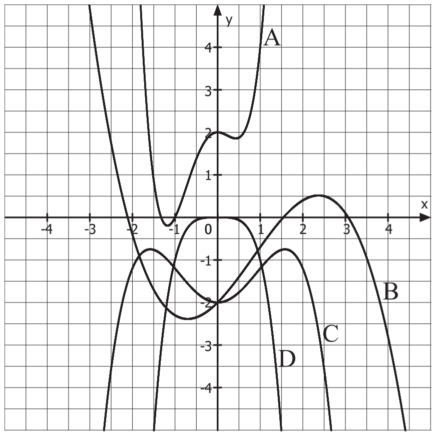
Funktionsterm	Grad	S_y	Verlauf	Symmetrie zu …
$f(x)=-x^3-2x+2$		$S_y(0\|\_\_)$	von __ nach __	☐ y-Achse ☐ Ursprung ☐ weder noch
$f(x)=2x^3+x$		$S_y(0\|\_\_)$	von __ nach __	☐ y-Achse ☐ Ursprung ☐ weder noch
$f(x)=-x^4-2x^2-1$		$S_y(0\|\_\_)$	von __ nach __	☐ y-Achse ☐ Ursprung ☐ weder noch
$f(x)=0{,}5x\cdot(x^3-2)$ $=$ ____________		$S_y(0\|\_\_)$	von __ nach __	☐ y-Achse ☐ Ursprung ☐ weder noch
$f(x)=(1-x^2)\cdot(x^2+1)$ $=$ ____________ $=$ ____________		$S_y(0\|\_\_)$	von __ nach __	☐ y-Achse ☐ Ursprung ☐ weder noch

Aufgabe 4 : Ordnen Sie jedem Schaubild die zugehörige Funktionsgleichung zu.
(Tipp: Prüfen Sie Grad, Schnittpunkt mit *y*-Achse, Verlauf und Symmetrie.)

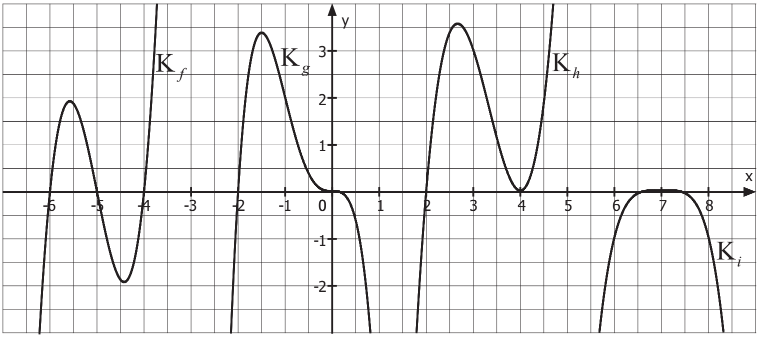
a)
___ : $f_1(x) = -0,2x^3 + 0,5x^2 - x$
___ : $f_2(x) = 0,2x^3 + x$
___ : $f_3(x) = 0,2x^3 + x - 3$
___ : $f_4(x) = -0,2x^3 + x^2$
___ : $f_5(x) = x^2 - 2x + 3$
___ : $f_6(x) = 0,2x^3 + 0,5x^2 - x$
___ : $f_7(x) = -0,2x^3 + 0,5x^2 + x - 3$
___ : $f_8(x) = -x^2 - 3$
___ : $f_9(x) = -0,2x^3 + x$
___ : $f_{10}(x) = 0,2x^3 - x$



b)
___ : $f_1(x) = -0,2x^3 + 0,5x^2 + x - 2$
___ : $f_2(x) = -0,2x^4 + x^3 - 2$
___ : $f_3(x) = -x^2$
___ : $f_4(x) = 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2$
___ : $f_5(x) = 1,2x^3 - 0,5x^2 - x - 2$
___ : $f_6(x) = 4x^4 - 2x^2 + 2$
___ : $f_7(x) = -x^4$
___ : $f_8(x) = -0,2x^4 + x^2 - 2$
___ : $f_9(x) = -0,2x^4 + 0,5x^2 + x - 2$
___ : $f_{10}(x) = -2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2$



Aufgabe 5 : Vervollständigen Sie die Funktionsterme im Nullstellenansatz.



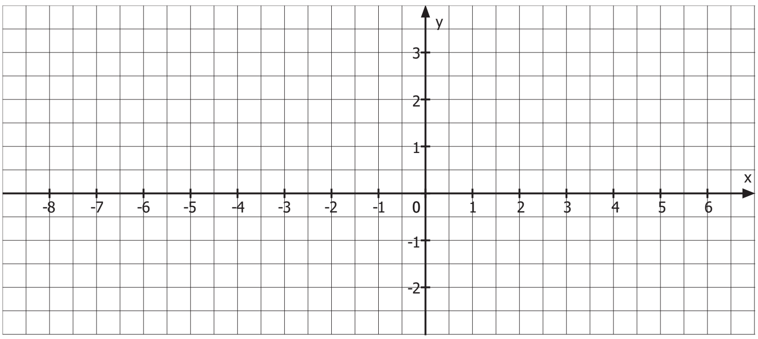
$K_f : f(x) = 5 \cdot$ ______________________ $K_g : g(x) = -2 \cdot$ ______________________

$K_h : h(x) = 3 \cdot$ ______________________ $K_i : i(x) = -$ ______________________

Aufgabe 6 : Skizzieren Sie die Schaubilder in das Koordinatensystem.

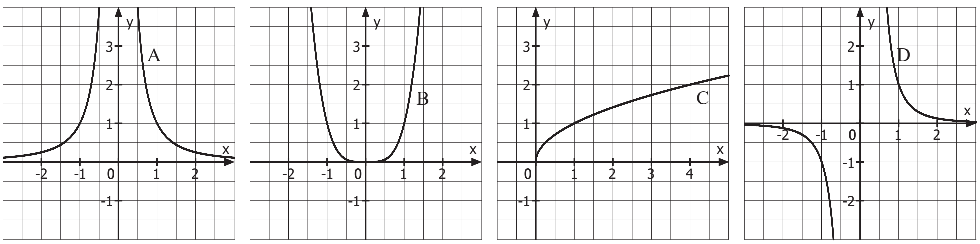
$K_f : f(x) = -(x+7)^2$ $K_g : g(x) = (x+5)^2 \cdot (x+3)^2$

$K_h : h(x) = x^3$ $K_i : i(x) = -(x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-5) \cdot (x-6)$



Aufgabe 7: Ordnen Sie zu.

___ : $f_1(x) = \sqrt{x}$ ___ : $f_2(x) = \frac{1}{x^3}$ ___ : $f_3(x) = x^4$ ___ : $f_4(x) = x^{-2}$



Aufgabe 8 : Ergänzen Sie.

a) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -2e^x - 1$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = e^x$ durch Spiegelung an der ___-Achse, durch Streckung um den Faktor ___ in ___-Richtung und durch Verschiebung um ___ nach ________.

b) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = e^{-(x-2)}$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = e^x$ durch Spiegelung an der ___-Achse und Verschiebung um ___ nach ________.

c) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -e^{-x} + 2$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = e^x$ durch Spiegelung an der ___-Achse, durch Spiegelung an der ___-Achse und Verschiebung um ___ nach ________.

Aufgabe 9 : Untersuchen Sie auf Asymptoten wie im Beispiel.

Funktion	**Asymptote**	**für $x \to +\infty$**	**für $x \to -\infty$**
a) $f(x) = e^x - 2$	$y = -2$	☐	☒
b) $f(x) = 1 + e^{-x}$	________	☐	☐
c) $f(x) = 2e^{-x+1} - 2x - 1$	________	☐	☐
d) $f(x) = e^x - x + 1$	________	☐	☐
e) $f(x) = x - 1 + e^{-x}$	________	☐	☐

Aufgabe 10 : Ergänzen Sie.

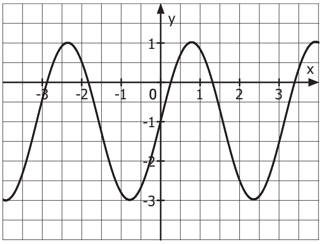
a) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -4\sin(x) + 1$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = \sin(x)$ durch Spiegelung an der ___-Achse, durch Streckung um den Faktor ___ in ___-Richtung und durch Verschiebung um ___ nach ________.

b) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = \sin(2(x+4))$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = \sin(x)$ durch Streckung um den Faktor ___ in ___-Richtung (Periodenlänge = ___) und durch Verschiebung um ___ nach ________.

c) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2{,}5\cos(x-2) - 2$ entsteht aus dem Schaubild von f mit $f(x) = \cos(x)$ durch Streckung um den Faktor ___ in ___-Richtung, durch Verschiebung um ___ nach ________ und durch Verschiebung um ___ nach ________.

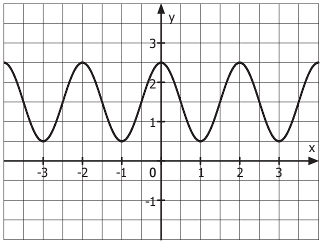
Aufgabe 11 : Ermitteln Sie jeweils eine mögliche zugehörige Funktionsgleichung.

a)



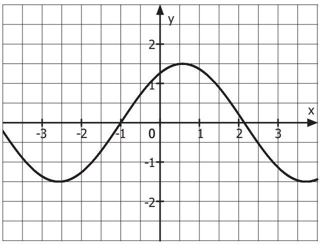
$f(x) =$ ____________________

b)



$f(x) =$ ____________________

c)



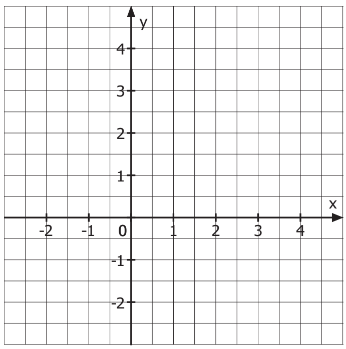
$f(x) =$ ____________________

Aufgabe 12 : Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(x^2) \cdot x$.
Weisen Sie anhand der allgemeinen Bedingung nach, dass deren Schaubild K_f symmetrisch zum Ursprung ist.

Aufgabe 13

Bestimmen Sie den Funktionsterm der zugehörigen Umkehrfunktion rechnerisch und das zugehörige Schaubild grafisch.

$f(x) = -0{,}5x + 2$



4 Basisübungen zum Problemlösen

Aufgabe 81: Jakob und Lovis können sich nicht einigen und wollen deshalb eine Münze werfen. Leider ist die Münze verbogen.
Wie können sie mithilfe der verbogenen Münze ein faires Glückspiel mit gleichen Gewinnchancen für beide durchführen?

Aufgabe 82: Jonas hat eine 4 kg schwere Wassermelone, deren Masse zu 99 % aus Wasser besteht. Unvorsichtigerweise lässt sie sie zu lange in der Sonne liegen, bis die Melone nur noch zu 98 % aus Wasser besteht.
Wie schwer ist die Melone dann noch?

Aufgabe 83: Mara legt Blättchen nach nebenstehendem Muster. Die ersten drei Muster hat sie schon gelegt.

Ab welchem Muster benötigt Mara mehr als 1000 Blättchen? Begründen Sie.

Aufgabe 84: Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten A(3 | 3 | 3), B(3 | 5 | 3), C(9 | 5 | 3). Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D, sodass das Volumen der Pyramide ABCD gleich 10 ist.

Aufgabe 85: Daniel startet seine Wanderung um 8 Uhr im Tal. Er kommt um 18 Uhr auf der Berghütte an und übernachtet dort. Am nächsten Morgen beginnt er seinen Rückweg um 8 Uhr und erreicht um 18 Uhr das Tal.
Hierbei wandert Daniel nicht unbedingt mit konstanter Geschwindigkeit.
Beweisen Sie, dass es eine Uhrzeit zwischen 8 Uhr und 18 Uhr gibt, zu welcher sich Daniel an beiden Tagen an der exakt gleichen Stelle seiner Wanderung befindet.

Aufgabe 86: In ein Quadrat ist ein Kreis einbeschrieben. Der Kreis stellt wiederum den Umkreis eines kleineren Quadrates dar.
In welchem Verhältnis stehen die die Flächeninhalte der beiden Quadrate zueinander?